Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Octobre 2009

Plan de la séance

1 – Catégories monoïdales

2 – Diagrammes de cordes (bis)

3 – Réseaux de démonstration

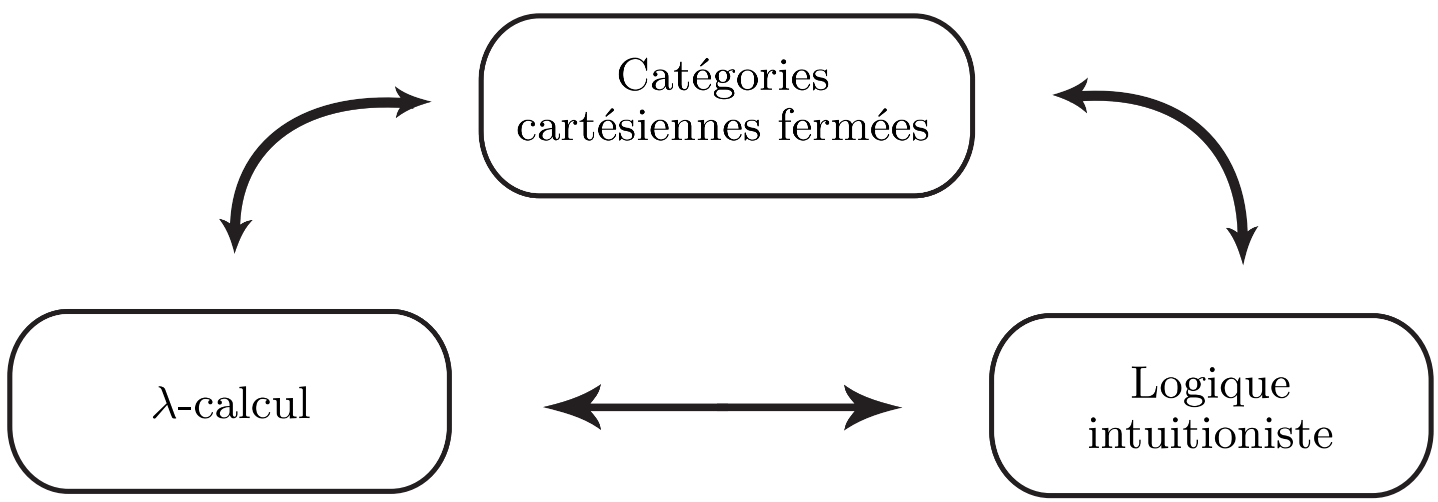
4 – Boîtes fonctorielles

5 – Catégories monoïdales tracées

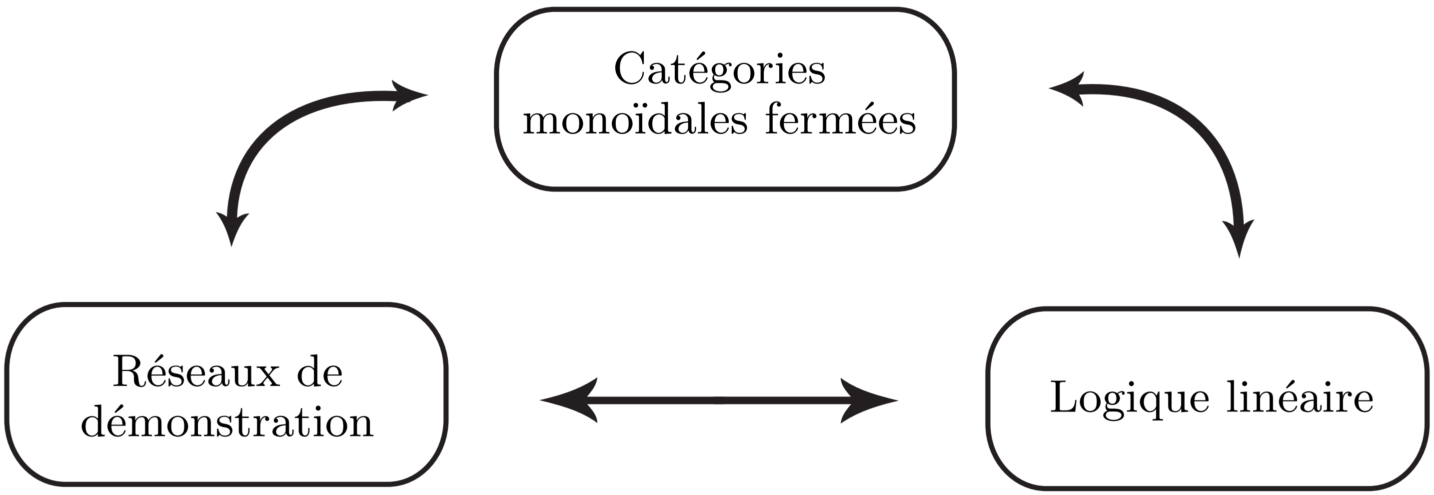
6 – Exemple: transport de trace

7 – Exemple: tressage

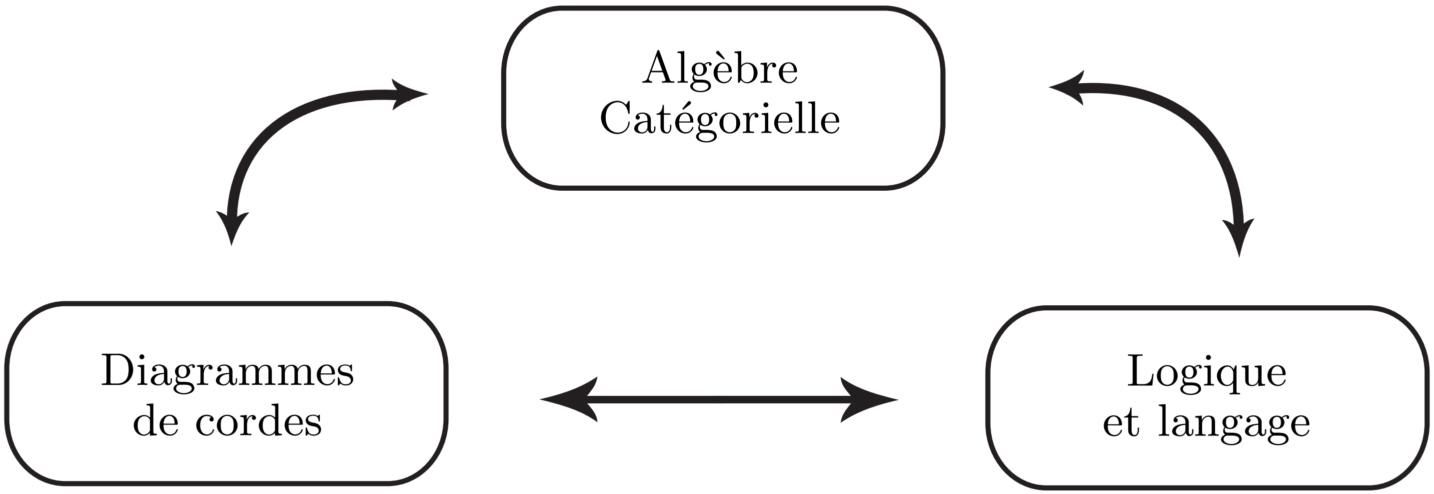
La sémantique dénotationnelle après Lambek



La sémantique dénotationnelle dans les années 1990

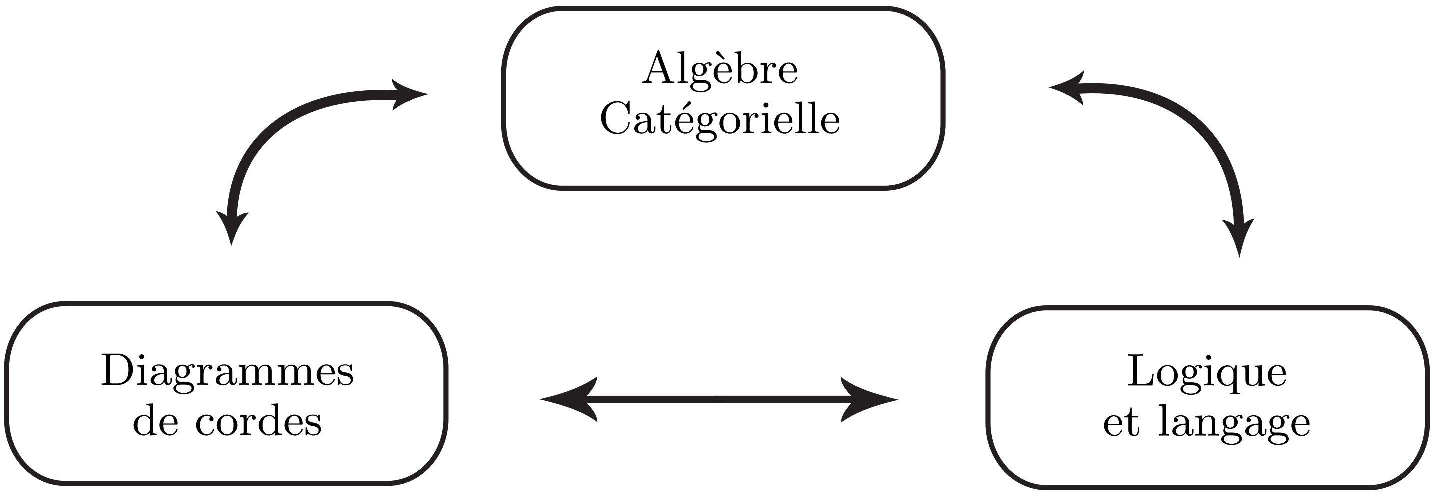


Diagrammes de cordes



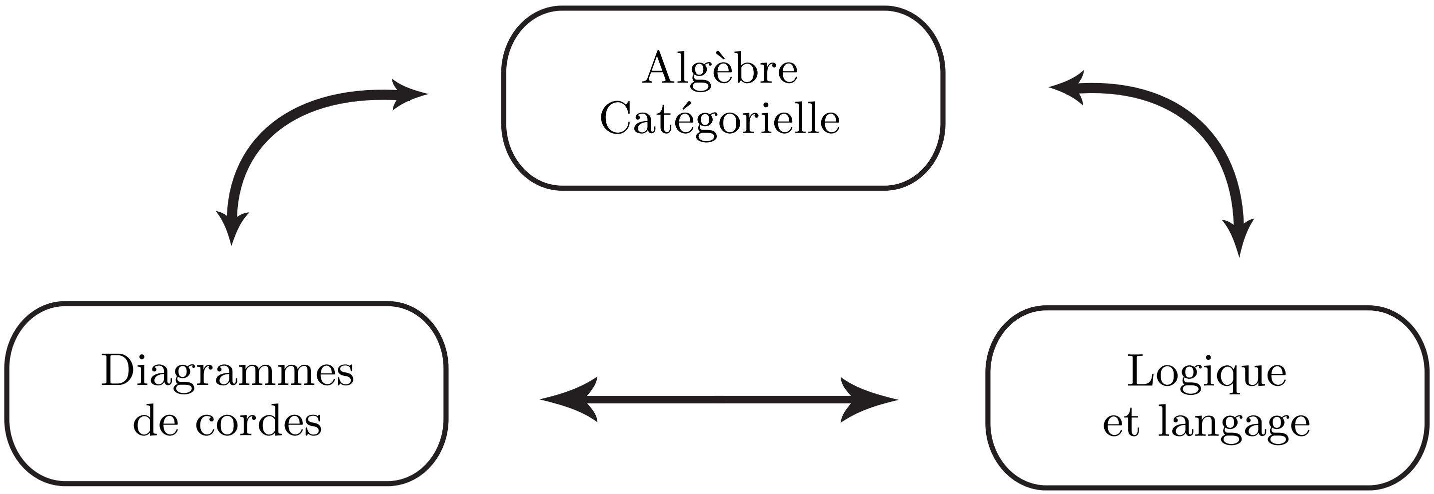
Un point de vue algébrique sur la logique

Diagrammes de cordes



Un point de vue logique sur l'algebre

Diagrammes de cordes



Des points de contact avec l'algèbre n-dimensionnelle et la physique

Première partie

Catégories monoïdales

Tressage, torsion, symétrie

Catégories monoïdales

Une **catégorie monoïdale** est une catégorie $\mathcal{C}$ équippée d'un foncteur:

$$\otimes \quad : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

un objet:

$$I$$

et trois transformations naturelles:

$$(A \otimes B) \otimes C \quad \xrightarrow{\alpha} \quad A \otimes (B \otimes C)$$

$$I \otimes A \quad \xrightarrow{\lambda} \quad A \qquad\qquad\qquad A \otimes I \quad \xrightarrow{\rho} \quad A$$

qui satisfont une série de propriétés de cohérence.

Le pentagone de MacLane

$$
\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\otimes D"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "A\otimes\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

La paire critique de la règle d'associativité.

Identité triangulaire

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho \otimes B"'] & A \otimes (I \otimes B) \arrow[d, "A \otimes \lambda"] \\
A \otimes B \arrow[r, phantom, "="] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

La paire critique des règles d'identité gauche et droite.

Exemple

La catégorie **Ban** dont les objets sont les espaces de Banach, et dont les morphismes

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

sont les applications linéaires telles que

$$\forall a \in A, \qquad \|f(a)\|_B \quad \leq \quad \|a\|_A.$$

La catégorie **Ban** est monoïdale, en prenant le produit tensoriel des espaces vectoriels, puis en complétant la topologie.

