

Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Novembre 2009

Plan de la séance

- 1 – Lambda-calcul avec effets
- 2 – Théorie formelle des monades
- 3 – Monades fortes

Première partie

Lambda-calcul avec effets

Un langage avec effets de bord

Lambda-calcul avec effets

Une notion de type étendue:

$$A, B ::= \alpha \mid A \rightarrow B \mid A \times B \mid T(A).$$

Deux nouvelles formes de séquents:

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

qui signifie que P et Q sont égaux et de type A , et

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

qui signifie que P est sans effet de bord et de type A .

Conditions de bonne formation

A noter les conditions de bonne formation suivantes:

1. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

ne peut être valide que si les séquents

$$\Gamma \vdash P : A \quad \text{et} \quad \Gamma \vdash Q : A$$

sont valides.

2. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

ne peut être valide que si le séquent

$$\Gamma \vdash P : A$$

est valide.

Lambda-calcul avec effets

Variable	$\frac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightarrow B}$
Application	$\frac{\Gamma \vdash P : A \rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$
Contraction	$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

Lambda-calcul avec effets

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1 P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2 P : B}$$

Unité

$$\overline{\Gamma \vdash * : 1}$$

Lambda-calcul avec effets

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash \text{let } x = P \text{ in } Q : B}$$

$$[-] \quad \frac{\Gamma \vdash P : A}{\Gamma \vdash [P] : TA}$$

$$\mu \quad \frac{\Gamma \vdash P : TA}{\Gamma \vdash \mu(P) : A}$$

Règles générales

$$\overline{x : A \vdash x \downarrow A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P : B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P \downarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] \downarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P_1 \equiv P_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash P_1[x := Q] \equiv P_2[x := Q] : B}$$

Règles pour la substitution

$$\Gamma \vdash \text{let } x = P \text{ in } x \equiv P : A$$

$$\Gamma \vdash \text{let } x_2 = (\text{let } x_1 = Q_1 \text{ in } Q_2) \text{ in } P \equiv \text{let } x_1 = Q_1 \text{ in } (\text{let } x_2 = Q_2 \text{ in } P) : A$$

lorsque la variable x_1 n'est pas libre dans P .

$$\Gamma \vdash \text{let } x_1 = x_2 \text{ in } P \equiv P[x_1 := x_2] : A$$

$$\Gamma \vdash P\vec{Q} \equiv \text{let } \vec{x} = \vec{Q} \text{ in } P\vec{x} : A$$

Règles pour les types calculatoires

$$\Gamma \vdash [P] \downarrow TA$$

$$\Gamma \vdash \mu([P]) \equiv P : A$$

$$x : A \vdash [\mu(x)] \equiv x : TA$$

Règles pour l'unité

$$\vdash * \downarrow 1$$

$$x:1 \vdash * \equiv x : 1$$

Règles pour le produit cartésien

$$x : A, y : B \vdash \langle x, y \rangle \downarrow A \times B$$

$$\Gamma, x : A \vdash \langle P, Q \rangle \equiv \text{let } x, y = P, Q \text{ in } \langle x, y \rangle : A \times B$$

$$x : A_1 \times A_2 \vdash \pi_i(x) \downarrow A_i$$

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2 \vdash \pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) \equiv x_i : A_i$$

$$x : A \times B \vdash \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \equiv x : A \rightarrow B$$

Règles pour le λ -calcul

$$\Gamma \vdash (\lambda x.P) \downarrow A \rightarrow B$$

$$\Gamma, x:A \vdash (\lambda x.P)x \equiv P : B$$

$$x:A \rightarrow B, y:A \vdash \lambda y.xy \equiv x : A \rightarrow B$$

Deuxième partie

Théorie formelle des monades

Catégorie de Kleisli, catégorie d'Eilenberg-Moore

Monade formelle

Soit A une 0-cellule dans une 2-catégorie \mathcal{B} .

Une monade s sur la 0-cellule A est une 1-cellule

$$s : A \longrightarrow A$$

munie d'une multiplication

$$\mu : s \circ s \Rightarrow s : A \longrightarrow A$$

et d'une unité

$$\eta : Id_A \Rightarrow s : A \longrightarrow A$$

satisfaisant les lois d'associativité et d'unité.

