Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Ecole Normale Supérieure

Plan de la séance

1 – Diagrammes de cordes

2 – Adjonctions

Première partie

Diagrammes de cordes

Une notation topologique pour les 2-cellules

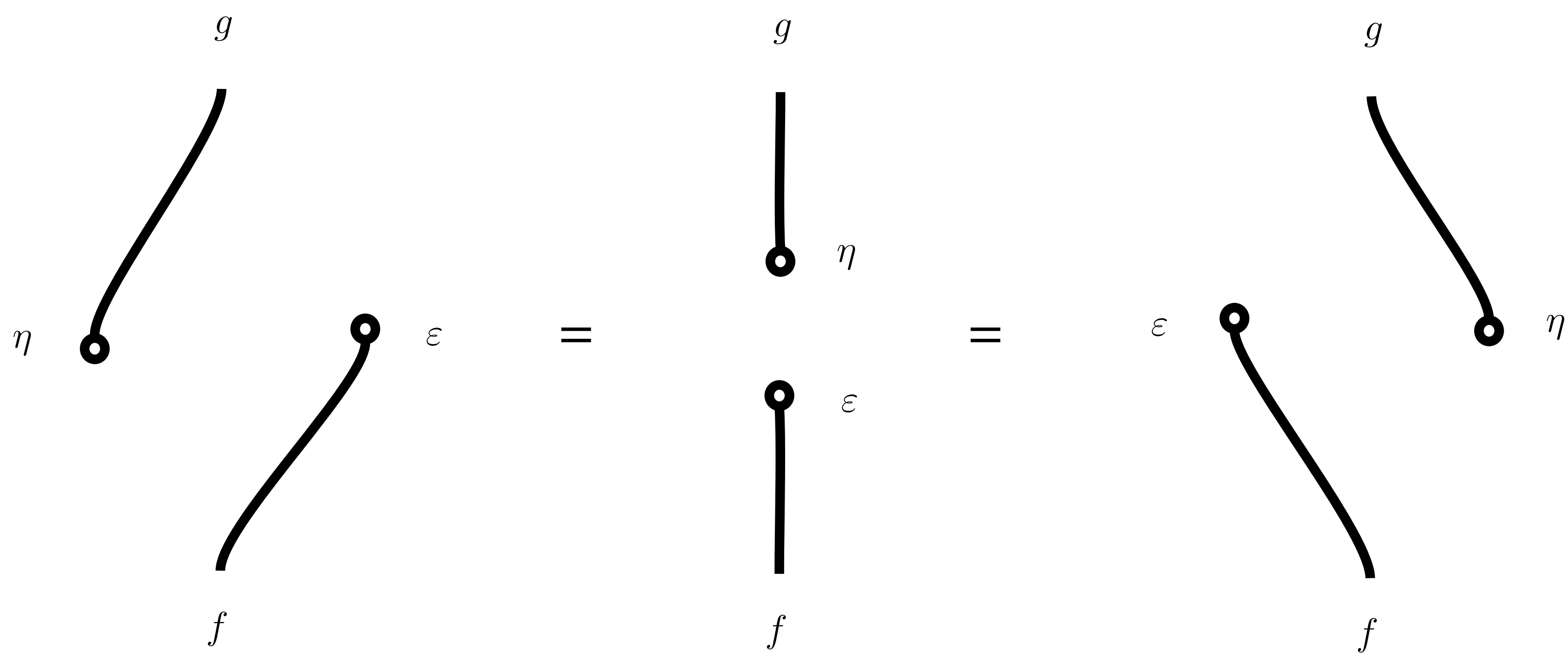
Exemple

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "id" description] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow \varepsilon"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] \arrow[rr, bend left=70, "f"] \arrow[rr, bend right=70, "g"'] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "id"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] \arrow[rr, bend left=70, "f"] \arrow[rr, bend right=70, "g"'] & \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "id"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
$$

Ces trois cellules sont égales dans toute 2-catégorie...

Diagrammes de corde



Une représentation topologique obtenue par dualité de Poincaré

Deuxième partie

Adjonctions et monades

Adjonction

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories.

Une **adjonction** est un triplet (L, R, ϕ) où L et R sont deux foncteurs

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad\qquad R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et ϕ est une famille de bijections, pour tout couple d'objets A dans $\mathcal{A}$ et B dans $\mathcal{B}$,

$$\phi_{A,B} : \mathcal{B}(LA, B) \;\cong\; \mathcal{A}(A, RB)$$

naturelle en A et B. On écrit aussi:

$$\frac{LA \longrightarrow_{\mathcal{B}} B}{A \longrightarrow_{\mathcal{A}} RB} \quad \phi_{A,B}$$

Dans ce cas, on dit que L **est adjoint à gauche de** R, et on écrit $L \dashv R$.

La version 2-dimensionnelle d'isomorphisme.

La bijection ϕ est naturelle signifie ici...