La catégorie est monoïdale symétrique et fermée, avec

$$A \multimap B \quad = \quad \{ \ f \ \text{opérateur borné avec la norme usuelle.} \ \}$$

Deuxième partie

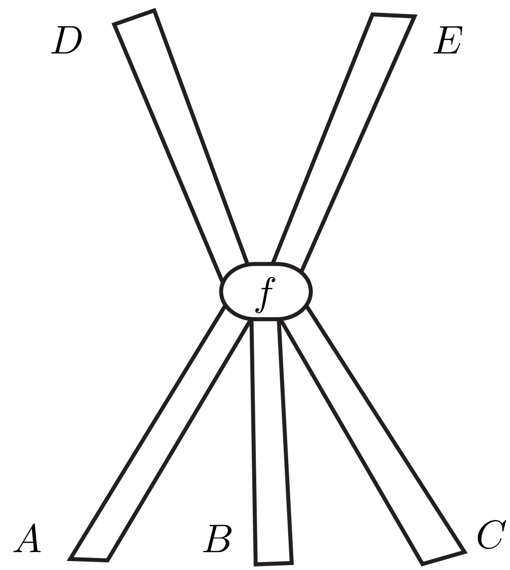
Diagrammes de corde

Une idée de Roger Penrose (1970)

Formalisée par André Joyal and Ross Street (depuis 1993)

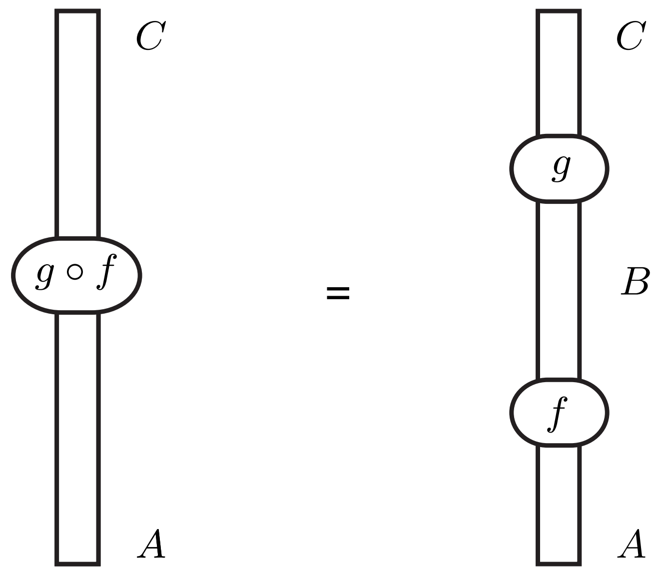
Diagrammes de corde

Un morphisme $f : A \otimes B \otimes C \longrightarrow D \otimes E$ est dessiné ainsi



Composition

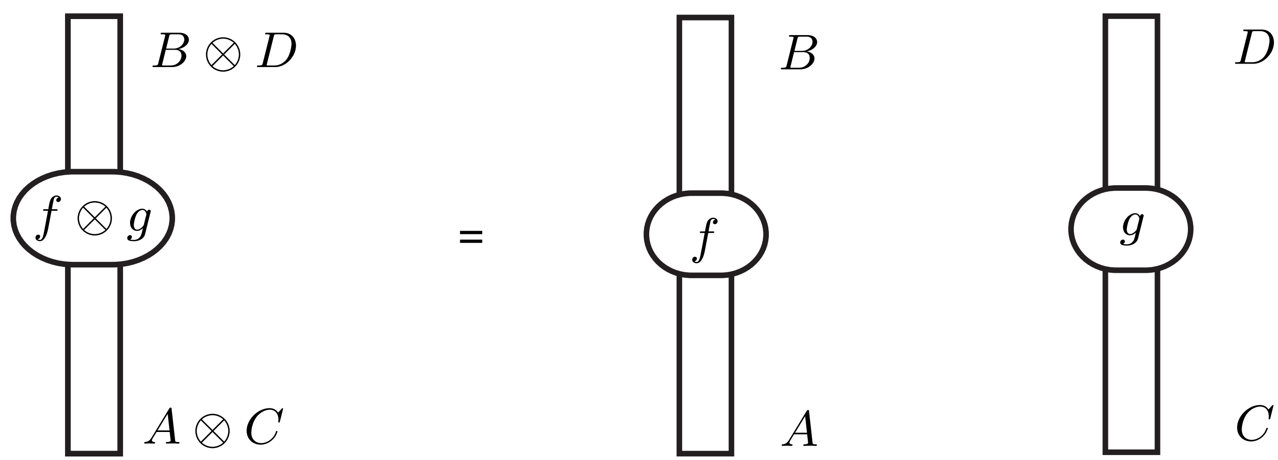
Le morphisme $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est dessiné ainsi



Composition verticale

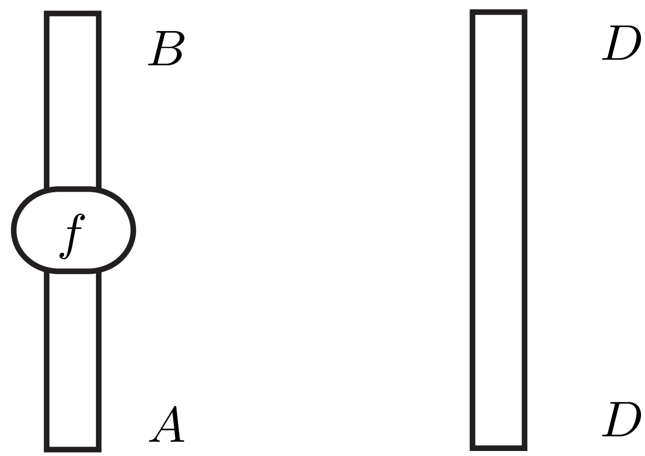
Produit tensoriel

Le morphisme $(A \xrightarrow{f} B) \otimes (C \xrightarrow{g} D)$ est dessiné ainsi



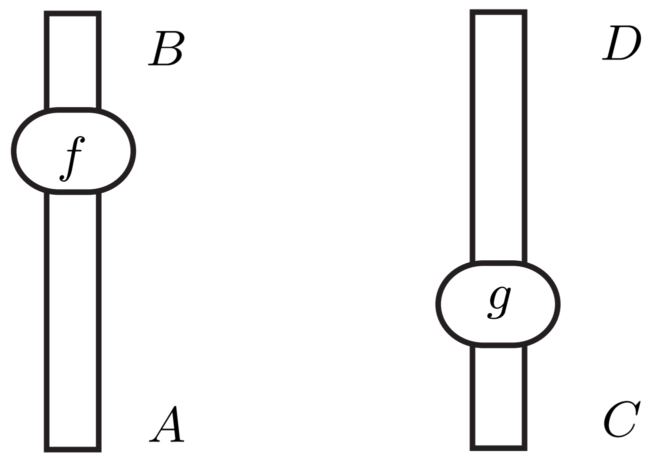
$\boxed{\text{Produit tensoriel horizontal}}$

Exemple



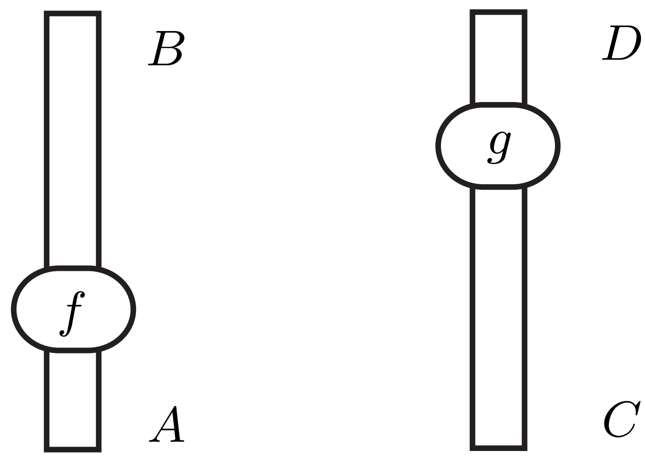
$f \otimes id_D$

Exemple



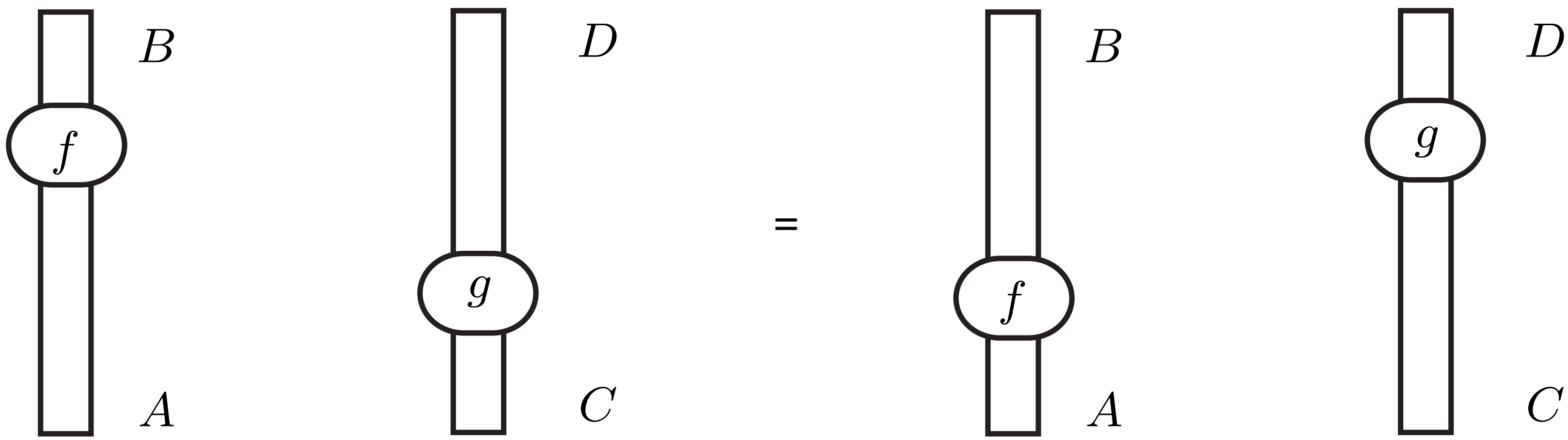
$$(f \otimes id_D) \circ (id_A \otimes g)$$

Exemple



$(id_B \otimes g) \circ (f \otimes id_C)$

Sens préservé par déformation



$$(f \otimes id_D) \circ (id_A \otimes g) \quad = \quad (id_B \otimes g) \circ (f \otimes id_C)$$

Catégories équilibrées

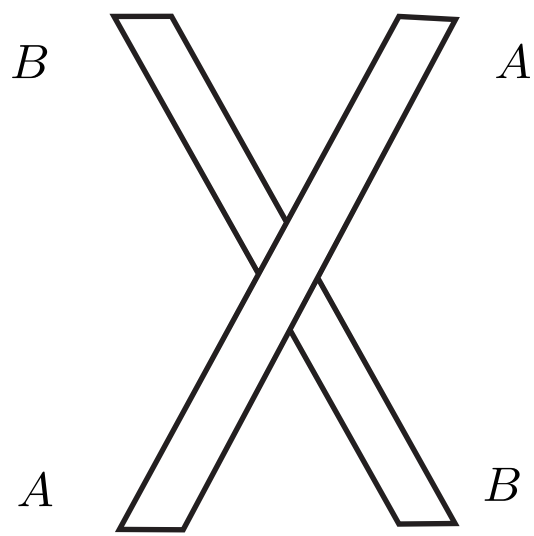
« Balanced categories »

Définies par André Joyal et Ross Street en 1993

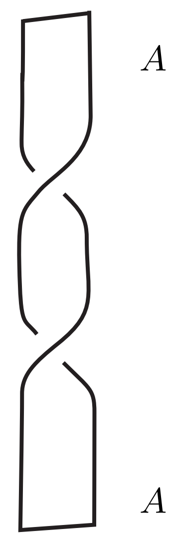
Catégories équilibrées

Une catégorie équilibrée est une catégorie monoïdale munie de

tressage $A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A$



torsion $A \xrightarrow{\theta_A} A$



Tressage

Un **tressage** est défini comme une famille d'isomorphismes

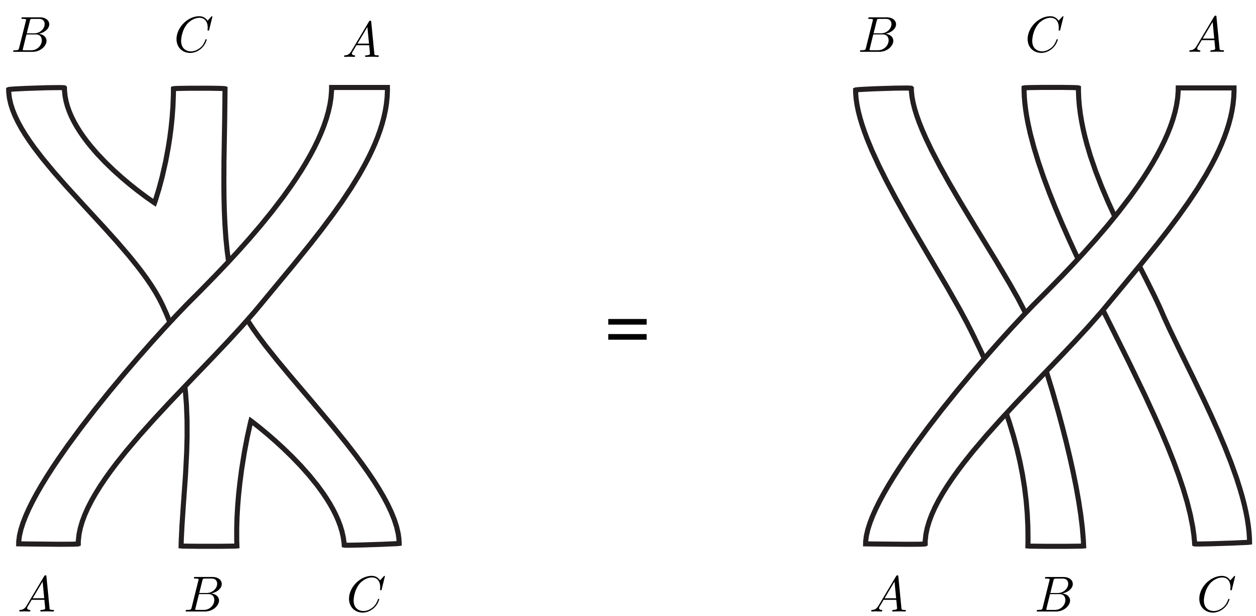
$$\gamma_{A,B} \; : \quad A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$$

naturelle en A et en B, telle que deux diagrammes commutent:

Premier diagramme de cohérence

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\gamma"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma \otimes C"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 & (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, "B \otimes \gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

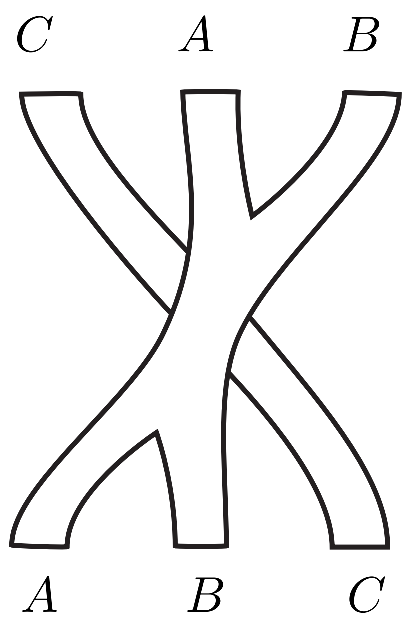
Reformulation topologique en diagramme de cordes



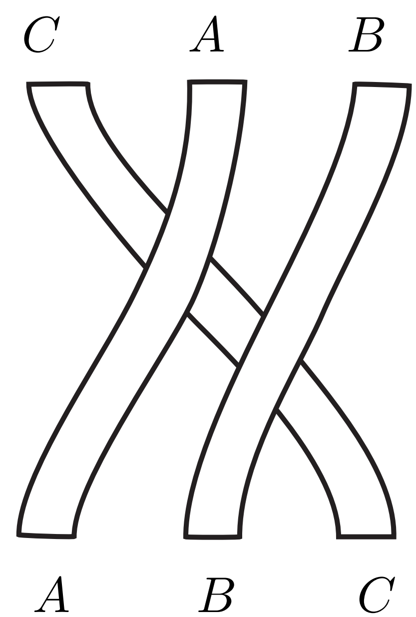
Second diagramme de cohérence

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[dr, bend left, "\alpha^{-1}"] & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[ur, bend left, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, bend right, "A\otimes\gamma"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, bend right, "\gamma\otimes B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Reformulation topologique en diagramme de cordes



=



Ces axiomes impliquent en particulier...

que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\rho"'] & I \otimes A \arrow[d, "\lambda"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

commute, pour tout objet A de la catégorie.

Symétrie

Une symétrie est un tressage tel que

$$A \otimes B \xrightarrow{\gamma_{A,B}} B \otimes A \xrightarrow{\gamma_{B,A}} A \otimes B$$

est égal au morphisme identité, pour tout objets A, B.