Autrement dit, une monade s est un monoïde de la catégorie monoïdale $\mathcal{B}(A, A)$.

Toute adjonction définit une monade

(démonstration graphique)

Algèbre

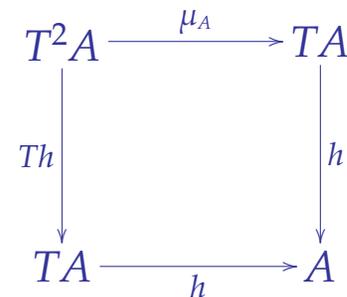
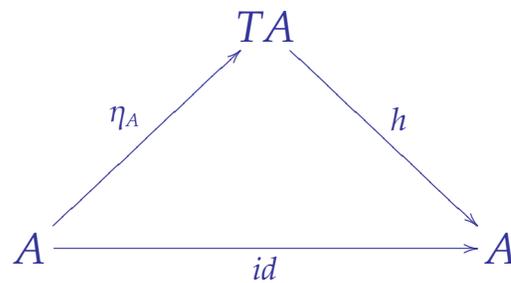
Une algèbre de la monade (T, μ, η) est une paire (A, h) constituée

— d'un objet A morphisme

— d'un morphisme

$$h : TA \longrightarrow A$$

faisant commuter



Morphismes d'algèbre

Un morphisme d'algèbre

$$f : (A, h_A) \longrightarrow (B, h_B)$$

est un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

entre les objets sous-jacents dans la catégorie \mathcal{C} , tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ h_A \downarrow & & \downarrow h_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commute.

Catégorie de Kleisli

La catégorie de Kleisli \mathcal{C}_T d'une monade (T, μ, η) sur une catégorie \mathcal{C} a

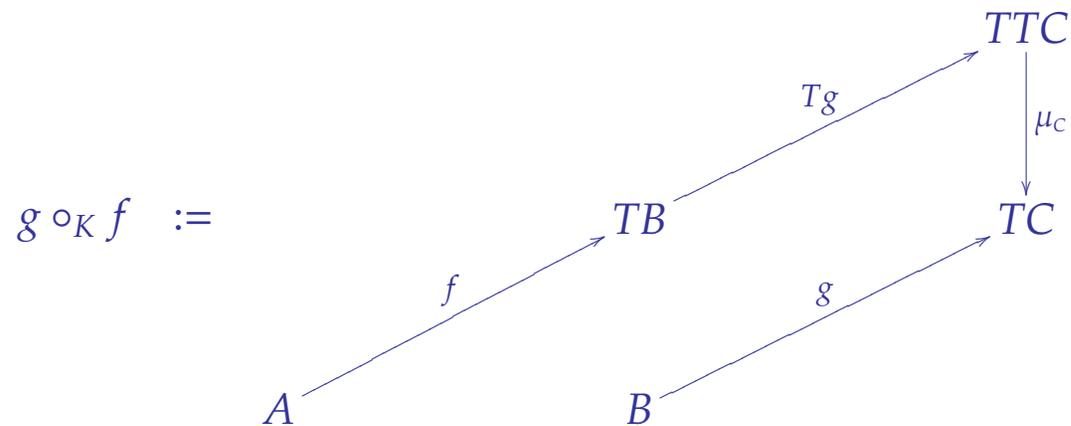
— pour objets les objets de \mathcal{C} ,

— pour morphismes $A \rightarrow B$ les morphismes de $A \rightarrow TB$ dans la catégorie \mathcal{C} ,