Naturelle en A et B signifie que la famille de bijections $\phi_{A,B}$ transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} LA \arrow[r, "g"] & B \arrow[d, "h_B"] \\ LA' \arrow[u, "Lh_A"] \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_{A,B}(g)"] & RB \arrow[d, "Rh_B"] \\ A' \arrow[u, "h_A"] \arrow[r, "\phi_{A',B'}(f)"'] & RB' \end{tikzcd}$$

Exemple: espace vectoriel libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Ens} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Vect} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Ens}$	:	la catégorie des ensembles et fonctions,
$\mathcal{B} = \mathbf{Vect}$	:	la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k
R	:	le foncteur « d'oubli » $\quad V \mapsto U(V)$
L	:	le foncteur « libre » $\quad X \mapsto kX$

$$kX \quad := \quad \left\{ \quad \sum_{x \in X} \lambda_x \ x \quad \middle| \quad \lambda_x \in k \text{ presque partout nul.} \quad \right\}$$

Exemple: algèbre libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Alg} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Vect}$	:	la catégorie des espaces vectoriels
$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$	:	la catégorie des algèbres et morphismes d'algèbres,
R	:	le foncteur « d'oubli » $A \mapsto U(A)$.
L	:	le foncteur « libre » $V \mapsto TV$.

$$TV \quad := \quad \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

Définition d'une algèbre de Lie

Espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'un crochet de Lie

Anti-symétrie:

$$[x, y] = -[y, x]$$

Identité de Jacobi:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Exemple: l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur une variété lisse.

Exemple: algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Lie} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Alg} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Lie}$	:	la catégorie des algèbres de Lie,
$\mathcal{B} = \mathbf{Alg}$	:	la catégorie des algèbres,
R	:	équipe A du crochet de Lie $[a,b] = ab - ba$,
L	:	le foncteur « algèbre enveloppante » $\mathfrak{g} \mapsto U(\mathfrak{g})$.

$$U(\mathfrak{g}) \quad := \quad T\mathfrak{g} \ / \ I(\mathfrak{g})$$

où $I(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère engendré par $ab - ba - [a,b]$.

Exemple: catégorie libre

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Graph} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbf{Cat} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathbf{Graph}$	:	la catégorie des graphes,
$\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$	:	la catégorie des catégories et foncteurs,
R	:	le foncteur « d'oubli »,
L	:	le foncteur « libre ».

Exemple : objet terminal

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathbb{1} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathbb{1}$	:	la catégorie singleton,
R	:	le foncteur dont l'image est l'objet terminal 1,
L	:	le foncteur canonique (et unique).

Exemple : catégorie cartésienne

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[ll, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$	:	le produit cartésien de $\mathcal{C}$ avec elle-même,
R	:	le foncteur produit cartésien $(A, B) \mapsto A \times B$,
L	:	le foncteur diagonal $A \mapsto (A, A)$.

Rappel: produit cartésien

Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie $\mathcal{C}$, est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] \arrow[r, "h"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Exercice. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près.

Exemple : catégorie avec limites

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "L"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \arrow[ll, bend left, "R"]
\end{tikzcd}
$$

où

$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	:	toute catégorie dotée d'un objet terminal 1,
$\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$	:	la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ des transformations naturelles de la catégorie d'indice $\mathcal{J}$ dans la catégorie $\mathcal{C}$,
R	:	le foncteur limite $F \mapsto \mathbf{lim}_{j \in \mathcal{J}} F(j)$,
L	:	le foncteur diagonal $A \mapsto (j \mapsto A)$.

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "{[A]}"] \arrow[dr, bend right, "{[B]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
 & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \overset{\phi_{A,B}}{\longmapsto} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \\
\mathbb{1} \arrow[ur, bend left, "{[A]}"] \arrow[dr, bend right, "{[B]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\
 & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}$$

Ici, un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans la catégorie $\mathcal{C}$
vu comme une transformation naturelle $[X] \longrightarrow [Y]$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "{[X]}"] \arrow[rr, bend right, "{[Y]}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[d, "L"] \\
\mathbb{1} \arrow[ru, bend left, "A"] \arrow[rd, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\qquad \overset{\phi_{A,B}}{\longmapsto} \qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \\
\mathbb{1} \arrow[ru, bend left, "A"] \arrow[rd, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{B} \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Ici, un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans la catégorie $\mathcal{C}$
vu comme une transformation naturelle $X \longrightarrow Y$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:

La bijection ϕ est naturelle en les transformations naturelles α et β.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] & & & & \mathcal{A} \\
\mathbb{1} \arrow[r, dotted] \arrow[rru, bend left=50, "A'"] \arrow[rrd, bend right=50, "B'"'] \arrow[ru, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbb{1} \arrow[ru, dotted, "A"] \arrow[rd, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & {} \arrow[rr, phantom, "\overset{\phi_{A',B'}}{\longmapsto}"] & & \mathbb{1} \arrow[r, dotted] \arrow[rru, bend left=50, "A'"] \arrow[rrd, bend right=50, "B'"'] \arrow[ru, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbb{1} \arrow[ru, dotted, "A"] \arrow[rd, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & {} \\
 & & \mathcal{B} & & & & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Adjonction dans la 2-catégorie $\mathbf{Cat}$