Torsion

Une torsion est une famille d'isomorphismes

$$A \xrightarrow{\theta_A} A$$

naturelle en A, telle que

$$\theta_I \quad = \quad id_I$$

et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "\gamma_{A,B}"] \arrow[d, "\theta_{A\otimes B}"'] & B \otimes A \arrow[d, "\theta_B \otimes \theta_A"] \\
A \otimes B & B \otimes A \arrow[l, "\gamma_{B,A}"]
\end{tikzcd}$$

commute pour tous les objets A et B.

Troisième partie

Réseaux de démonstration

Une notation graphique pour les preuves de logique linéaire

Calcul des séquents

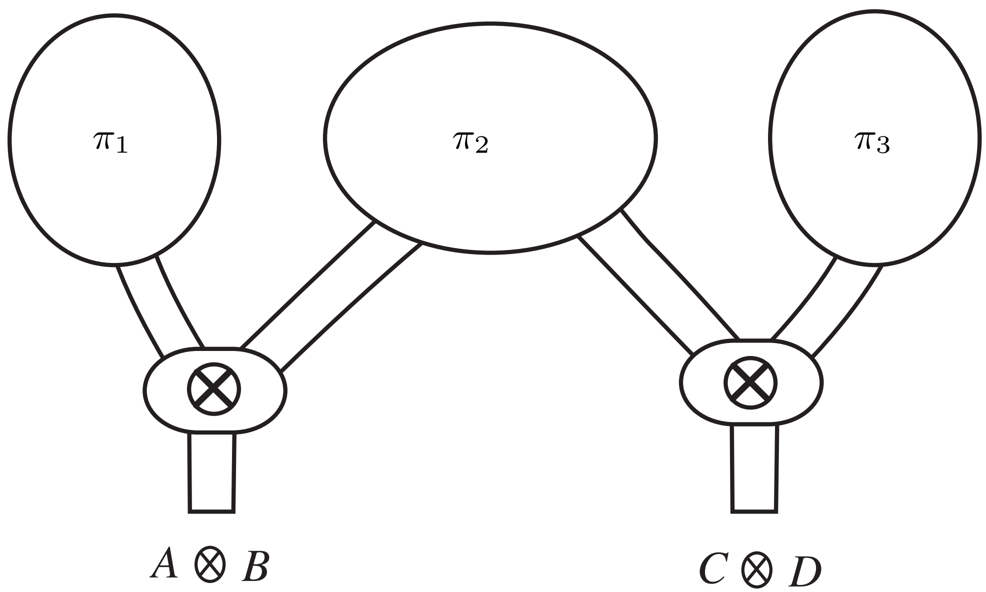
Deux démonstrations équivalentes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\end{array}}{\vdash A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\end{array}}{\vdash B, C}}{\vdash A \otimes B, C} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\end{array}}{\vdash D}}{\vdash A \otimes B, C \otimes D} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\end{array}}{\vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\end{array}}{\vdash B, C} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_3\\ \vdots\end{array}}{\vdash D}}{\vdash B, C \otimes D}}{\vdash A \otimes B, C \otimes D}$$

Une équivalence par permutation

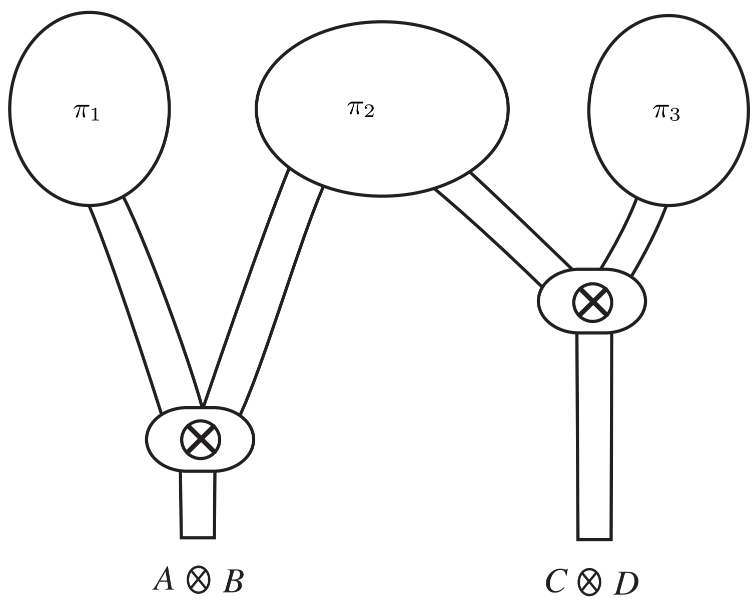
Réseaux de démonstration

sont interprétées par le même réseau de démonstration:



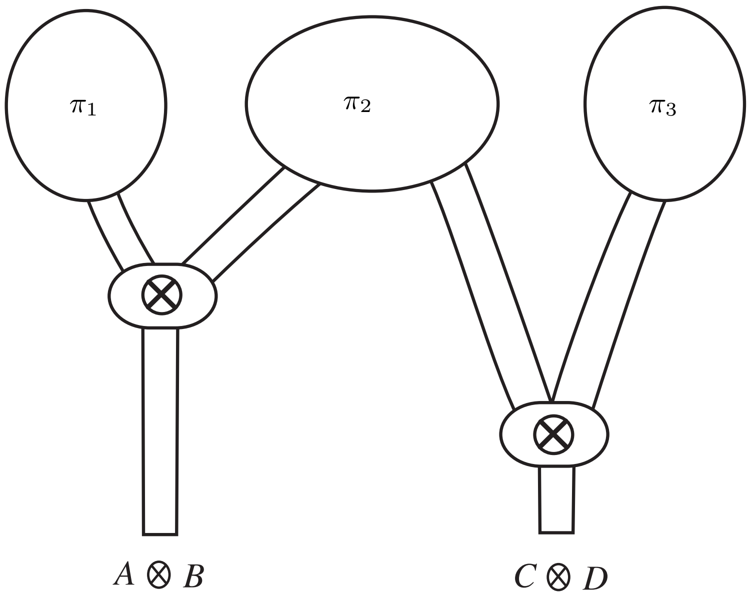
Une notation géométrique des démonstrations

Séquentialisation par déformation



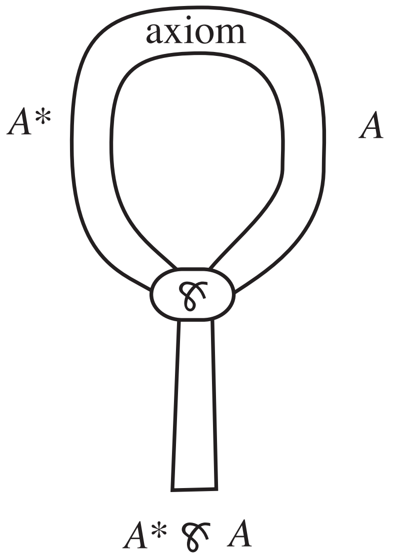
$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash B, C} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_3\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash D}}{\vdash B, C \otimes D}}{\vdash A \otimes B, C \otimes D}$$

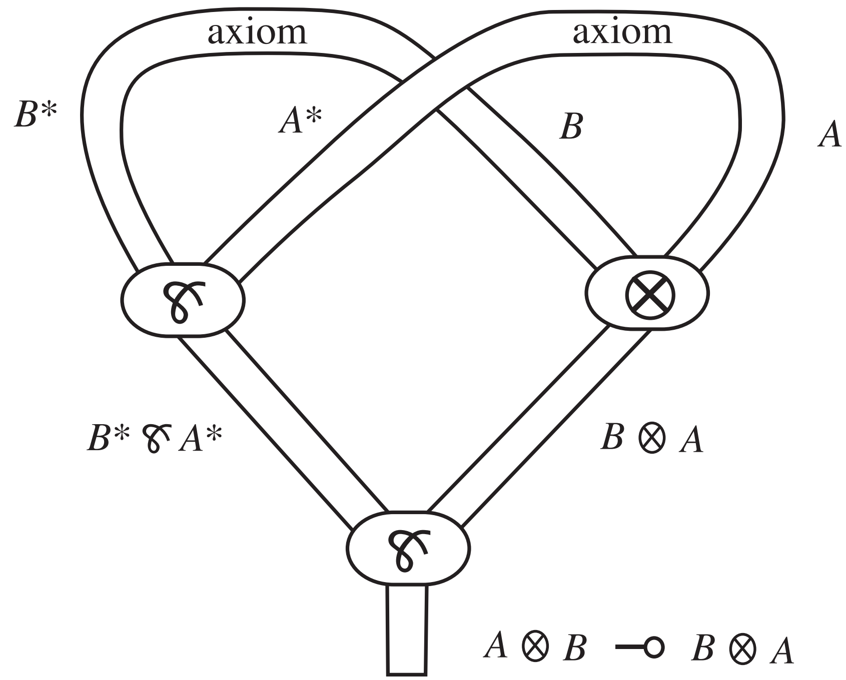
Séquentialisation par déformation



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\vdash B, C}}{\vdash A \otimes B, C} \quad \dfrac{\pi_3}{\vdash D}}{\vdash A \otimes B, C \otimes D}$$

Réseaux multiplicatifs





Les réseaux multiplicatifs sont des diagrammes de cordes !

Question

Est-il possible d'étendre les diagrammes de cordes par des boites ?

Quatrième partie

Boîtes fonctorielles

(voir article en bibliographie)

Sémantique catégorique de la logique linéaire

Une adjonction **monoïdale symétrique**

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{L} \arrow[ll, bend left, "M"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ cartésienne

$\mathcal{L}$ symétrique monoïdale fermée

$$! \quad = \quad L \circ M$$

Logique linéaire tressée

Une adjonction monoïdale **équilibrée**

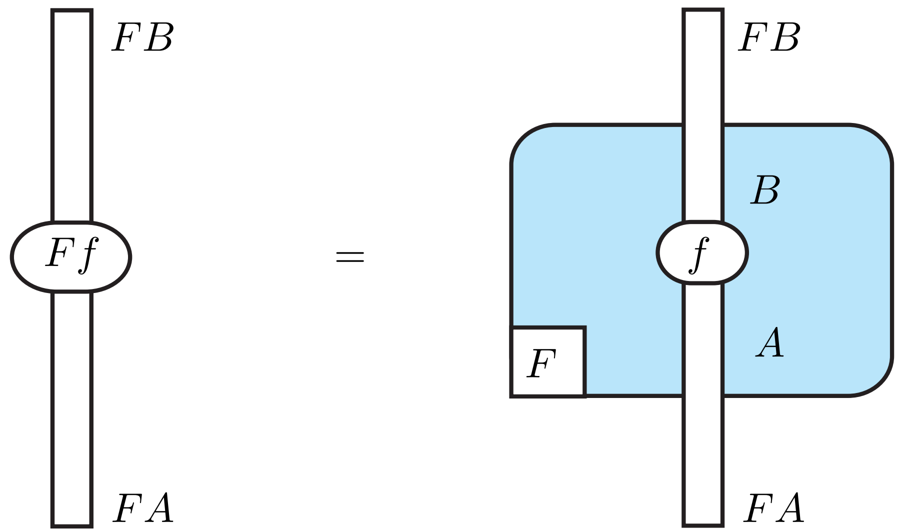
$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{L} \arrow[ll, bend left, "M"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ cartésienne

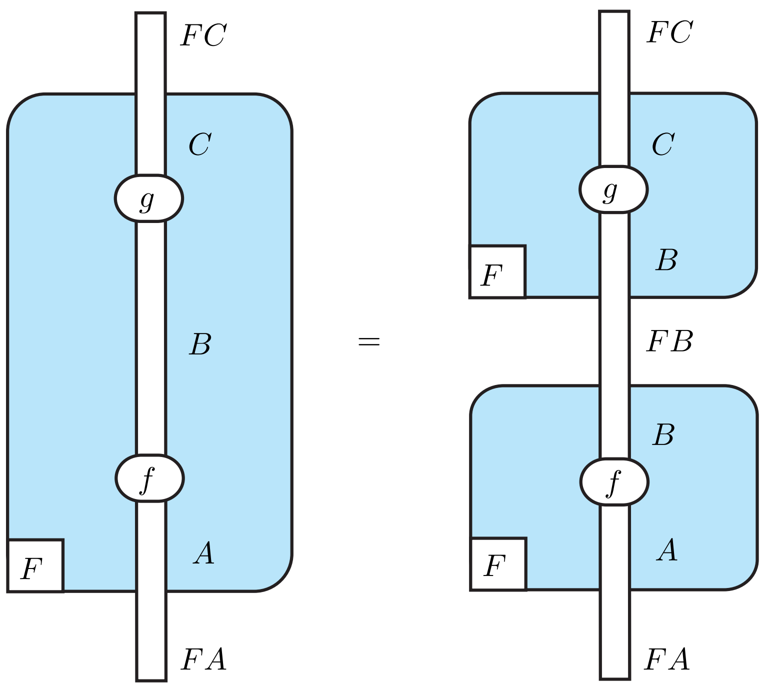
$\mathcal{L}$ **équilibrée** monoidale fermée

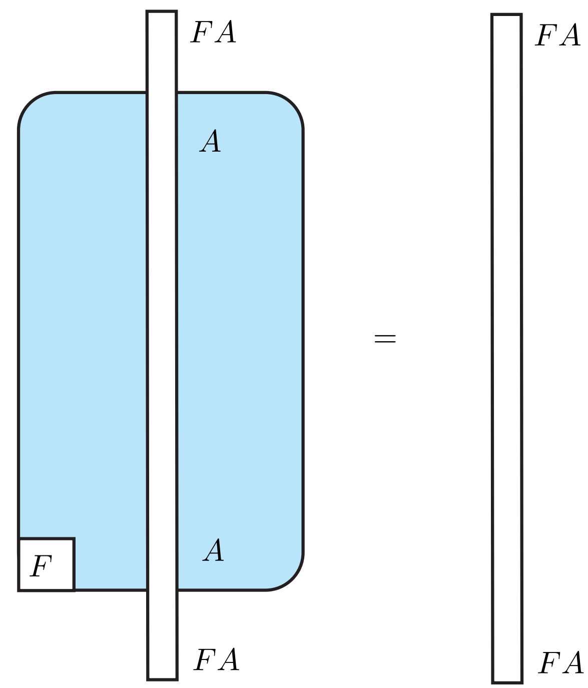
$$! \quad = \quad L \circ M$$

Boîtes fonctorielles dans les diagrammes de cordes



Egalités fonctorielles





Foncteur monoïdal

Un **foncteur monoidal** est un foncteur $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ muni de **morphismes de comparaison**

$$m_{[A,B]} \ : \ FA \otimes FB \ \longrightarrow \ F(A \otimes B)$$

$$m_{[-]} \ : \ I \longrightarrow FI$$

satisfaisant une série de diagrammes de cohérence.

Le foncteur est **monoidal fort** lorsque ces morphismes m sont **inversibles**.

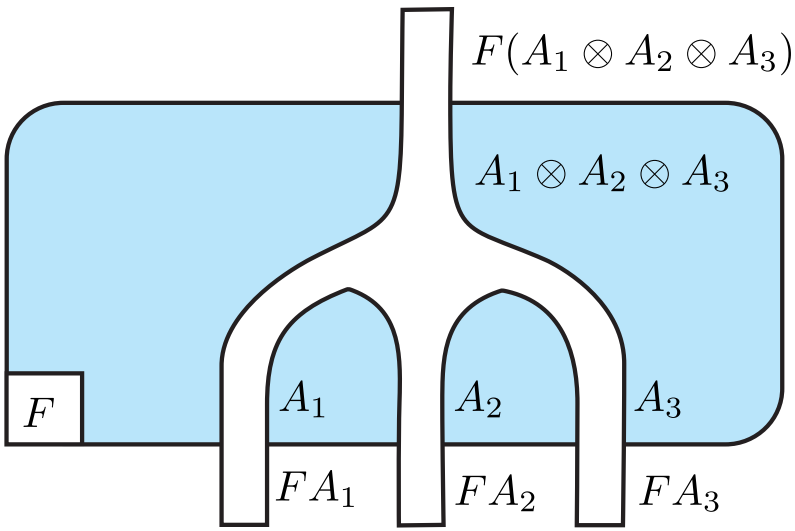
Le foncteur est **monoidal strict** lorsque ces morphismes m sont des **identités**.