Les identités $A \rightarrow A$ sont données par les morphismes

$$\eta_A : A \rightarrow TA.$$

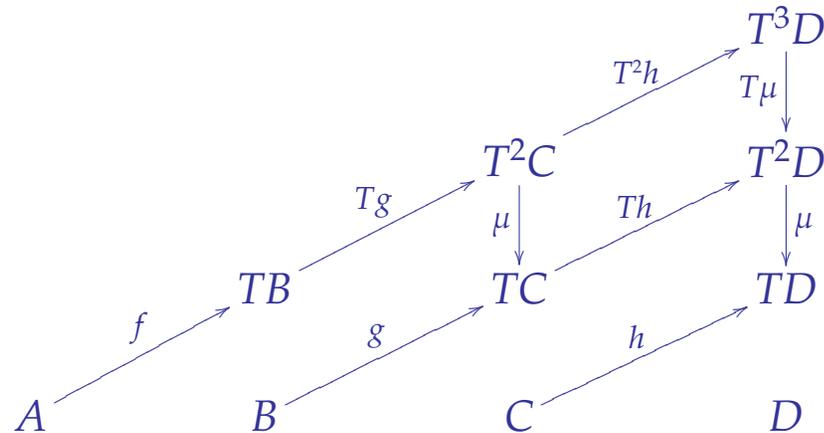
On compose $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ de la manière suivante:



Exercice

Montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Remarque: la démonstration d'associativité de la loi de composition amène à considérer le diagramme



dans la catégorie \mathcal{C} , et de vérifier que les deux morphismes de A à TD coïncident.

Principe de représentation

Toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t : A \longrightarrow A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X, t) : \mathcal{B}(X, A) \longrightarrow \mathcal{B}(X, A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \quad \mapsto \quad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie \mathcal{B} .

Exercice. Vérifier que $\mathcal{B}(X, t)$ définit bien une monade sur $\mathcal{B}(X, A)$.

Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t : A \longrightarrow A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t, X) : \mathcal{B}(A, X) \longrightarrow \mathcal{B}(A, X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \quad \mapsto \quad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie \mathcal{B} .

Exercice. Montrer que $\mathcal{B}(t, X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$.

Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens 2-catégorique)

$$s : A \longrightarrow A \quad t : B \longrightarrow B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s, t) : \mathcal{B}(A, B) \longrightarrow \mathcal{B}(A, B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$A \xrightarrow{f} B \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \uparrow s & & \downarrow t \\ & A & & B \end{array}$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie \mathcal{B} .

Objet de Eilenberg-Moore

Le 2-foncteur

$$X \mapsto \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(A,t)} : \mathcal{B}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

est 2-représentable par un objet A^t de la 2-catégorie \mathcal{B} .

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\phi_{X,A} : \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X,t)} \cong \mathcal{B}(X, A^t)$$

2-naturel en X .

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 1-cellule

$$X \xrightarrow{f} Y$$

le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \downarrow \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} & & \downarrow \mathcal{B}(f, A^t) \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

commute.

$\mathcal{B}(f, t)$ désigne ici le morphisme de monade $\mathcal{B}(Y, t) \longrightarrow \mathcal{B}(X, t)$ induit par f

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 2-cellule

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

les transformations naturelles induites

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Rightarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \mathcal{B}(g, A)^{\mathcal{B}(g, t)} & & \mathcal{B}(g, A^t) \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathcal{B}(f, A^t) \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Rightarrow \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \mathcal{B}(g, A^t) & & \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

coincident.

Objet de Eilenberg-Moore

L'isomorphisme ϕ_{A^t, A^t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A^t} : A^t \longrightarrow A^t$$

une 1-cellule

$$u^t : A^t \longrightarrow A$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{u} : t \circ u^t \Rightarrow u^t : A^t \longrightarrow A$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

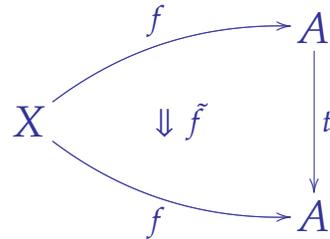
$$\begin{array}{ccc}
 & t \circ u^t & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \tilde{u} \\
 u^t & \xrightarrow{id} & u^t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 t \circ t \circ u^t & \xrightarrow{\mu} & t \circ u^t \\
 \downarrow t \circ \tilde{u} & & \downarrow \tilde{u} \\
 t \circ u^t & \xrightarrow{\tilde{u}} & u^t
 \end{array}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur d'oubli u^t et la transformation naturelle \tilde{u} décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t .