Ce point de vue 2-catégorique débouche sur une définition plus satisfaisante d'adjonction:

Une bijection ϕ entre les transformations naturelles

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "A"] \arrow[dr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd} \quad \xmapsto{\phi_{A,B}} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "A"] \arrow[dr, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \\ & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"'] \end{tikzcd}$$

Condition de naturalité 2-dimensionnelle

On reformule la condition de naturalité comme suit:

La bijection ϕ est naturelle en les transformations naturelles α et β.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \arrow[dd, "L"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left, "A'"] \arrow[drr, bend right, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \\
 & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
\quad \overset{\phi_{A',B'}}{\longmapsto} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A} \\
\mathcal{D} \arrow[r, dotted] \arrow[urr, bend left, "A'"] \arrow[drr, bend right, "B'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "A"] \arrow[dr, dotted, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \\
 & & \mathcal{B} \arrow[uu, "R"']
\end{tikzcd}
$$

Présentation algébrique de l'adjonction

Une **adjonction** est un quadruplet $(L, R, \eta, \varepsilon)$ où L et R sont des foncteurs

$$L \quad : \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \qquad\qquad R \quad : \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

et η et ε des transformations naturelles:

$$\eta \quad : \quad Id_{\mathcal{A}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} RL \qquad\qquad \varepsilon \quad : \quad LR \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} Id_{\mathcal{B}}$$

telles que les deux composés soient les identités (de L et R respectivement).

$$R \xrightarrow{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R \qquad\qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon F} L$$

On dessine cette situation de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend left, "Id_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{B} \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend right, "Id_{\mathcal{B}}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Définition duale (mais équivalente) d’adjonction

Par dualité, la donnée d’une bijection ψ entre les ensembles de 2-cellules

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dd, "L"'] \arrow[dr, bend left, "A"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{B} \arrow[ur, bend right, "B"'] &
\end{tikzcd}
\quad \xmapsto{\psi_{A,B}} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[dr, bend left, "A"] & \\
{} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{B} \arrow[uu, "R"] \arrow[ur, bend right, "B"'] &
\end{tikzcd}
$$

bijection qu’on demande naturelle en A et B.

Exemple: dualité dans une catégorie monoïdale

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ une catégorie monoidale.

Un objet A est dual à gauche d'un objet B lorsqu'il existe deux morphismes

$$\eta \quad : \quad e \longrightarrow B \otimes A \qquad\qquad \varepsilon \quad : \quad A \otimes B \longrightarrow e$$

tels que

$$A \xrightarrow{A \otimes \eta} A \otimes B \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes A} A \quad = \quad A \xrightarrow{id_A} A$$

et

$$B \xrightarrow{\eta \otimes B} B \otimes A \otimes B \xrightarrow{B \otimes \varepsilon} B \quad = \quad B \xrightarrow{id_B} B$$

A est dual à gauche à B dans $\mathcal{C}$ ssi A est adjoint à gauche à B dans $\Sigma\mathcal{C}$.

Exemple: adjonctions dans la 2-catégorie $\mathscr{Rel}$

On peut appliquer la notion d'adjonction dans toute 2-catégorie.

Ainsi, toute adjonction dans $\mathscr{Rel}$ est de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & B \arrow[l, bend left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

où

$$A \xrightarrow{f} B$$

est une fonction ensembliste, et

$$\begin{array}{ccccccc} f_* & = & \{ & (a,b) & \mid & a = f(b) & \} \\ f^* & = & \{ & (b,a) & \mid & b = f(a) & \} \end{array}$$

De plus,

l'unité η est inversible	ssi	f est injective.
la counité ε est inversible	ssi	f est surjective.

Propriété

Supposons donnés deux morphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "L_1"] \arrow[r, bend right, "L_2"'] & B \end{tikzcd}$$

dans une 2-catégorie $\mathscr{D}$, adjoints à deux morphismes R_1 et R_2:

$$L_1 \dashv R_1 \qquad\qquad L_2 \dashv R_2$$

Dans ce cas, toute cellule 2-dimensionnelle

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, "L_1"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "L_2"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \theta"] \end{tikzcd}$$

définit une cellule 2-dimensionnelle

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, bend right=50, "R_1"'{name=U}] \arrow[l, bend left=50, "R_2"{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Uparrow \theta^*"] \end{tikzcd}$$

Exercice: définir l'opération $\theta \mapsto \theta^*$ en diagramme de cordes,
et montrer que l'opération est fonctorielle, au sens où $(\theta_1 *_v \theta_2)^* = \theta_2^* *_v \theta_1^*$.