Diagrammes de coherence

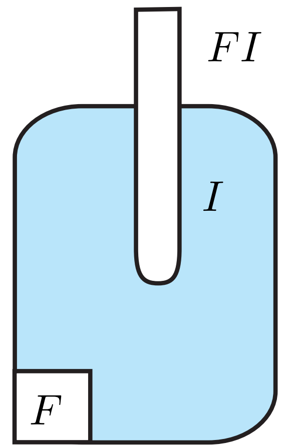
$$\begin{tikzcd}
(FA \bullet FB) \bullet FC \arrow[r, "\alpha^{\bullet}"] \arrow[d, "m \bullet FC"'] & FA \bullet (FB \bullet FC) \arrow[d, "FA \bullet m"] \\
F(A \otimes B) \bullet FC \arrow[d, "m"'] & FA \bullet F(B \otimes C) \arrow[d, "m"] \\
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r, "F\alpha^{\otimes}"] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \bullet I \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "FA \bullet m"'] & FA \\
FA \bullet FI \arrow[r, "m"] & F(A \otimes I) \arrow[u, "F\rho"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \bullet FB \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "m \bullet FB"'] & FB \\
FI \otimes FB \arrow[r, "m"] & F(I \otimes B) \arrow[u, "F\lambda"']
\end{tikzcd}$$

La raison des diagrammes de cohérence



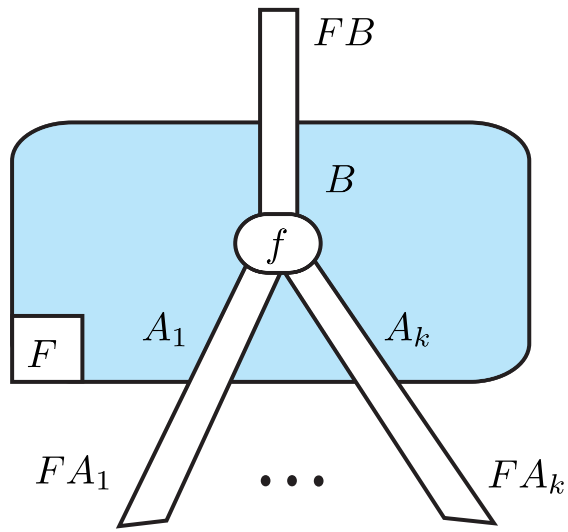
$m_{[A_1,A_2,A_3]}$



$m_{[-]}$

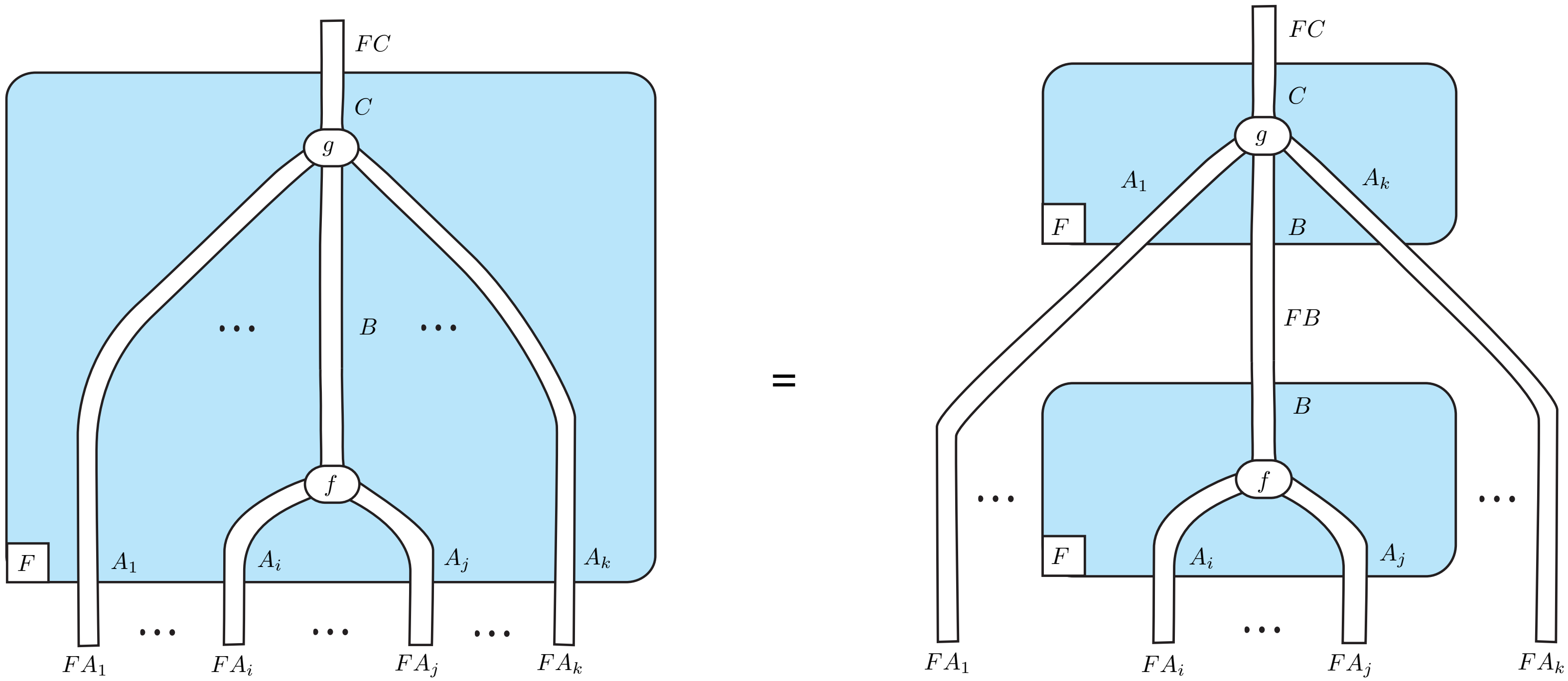
Foncteur monoïdal

Un **foncteur monoïdal** dessine une boîte avec **plusieurs entrées - une sortie**.



$$F(f) \circ m_{[A_1, \cdots, A_k]} \; : \; FA_1 \otimes \cdots \otimes FA_k \longrightarrow FB$$

Egalités fonctorielles (sur les foncteurs laxes)



Foncteurs monoidaux forts

Un **foncteur monoïdal fort** dessine une boîte

avec **plusieurs entrées - plusieurs sorties**

Foncteurs monoidaux balancés

Un foncteur monoïdal $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est **balancé** lorsque les diagrammes

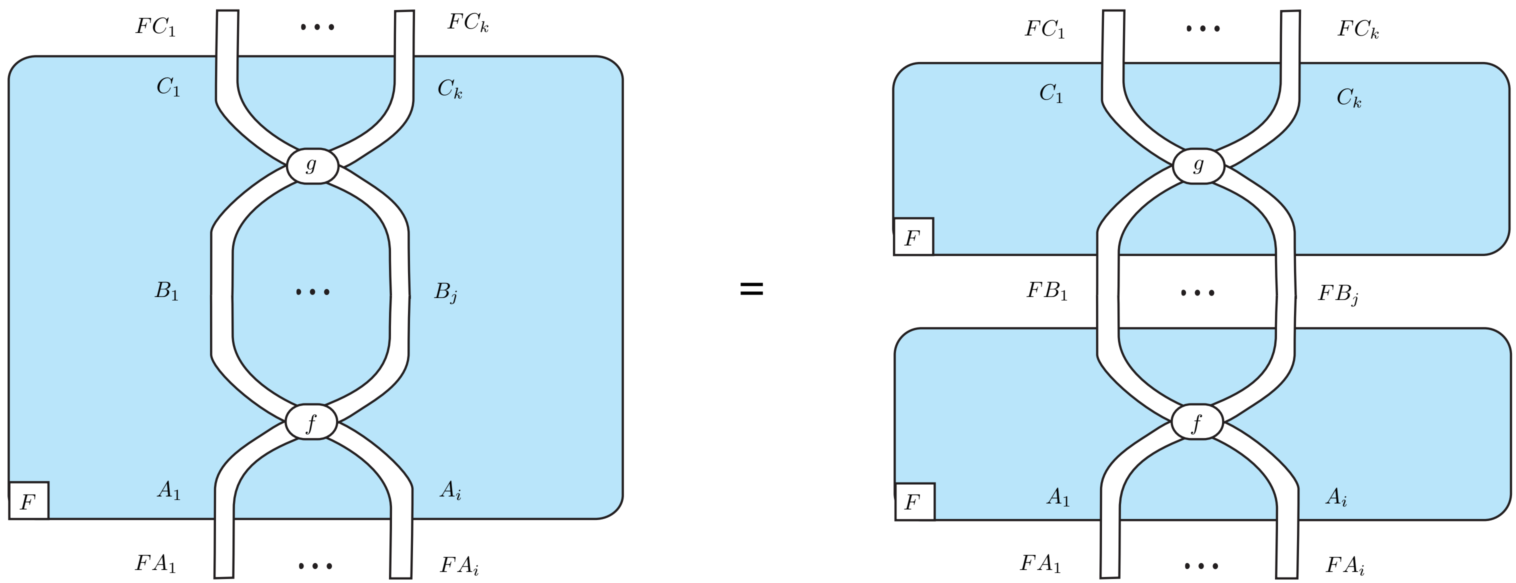
$$\begin{tikzcd} FA \otimes FB \arrow[r, "\gamma_{FA,FB}"] \arrow[d, "m"'] & FB \otimes FA \arrow[d, "m"] \\ F(A \bullet B) \arrow[r, "F\gamma_{A,B}"] & F(B \bullet A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, equal] \arrow[d, "F\theta_A"'] & FA \arrow[d, "\theta_{FA}"] \\ FA \arrow[r, equal] & FA \end{tikzcd}$$

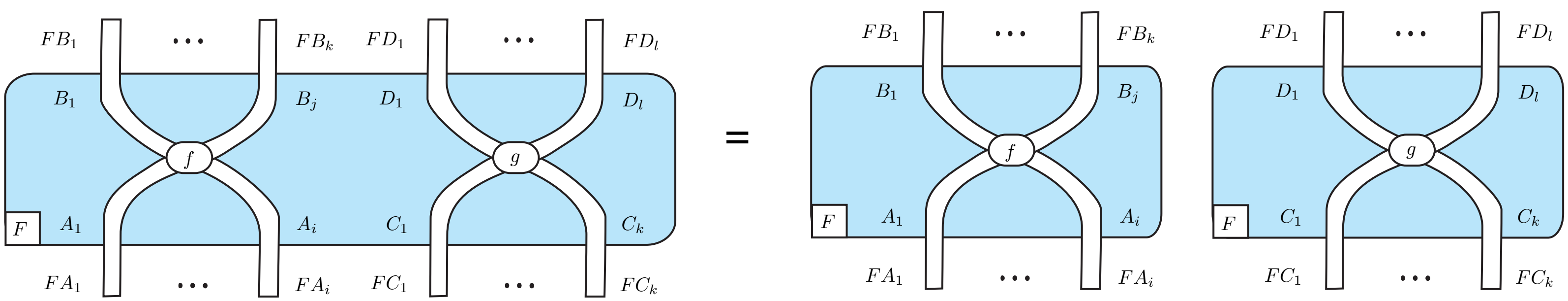
commutent pour tous les objets A, B.

Foncteurs symétriques monoidaux = cas particulier où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont symétriques.

Egalités fonctorielles (sur les foncteurs forts)



Egalités fonctorielles (sur les foncteurs forts)

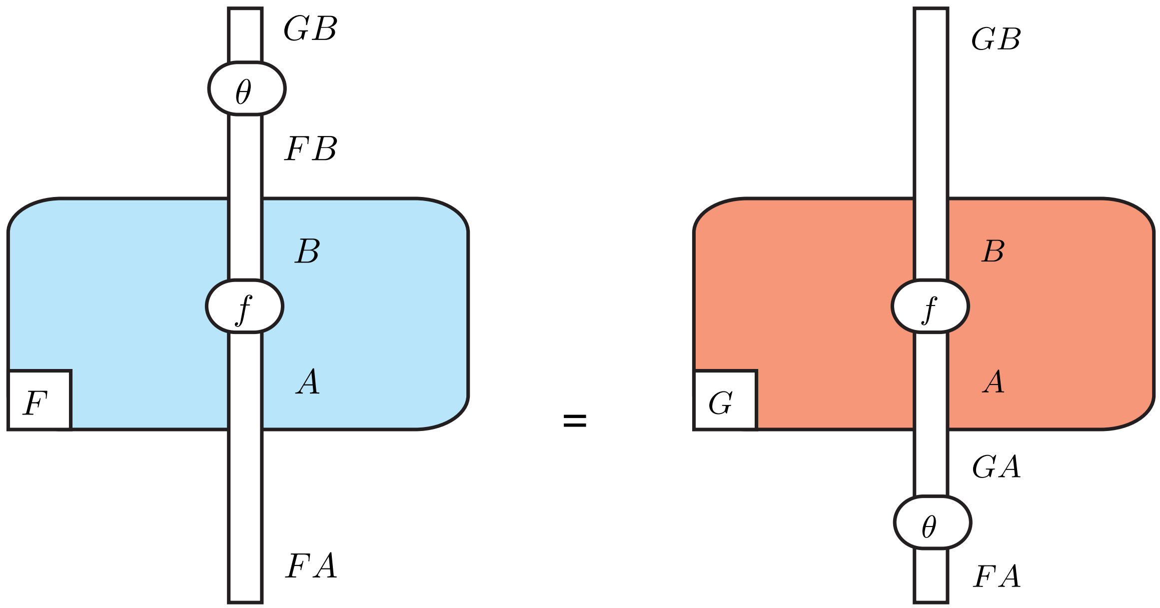


Transformations naturelles

Une transformation naturelle

$$\theta \quad : \quad F \longrightarrow G \quad : \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

vérifie l'égalité graphique suivante:



Transformation naturelle monoïdale

Soient (F, m) et (G, n) deux foncteurs monoïdaux.

