TD4 – Catégories cartésiennes fermées

Samuel Mimram

22 octobre 2009

1 Catégories cartésiennes fermées

On rappelle qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est *cartésienne fermée* lorsqu'elle a les produits finis et que pour tout objet B de $\mathcal{C}$, le foncteur $- \times B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet un adjoint à droite noté $(-)^B$; c'est-à-dire qu'il existe une bijection $\mathcal{C}(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(A, C^B)$ naturelle en A et C.

1. Montrez que la catégorie **Ens** est cartésienne fermée.
2. Décrivez l'unité et la counité de l'adjonction définissant la clôture. Vérifiez que les deux lois reliant unité et counité d'une adjonction sont satisfaites.
3. Montrez que la catégorie **Cat** est cartésienne fermée.

2 λ-calcul simplement typé

On rappelle la syntaxe des λ-termes avec produits :

$$M \quad ::= \quad x \quad | \quad \lambda x.M \quad | \quad MM \quad | \quad (M,M) \quad | \quad \pi_1 \quad | \quad \pi_2 \quad | \quad ()$$

ainsi que celle des types :

$$A \quad ::= \quad a \quad | \quad A \times A \quad | \quad ()$$

On considérera les λ-termes modulo α-conversion (renommage des variables liées). On rappelle par ailleurs les règles de typage des λ-termes :

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash () : 1}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash (M,N) : A \times B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M : A_i}$$

où les contextes Γ sont des ensembles. Les règles de β-conversion sont définies par

$$(\lambda x.M)N \equiv_\beta M[N/x] \qquad \pi_i(M_1, M_2) \equiv_\beta M_i$$

et celles de η-conversion par

$$\lambda x.Mx \equiv_\eta M \qquad (\pi_1 M, \pi_2 M) \equiv_\eta M \qquad M \equiv_\eta () \text{ si } M \text{ est de type } 1$$

1. On veut rendre explicites la manipulations du contexte. Quelles règles doit-on ajouter si l'on veut obtenir un systèmes de déduction équivalent dont la règle axiome a été remplacée par

   $$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

   et dont les contextes sont des listes (et non plus des ensembles) ?
2. Définissez l'opération de substitution $M[N/x]$ par induction sur la structure du terme M.

3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cartésienne close. On suppose fixée une fonction $[\![-]\!]$ qui à tout type A associe un objet $[\![A]\!]$ telle que $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$ et $[\![A \Rightarrow B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$. Définissez l'interprétation d'un séquent

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$$

comme un morphisme

$$[\![M]\!] : [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!] \to [\![A]\!]$$

de sorte que cette interprétation soit invariante par les équivalence β et η (si $M \equiv_{\beta\eta} N$ alors $[\![M]\!] = [\![N]\!]$).

4. Réciproquement, expliquez comment construire une catégorie Λ dont les objets sont les types et les morphismes sont les λ-termes. Vérifiez que cette catégorie est cartésienne close.

3 Théorème du paramètre

1. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ la catégorie obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en “inversant le sens des flèches”, i.e. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A, B) \cong \mathcal{C}(B, A)$. Expliquez comment l'opération $\mathrm{Hom}(-, -)$ peut être étendue en un foncteur $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$.
2. Supposons que $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ soit un foncteur admettant un adjoint à droite $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Écrivez la condition que doit satisfaire une transformation naturelle ϕ entre les foncteurs $\mathrm{Hom}(F-, -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ et $\mathrm{Hom}(-, G-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$.
3. *Théorème du paramètre.* Dans la suite on admettra le théorème suivant : si $\mathcal{C}$ est une catégorie cartésienne close, la famille de foncteurs $(-)^B$ indexée par B définit un unique foncteur $(-)^- : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ telle que les bijections $\mathcal{C}(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(A, C^B)$ soient naturelles en A, B et C. Explicitez la condition de naturalité.