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule \tilde{f} munissant la 1-cellule f d'une structure de $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre



il existe une et une seule 1-cellule

$$X \xrightarrow{\bar{f}} A^t$$

telle que \tilde{f} se décompose en \bar{f} suivi de la 2-cellule \tilde{u} définie plus haut:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & f & \rightarrow A \\
 X & \Downarrow \tilde{f} & \\
 & f & \rightarrow A \\
 & & \downarrow t
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & u^t & \rightarrow A \\
 X \xrightarrow{\bar{f}} A^t & \Downarrow \tilde{u} & \\
 & u^t & \rightarrow A \\
 & & \downarrow t
 \end{array}
 \end{array}$$

Remarque: la 1-cellule \bar{f} est définie comme l'image de (f, \tilde{f}) par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta : f \Rightarrow g : X \longrightarrow A$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre entre (f, \tilde{f}) et (g, \tilde{g}) , c-à-d telle que

il existe une et une seule 2-cellule

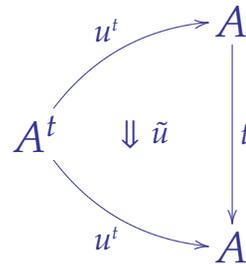
$$\bar{\theta} : \bar{f} \Rightarrow \bar{g} : X \longrightarrow A^t$$

telle que θ se décompose en $\bar{\theta}$ suivi de la 1-cellule u^t

Remarque: la 2-cellule $\bar{\theta}$ est l'image de $\theta : (f, \tilde{f}) \Rightarrow (g, \tilde{g})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(A^t, t)$ -algèbre



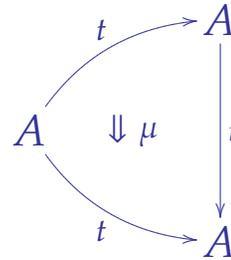
la caractérisent comme objet de Eilenberg-Moore associé à la monade t .

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Noter que la 2-cellule \tilde{u} fait bien partie de la définition d'objet d'Eilenberg-Moore: elle reflète la famille de foncteurs ϕ incluse dans la notion de 2-représentation.

Construction: le foncteur libre

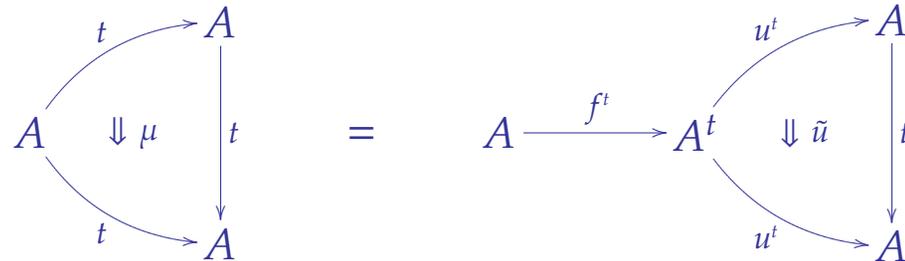
La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(A, t)$ -algèbre



Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A \xrightarrow{f^t} A^t$$

telle que



Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur f^t coïncide avec le foncteur libre.

Adjonction $f^t \dashv u^t$ associée

L'unité η de l'adjonction $f^t \dashv u^t$ est définie par l'unité de la monade t

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \searrow f^t & \nearrow u^t \\
 & A^t &
 \end{array}
 \quad \Downarrow \eta
 \quad := \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & t &
 \end{array}$$

tandis que la counité ε est définie comme l'unique 2-cellule

$$\varepsilon : f^t \circ u^t \Rightarrow id : A^t \longrightarrow A^t$$

satisfaisant l'égalité

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 u^t \nearrow & & \searrow f^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t \xrightarrow{u^t} A \\
 & \Downarrow \varepsilon &
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A & \\
 u^t \nearrow & & \searrow t \\
 A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & \Downarrow \tilde{u} &
 \end{array}$$