Une transformation naturelle

$$\theta \quad : \quad F \longrightarrow G \quad : \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

est monoïdale lorsqu'elle fait commuter les diagrammes

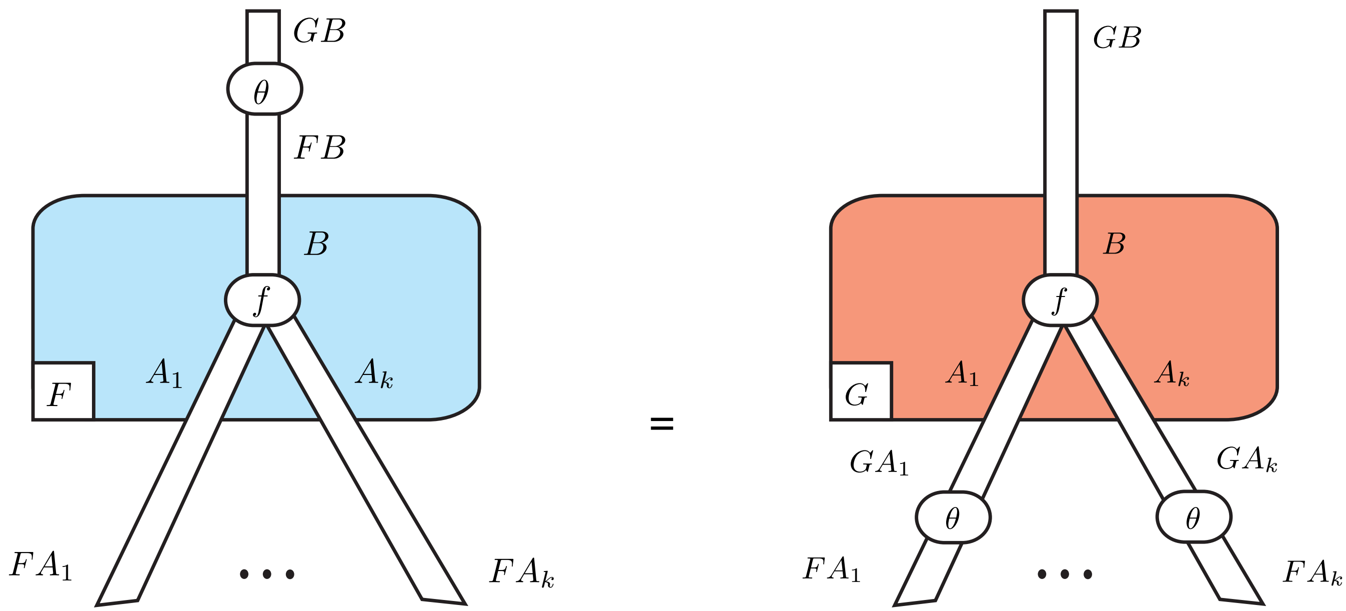
$$\begin{tikzcd}
FA \bullet FB \arrow[r, "\theta_A \bullet \theta_B"] \arrow[d, "m"'] & GA \bullet GB \arrow[d, "n"] \\
F(A \otimes B) \arrow[r, "\theta_{A \otimes B}"] & G(A \otimes B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "m"'] \arrow[dr, "n"] & \\
FI \arrow[rr, "\theta_I"] & & GI
\end{tikzcd}$$

Transformation naturelle monoïdale

Graphiquement, une transformation naturelle est **monoïdale**

$$\theta \quad : \quad F \longrightarrow G \quad : \quad \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

lorsqu'elle vérifie l'égalité suivante:



2-catégories de foncteurs monoidaux

MonCat

0-cellules	:	catégories monoïdales
1-cellules	:	foncteurs monoïdaux
2-cellules	:	transformations naturelles monoïdales

BalMonCat

0-cellules	:	catégories monoïdales équilibrées
1-cellules	:	foncteurs monoïdaux équilibrées
2-cellules	:	transformations naturelles monoïdales

SymMonCat

0-cellules	:	catégories monoïdales symétriques
1-cellules	:	foncteurs monoïdaux symétriques
2-cellules	:	transformations naturelles monoïdales

Illustration

Dans toute catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$

$$\boxed{\text{un foncteur monoïdal de } \mathbb{1} \text{ dans } \mathcal{C} \quad = \quad \text{un monoïde dans } \mathcal{C}}$$

On définit la catégorie

$$\mathbf{Monoides}(\mathcal{C}) \quad := \quad \mathbf{MonCat}(\mathbb{1}, \mathcal{C})$$

qui est donc constitué ainsi:

0-cellules	:	monoïdes de la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$,
1-cellules	:	homomorphismes de monoïdes.

Monoïde

Un **monoïde** est un objet A muni de deux morphismes

$$1 \xrightarrow{u} A \xleftarrow{m} A \otimes A$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes m"'] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m\otimes A"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes A \arrow[r, "u\otimes A"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes 1 \arrow[l, "A\otimes u"'] \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Exemple: une k-algèbre est un monoïde dans la catégorie $(\mathbf{Vect}, \otimes, k)$.

Homomorphisme de monoïde

Dans toute catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$

une transformation naturelle monoïdale		un homomorphisme de monoïde
$f \quad : \quad A_1 \Rightarrow A_2 \quad : \quad \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{C}$	=	$f \quad : \quad A_1 \longrightarrow A_2.$

Conséquence immédiate de la notion de 2-catégorie

Tout foncteur monoïdal

$$F \quad : \quad \mathcal{C} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D}$$

se relève en un foncteur

$$\mathbf{Monoides}(F) \quad : \quad \mathbf{Monoides}(\mathcal{C}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Monoides}(\mathcal{D})$$

tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Monoides}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathbf{Monoides}(F)"] \arrow[d, "U"'] & \mathbf{Monoides}(\mathcal{D}) \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Adjonctions monoïdales

Proposition (non démontrée ici): une adjonction dans

$$\mathbf{MonCat}$$

est la même chose qu'une adjonction dans

$$\mathbf{Cat}$$

telle que le foncteur adjoint à gauche est fort.

Voir mon article de synthèse sur les modèles catégoriques de la logique linéaire

Exemple paradigmatique

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ens} & \longrightarrow & \mathbf{Vect} \\ X & \mapsto & kX \end{array}$$

Ens : la catégorie des ensembles et fonctions,
Vect : la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k

$$kX := \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x \, x \;\middle|\; \lambda_x \in k \text{ presque partout nul.} \right\}$$

Cinquième partie

Catégories monoïdales tracées

Opérateur de trace (Joyal - Street - Verity 1996)

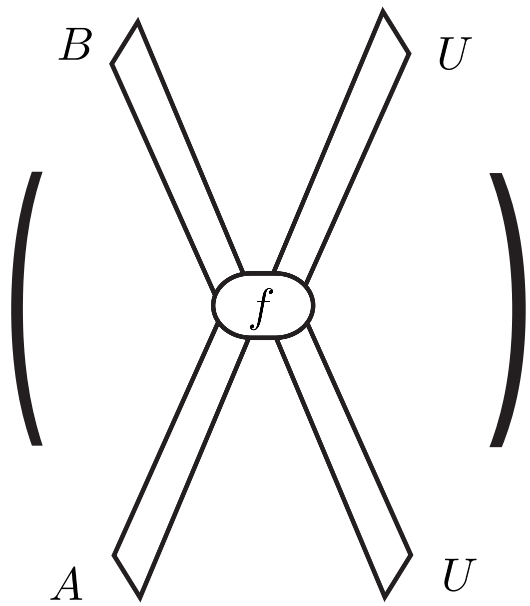
Une **trace** dans une catégorie balancée $\mathcal{C}$ est un opérateur

$$\mathrm{Tr}^{U}_{A,B} \qquad \frac{A \otimes U \longrightarrow B \otimes U}{A \longrightarrow B}$$

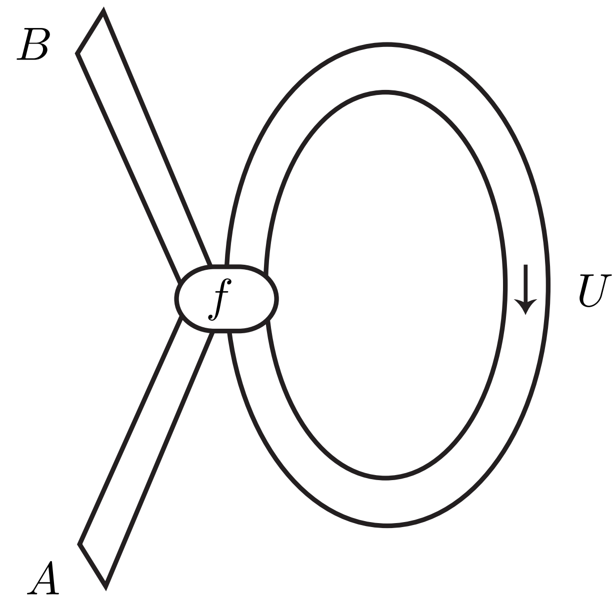
dessiné comme un « **feedback** » dans les diagrammes de cordes:

Opérateur de trace

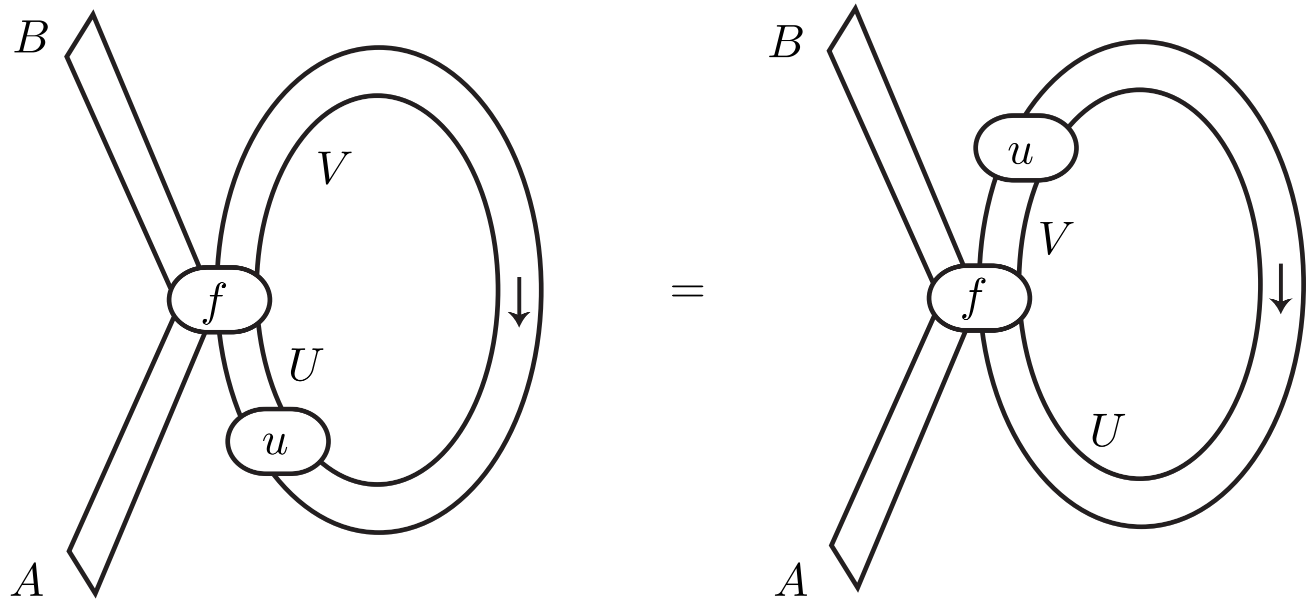
$\mathrm{Tr}^{U}_{A,B}$



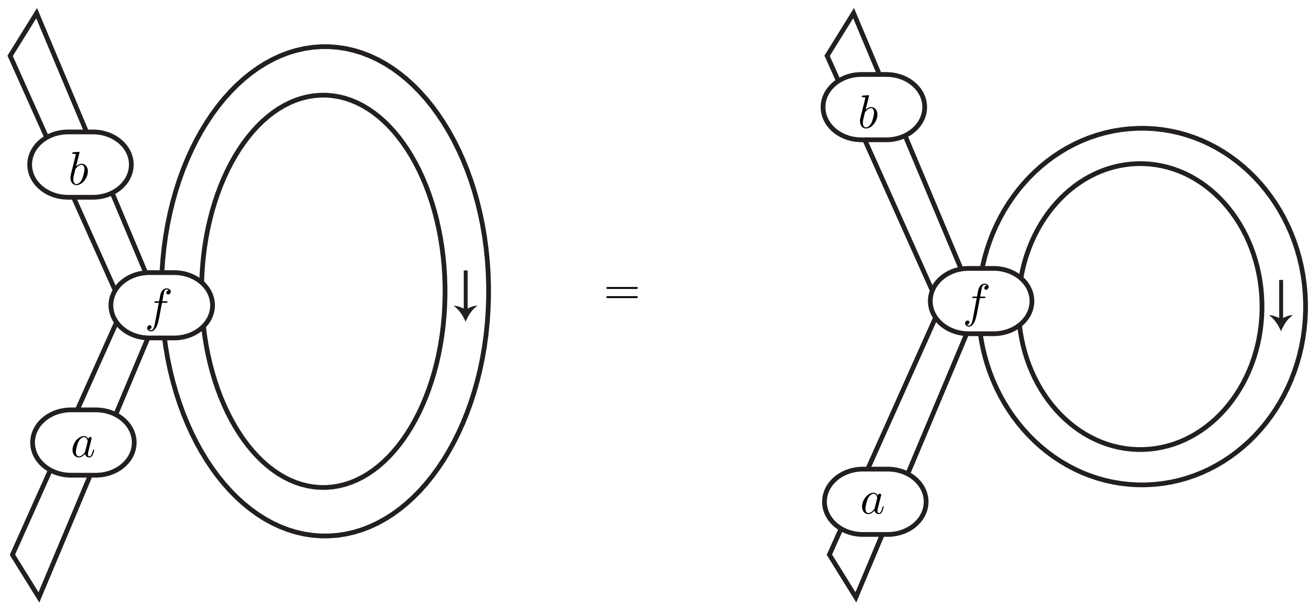
$=$



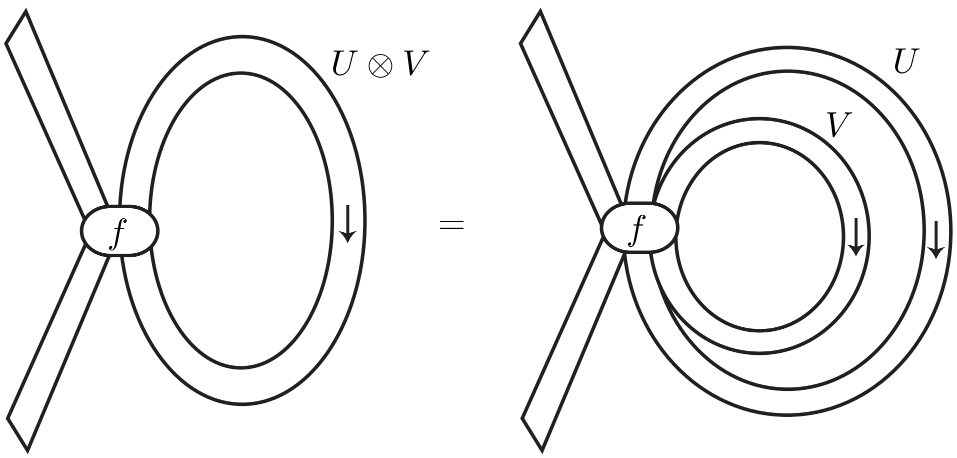
Glissade ou Sliding (naturalité en U)

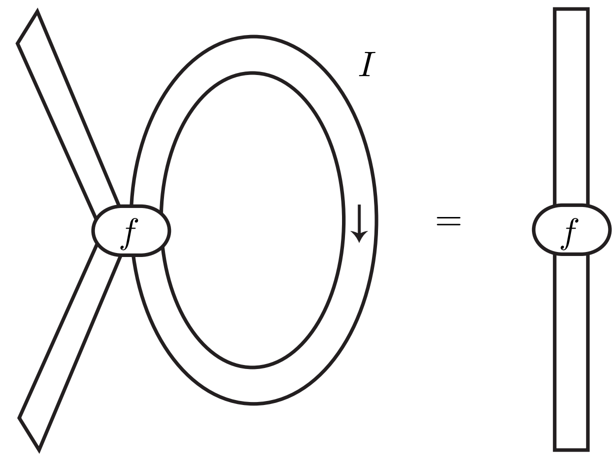


Serrement ou Tightening (naturalité en A, B)

