TD2 – Adjonctions

Samuel Mimram

8 octobre 2009

On rappelle qu'une *transformation naturelle* $\alpha : F \to G$ entre deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, est une famille de morphismes $\alpha_A : FA \to GA$ dans $\mathcal{D}$ appelés *composantes* de la transformation, indexée par les objets A de $\mathcal{C}$, telle que pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

Pour tout foncteur $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, on note $T\alpha : T \circ F \to T \circ G$ la transformation naturelle dont les composantes sont $T\alpha_A$ et, pour tout foncteur $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $\alpha_T : F \circ T \to G \circ T$ la transformation naturelle dont les composantes sont α_{TA}. Si $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to H$ sont deux transformations naturelles, on note $\beta \cdot \alpha : F \to H$ la transformation naturelle composée, dont les composantes sont $(\beta \cdot \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$.

1 Monade d'exception

On note $\mathbf{Ens}_*$ le catégorie dont les objets sont les *ensembles pointés*, c'est-à-dire les paires (A, a) où A est un ensemble et $a \in A$, et dont les morphismes $f : (A, a) \to (B, b)$ sont les fonctions $f : A \to B$ telles que $f(a) = b$. Ici, l'élément distingué d'un ensemble pointé sera vu comme une valeur particulière indiquant une erreur.

1. Décrivez le *foncteur d'oubli* $U : \mathbf{Ens}_* \to \mathbf{Ens}$ qui à un ensemble pointé associe l'ensemble sous-jacent.
2. Construisez un foncteur $F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}_*$ qui soit tel que les ensembles $\mathrm{Hom}(FA, B)$ et $\mathrm{Hom}(A, UB)$ soient isomorphes.
3. Montrez que les familles d'isomorphismes

   $$\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}(FA, B) \to \mathrm{Hom}(A, UB) \quad \text{et} \quad \psi_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, UB) \to \mathrm{Hom}(FA, B)$$

   que vous avez décrites à la question précédente sont naturels. Par « $\varphi_{A,B}$ est *naturelle* », on entend que pour tous morphismes $f : A \to A'$ dans $\mathbf{Ens}$ et $g : B \to B'$ and $\mathbf{Ens}_*$ le diagramme

   $$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(FA', B) \arrow[r, "\phi_{A',B}"] \arrow[d, "g\circ-\circ Ff"'] & \mathrm{Hom}(A', UB) \arrow[d, "Ug\circ-\circ f"] \\ \mathrm{Hom}(FA, B') \arrow[r, "\phi_{A,B'}"'] & \mathrm{Hom}(A, UB') \end{tikzcd}$$

   commute (dans $\mathbf{Ens}$). La naturalité de ψ étant définie de façon similaire.

   On appelle *adjonction* une telle paire de foncteurs $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ telle qu'il existe une bijection naturelle entre les ensembles $\mathrm{Hom}(FA, B)$ et $\mathrm{Hom}(A, UB)$, ce que l'on écrit parfois

   $$\frac{UA \to B}{A \to FB}$$

   Le foncteur F est alors appelé *adjoint à gauche de* U, ce que l'on note $F \dashv U$.
4. Décrivez une structure de monade sur le foncteur $U \circ F$. On rappelle qu'une *monade* est un endofoncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ muni de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$

telles que les diagrammes suivant commutent :

$$
\begin{tikzcd}
T \circ T \circ T \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] \\
T \circ T \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T \circ T \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

5. Soit $f : A \to B$ une fonction en OCaml pouvant lever une unique exception e (ici A et B sont des types quelconques) et $g : B \to C$ une fonction pouvant lever une unique exception e'. Construisez une fonction correspondant à la composée de f et g pouvant lever une unique exception e''.
6. On note $\mathbf{Ens}_T$ la catégorie dont les objets sont les objets de **Ens** et les morphismes $f : A \to B$ sont les morphismes $f : A \to TB$ de **Ens**, la composition de deux morphismes $f : A \to TB$ et $g : B \to TC$ étant définie par $g \circ f = \mu_C \circ Tg \circ f$ et les identités par $\mathrm{id}_A = \eta_A$. Vérifiez que les axiomes de catégorie sont satisfaits.
7. Donnez une description explicite de la catégorie $\mathbf{Ens}_T$.

2 Objets terminaux et produits par adjonctions

1. Montrez que la catégorie **Cat** admet un objet terminal **1**. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, montrez que le foncteur terminal $F : \mathcal{C} \to \mathbf{1}$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche) ssi la catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet terminal (resp. initial).
2. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, montrez que le foncteur diagonal $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a un adjoint à droite (resp. à gauche) ssi la catégorie $\mathcal{C}$ a les produits cartésiens (resp. les coproduits).

3 Monade de non-déterminisme

1. On notera **CMon** la catégorie des monoïdes commutatifs. Décrivez le foncteur d'oubli $U : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un monoïde commutatif sur l'ensemble sous-jacent. Le foncteur U est souvent appelé *foncteur d'oubli*, car il « oublie » la structure de monoïde sur un ensemble.
2. Donnez une description explicite du monoïde commutatif librement engendré par un ensemble.
3. Construisez un foncteur $F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{CMon}$ qui envoie un ensemble sur le monoïde libre engendré par cet ensemble.
4. Montrez que F est adjoint à gauche à U.
5. Définissez une structure de monade sur le foncteur $U \circ F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}$.
6. Décrivez la catégorie $\mathbf{Ens}_T$ et expliquez pourquoi on peut voir ses morphismes comme des programmes non-déterminstes.

4 Monades engendrées par une adjonction

1. On rappelle qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à gauche à un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe deux transformations naturelles

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F \quad \text{et} \quad \varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

appelées respectivement *unité* et *counité* de l'adjonction, telles que

$$\varepsilon_F \cdot F\eta = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad G\varepsilon \cdot \eta_G = \mathrm{id}_G$$

Donnez les transformations naturelles correspondant aux adjonctions des Parties 1 et 3.
2. Rappelez la représentation par *diagrammes de corde* des lois ci-dessus, ainsi que celle des lois définissant les monades.
3. Étant donnée une adjonction $(F, G, \eta, \varepsilon)$, montrez que le foncteur $G \circ F$ peut être muni d'une structure de monade.
4. Décrivez les monades associées aux adjonctions des Parties 1 et 3.
5. Montrez la propriété évoquée à la question 1.