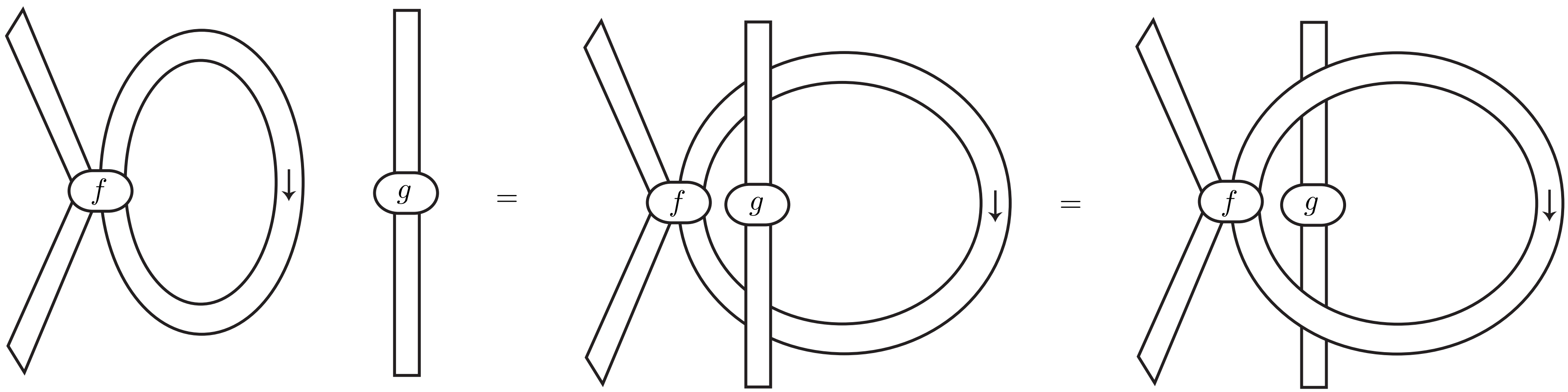


Disparition ou Vanishing (monoidalité en U)

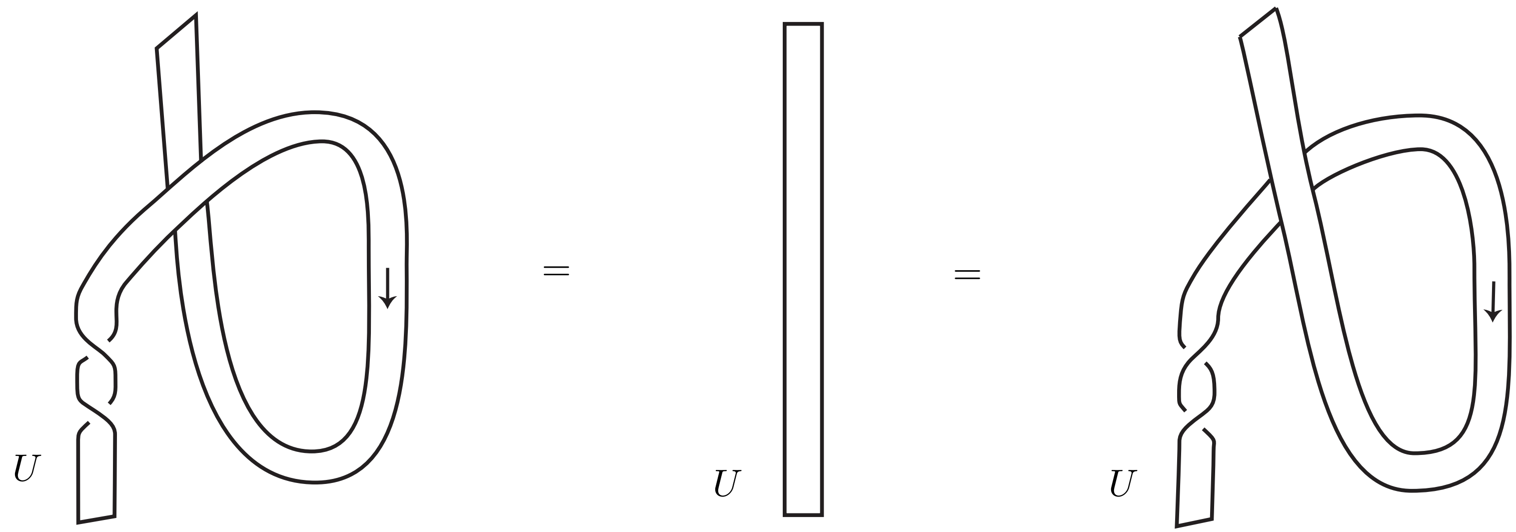




Superposition ou Superposing



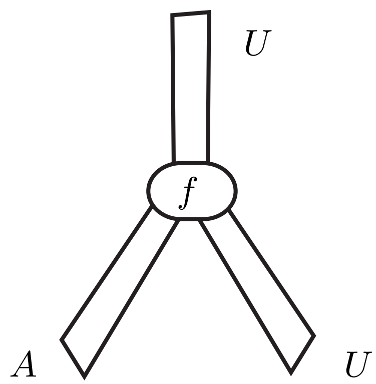
Yanking



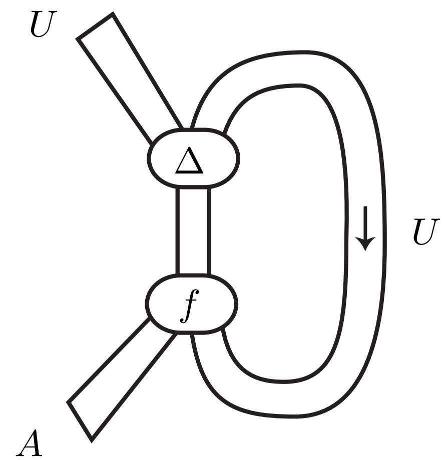
Traces = points fixes
(Hasegawa - Hyland 1997)

Dans les catégories cartésiennes:

Fix :

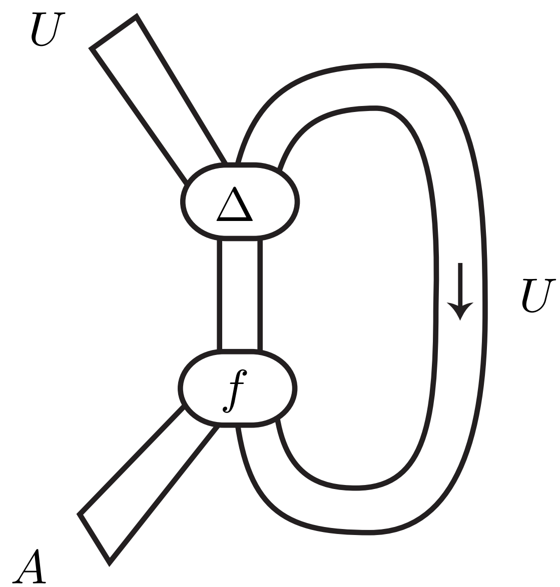


$\mapsto$

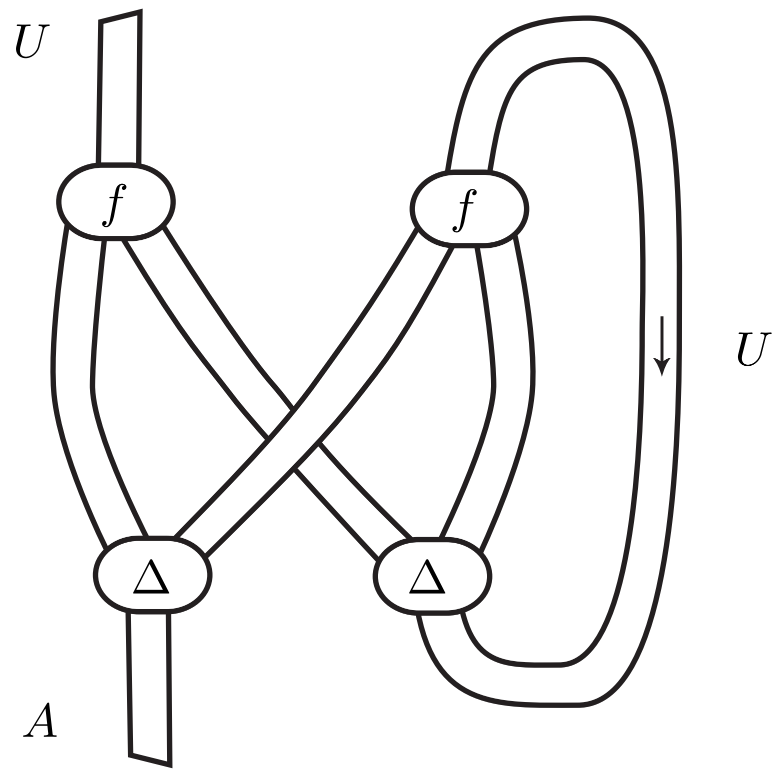


Un opérateur de point fixe au comportement adéquat

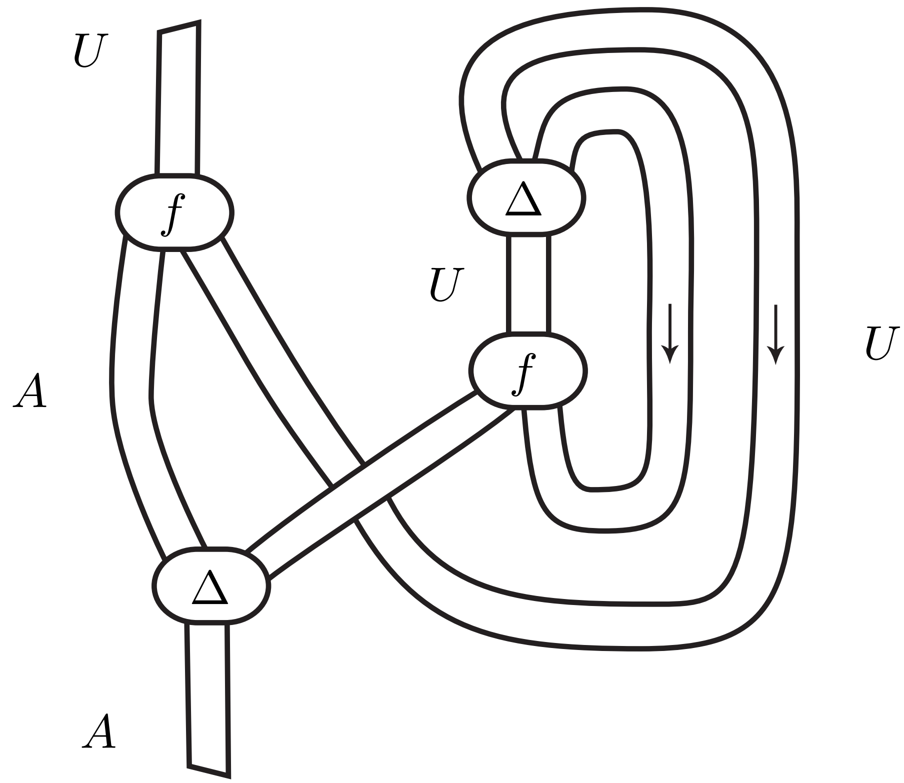
Traces = points fixes paramétrés (1)



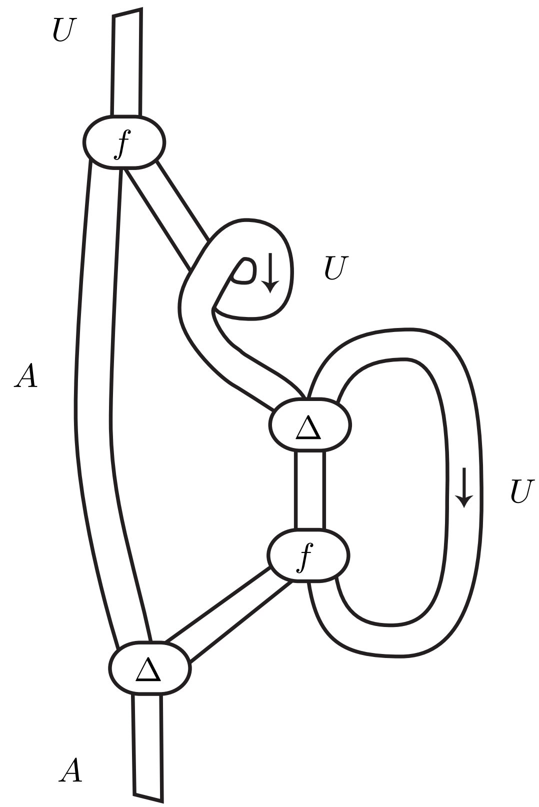
Traces = points fixes paramétrés (2)



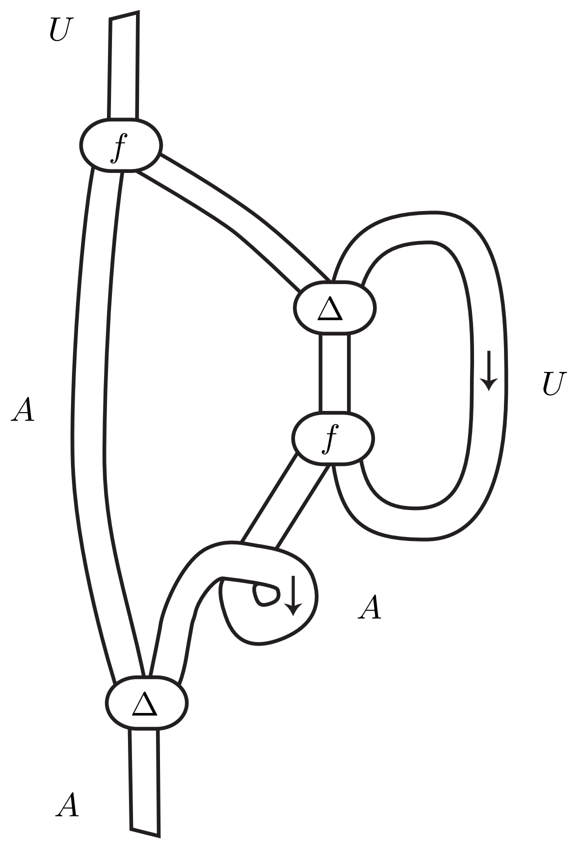
Traces = points fixes paramétrés (3)



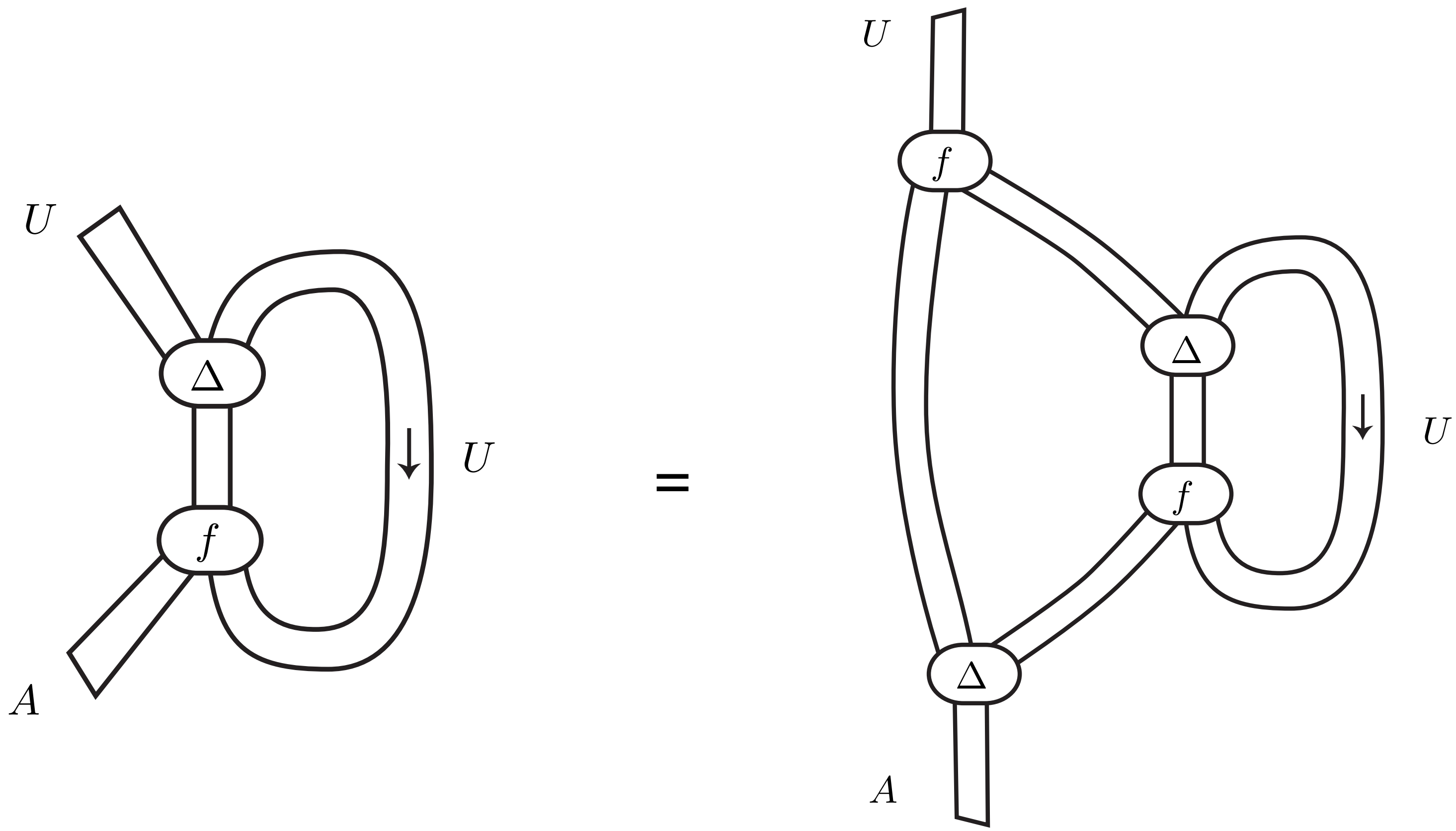
Traces = points fixes paramétrés (4)



Traces = points fixes paramétrés (5)



Traces = points fixes paramétrés (6)



Sixième partie

Illustration

Transport de trace

Sémantique catégorique de la logique linéaire

Une **adjonction monoïdale symétrique**

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{L} \arrow[ll, bend left, "M"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ cartésienne $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}$ monoïdale symétrique

$$! \quad = \quad L \circ M$$

Logique linéaire tressée

Une adjonction monoïdale **balancée**

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{L} \arrow[ll, bend left, "M"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ cartésienne

$\mathcal{L}$ monoïdale **balancée** fermée

$$! \quad = \quad L \circ M$$

Question initiale

Quand une trace dans la catégorie $\mathcal{L}$ se relève-t-elle en une trace dans la catégorie $\mathcal{M}$?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{L} \arrow[ll, bend left, "M"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\textbf{Observation:}\ \text{le foncteur } L \text{ est habituellement } \textbf{fidèle}.}$

On en déduit la question

Charactériser quand un foncteur balancé et **fidèle**

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

entre **catégories balancées** transporte une trace dans $\mathcal{D}$ en une trace dans $\mathcal{C}$.

Charactérisation

Il existe une trace dans $\mathcal{C}$ préservée par le foncteur F

$$\Longleftrightarrow$$

pour tous les objects A, B, U et morphismes

$$f \; : \; A \otimes U \longrightarrow B \otimes U$$

il existe un morphisme

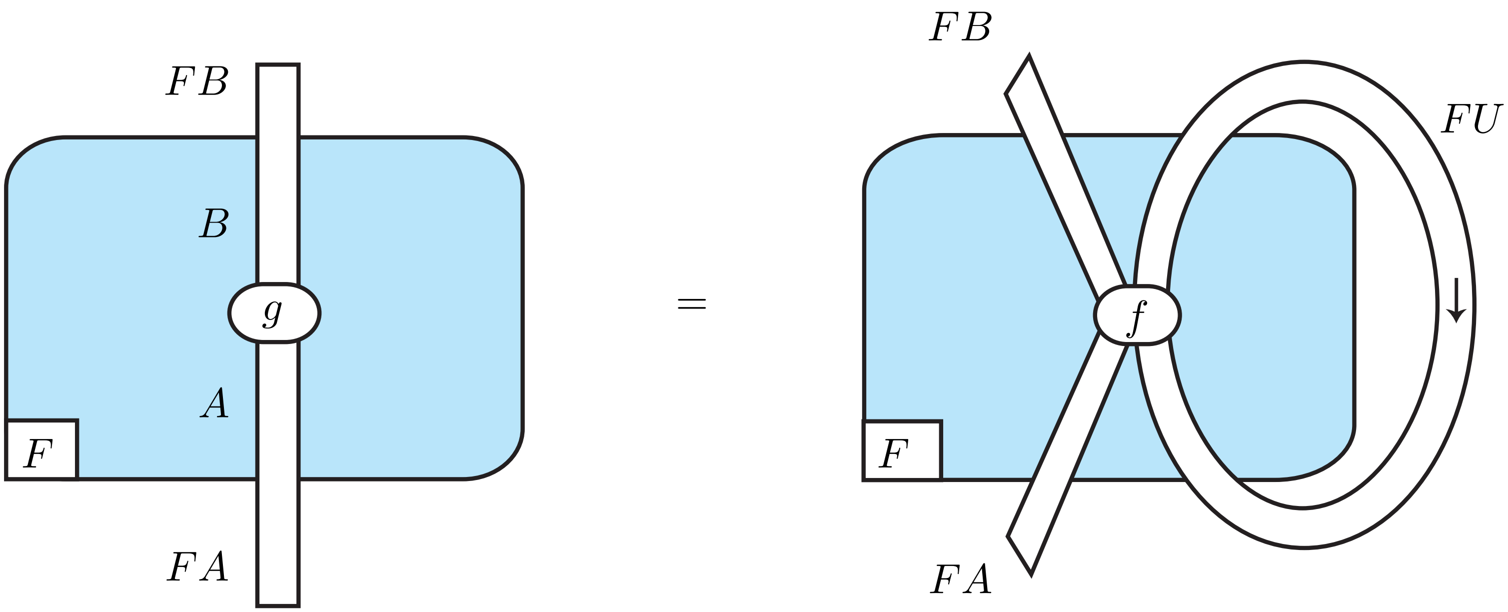
$$g : A \longrightarrow B$$

tel que

$$F(g) \;=\; \mathrm{Tr}^{FU}_{FA,FB}(m^{-1}_{[A,B]} \circ F(f) \circ m_{[A,B]})$$

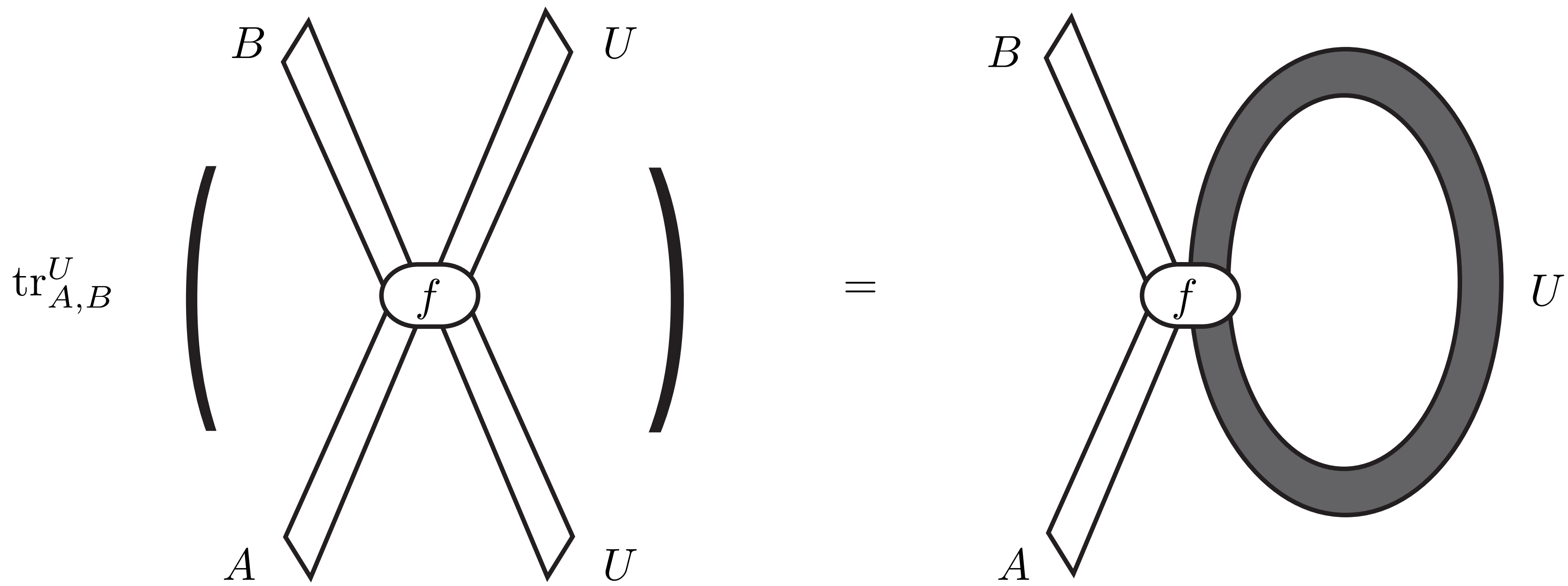
Graphiquement...

La dernière égalité se dessine comme suit:

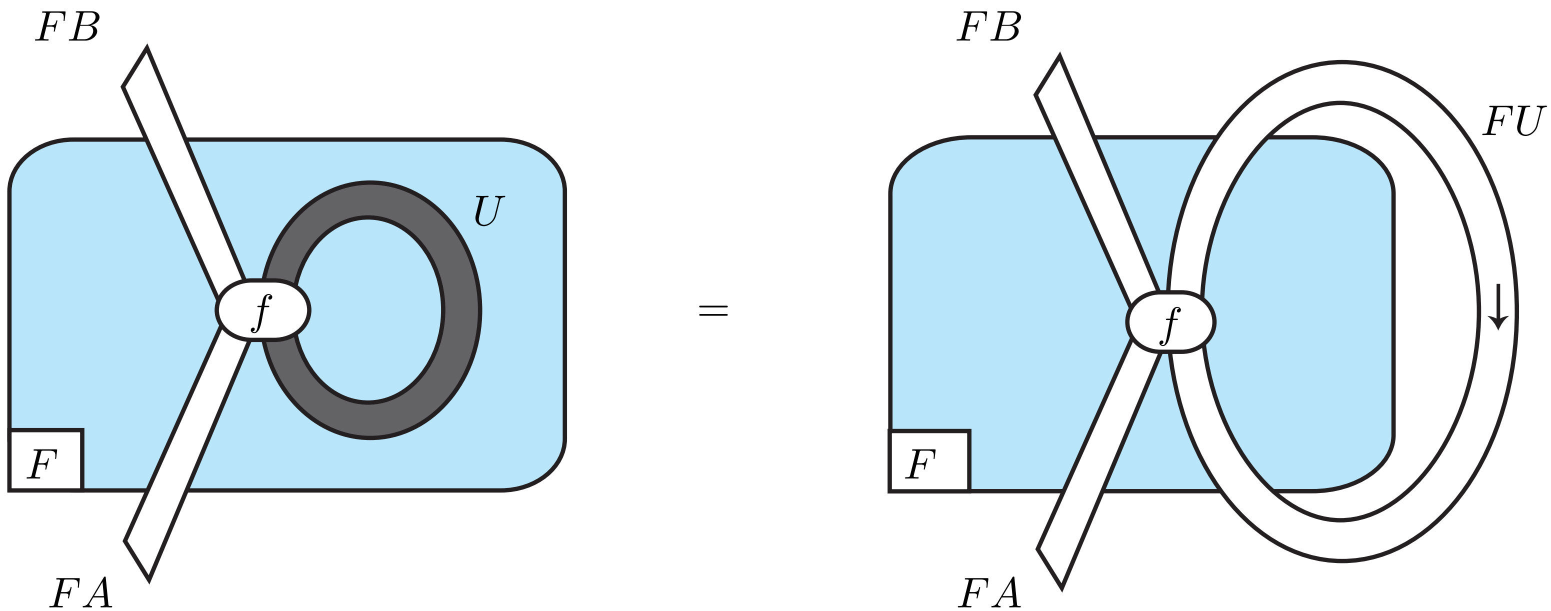


Esquisse de démonstration...

Première étape: définir l'opérateur



qui transporte tout morphisme f en le morphisme **unique** tel que



Deuxième étape: établir que tr vérifie les axiomes d'un opérateur de trace.

Illustration: glissade (1)

Nous voulons montrer que

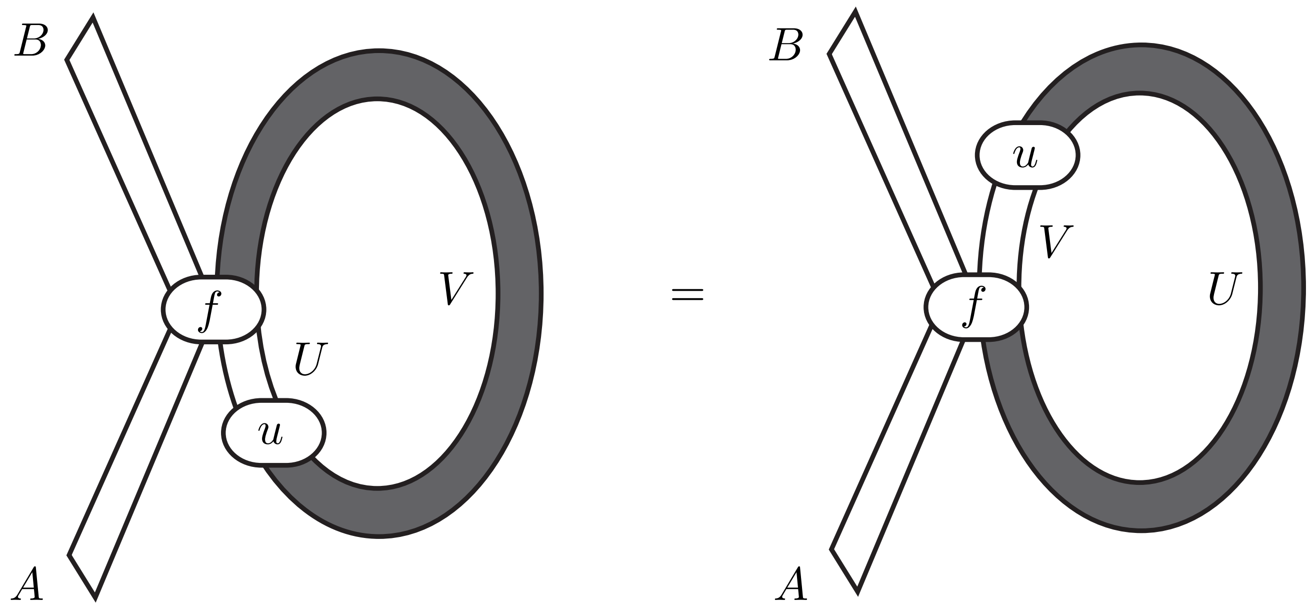


Illustration: glissade (2)

Parce que le foncteur F est **fidèle**, cela revient à

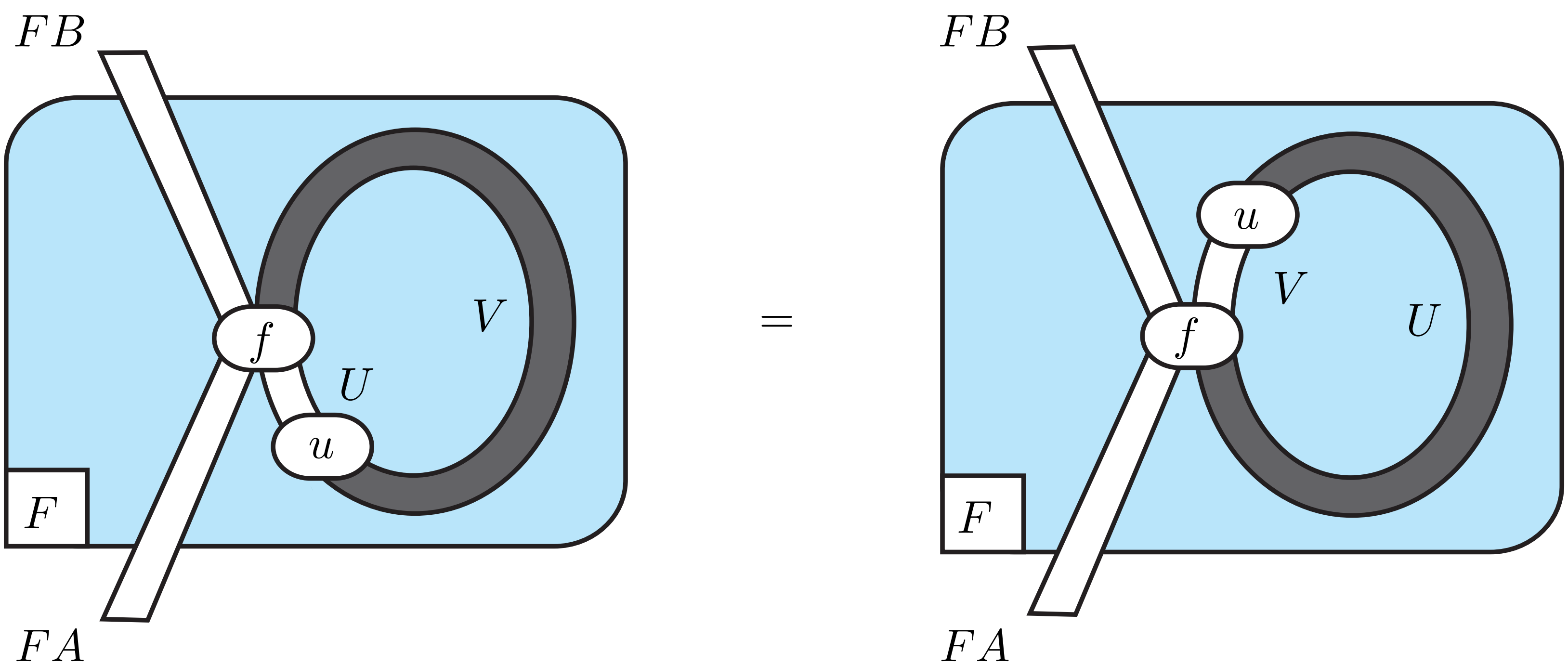


Illustration: glissade (3)

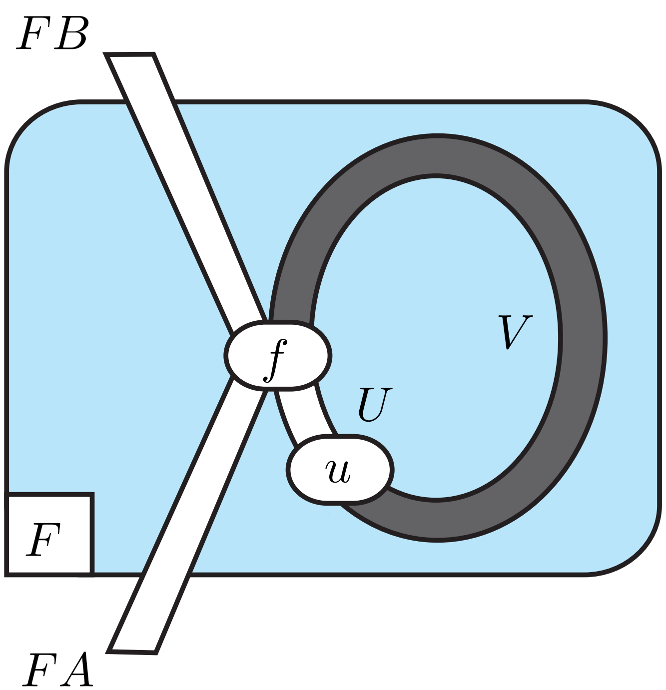


Illustration: glissade (4)

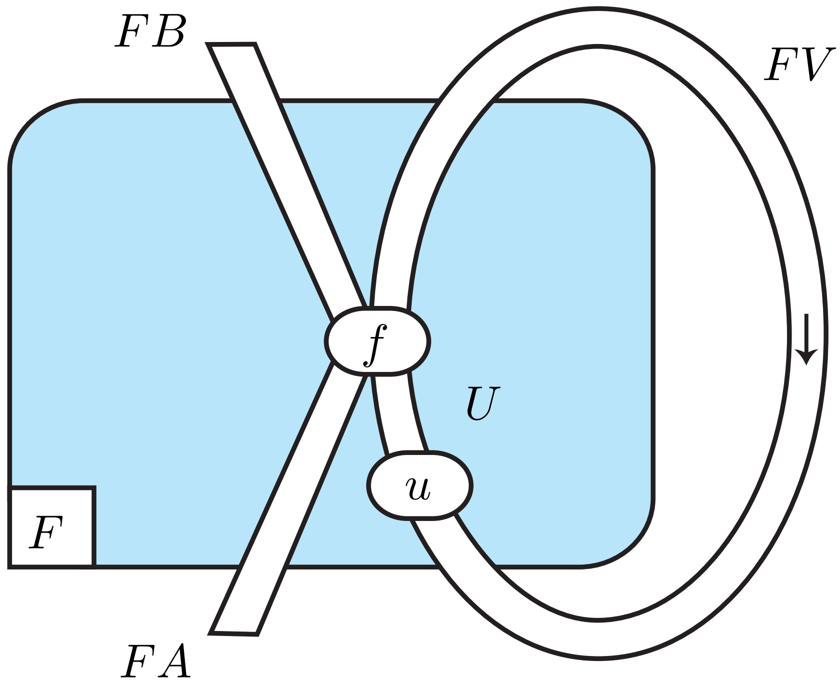


Illustration: glissade (5)

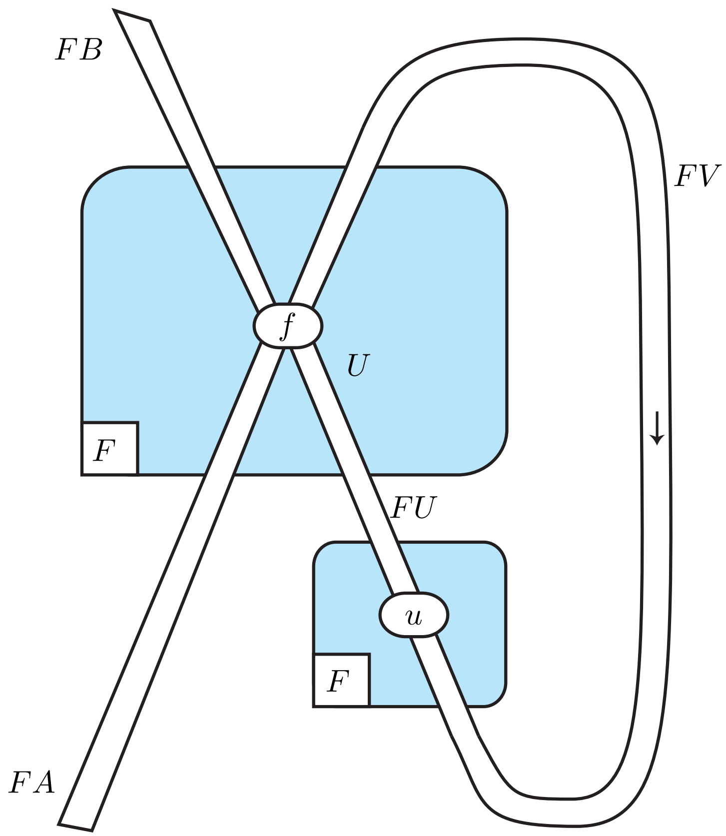


Illustration: glissade (6)

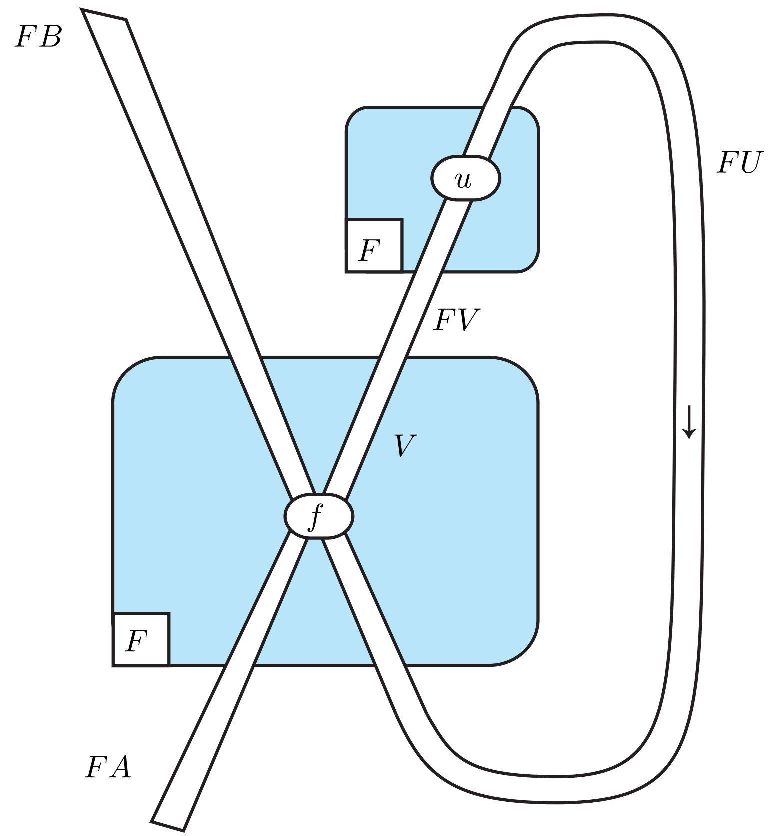


Illustration: glissade (7)

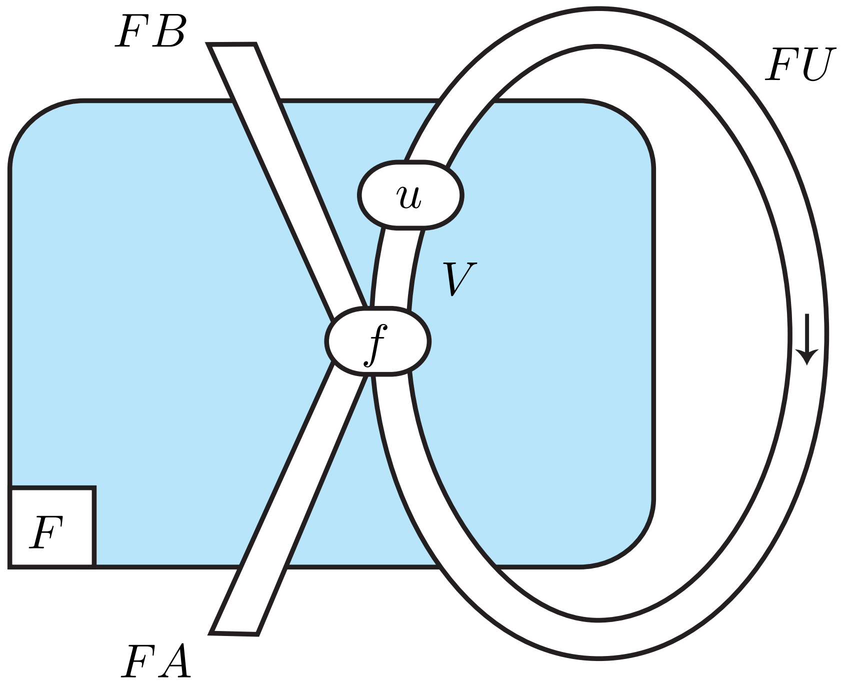
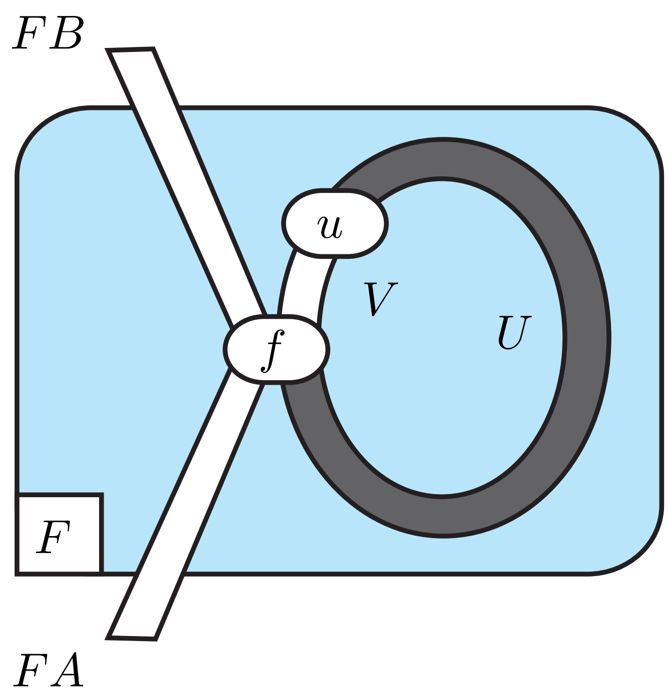


Illustration: glissade (8)



Exemple

- Le modèle relationnel de la logique linéaire
- Le modèle de sémantique des jeux de la logique tensorielle

Définit un opérateur de point fixe en sémantique des jeux

Septième partie

Illustration

Tressage