Egalités triangulaires (1)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow u^t & \nearrow f^t \\
 & & A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & \searrow t & \nearrow \\
 & & A
 \end{array}$$

et cette seconde égalité de la définition de f^t

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & \searrow t & \nearrow \\
 & & A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow id & \Downarrow \eta & \nearrow t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{t} & A \\
 & \searrow t & \nearrow \\
 & & A
 \end{array}$$

On en déduit que la 2-cellule considérée au départ vaut l'identité, et on conclut par propriété de relèvement (unique) sur la 2-cellule u^t

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow f^t & \nearrow \\
 & & A
 \end{array}
 = id$$

Egalités triangulaires (2)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \uparrow u^t & & \uparrow u^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \\
 & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \eta \\
 & & & A^t
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \uparrow u^t & & \uparrow id \\
 A^t & \xrightarrow{u^t} & A & \\
 & \downarrow \tilde{u} & & \downarrow \eta \\
 & & & A^t
 \end{array}$$

On conclut que

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \uparrow u^t & & \uparrow u^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \\
 & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \eta \\
 & & & A^t
 \end{array}
 = id$$

par le fait que la 2-cellule

$$\tilde{u} : t \circ u^t \Rightarrow u^t : A^t \longrightarrow A$$

définit une algèbre de la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$.

Décomposition de la monade t

L'adjonction

$$f^t \dashv u^t$$

a la monade t pour monade associée.

Démonstration: tout d'abord,

$$t = f^t \circ u^t$$

par définition de f^t . Ensuite, l'unité η de l'adjonction coïncide par définition avec l'unité de la monade t . Pour finir, la multiplication

$$u^t \circ f^t \circ u^t \circ f^t \Rightarrow u^t \circ f^t$$

induite par l'adjonction s'écrit

$$\begin{array}{c}
 & & A & & \\
 & u^t \nearrow & & \searrow f^t & \\
 A & \xrightarrow{f^t} & A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & & \Downarrow \varepsilon & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 & & A & & \\
 & u^t \nearrow & & \searrow t & \\
 A & \xrightarrow{f^t} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & & \Downarrow \tilde{u} & &
 \end{array}$$

et coïncide bien avec la multiplication de la monade, par définition de f^t .

1-cellule entre monades

Une 1-cellule entre deux monades

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \downarrow s & \longrightarrow & \downarrow t \\ A & & B \end{array}$$

est la donnée d'une 1-cellule

$$f : A \longrightarrow B$$

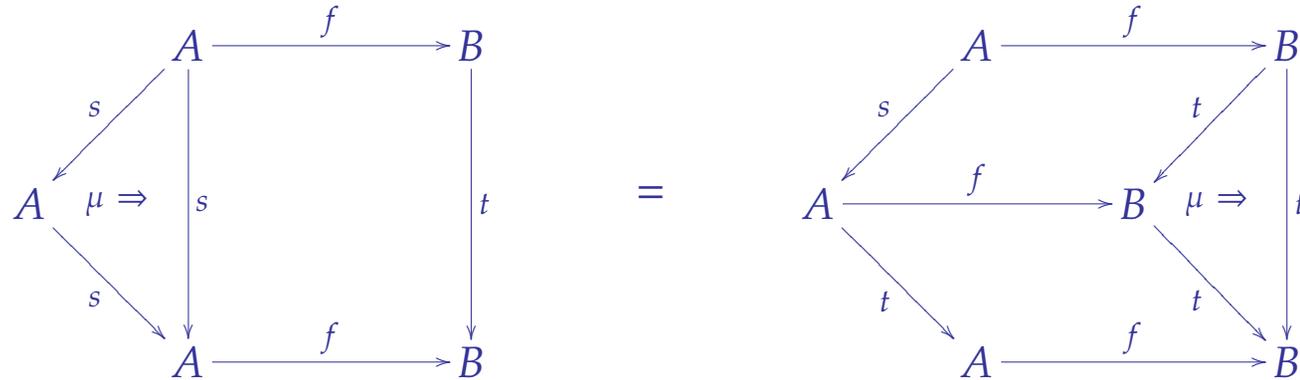
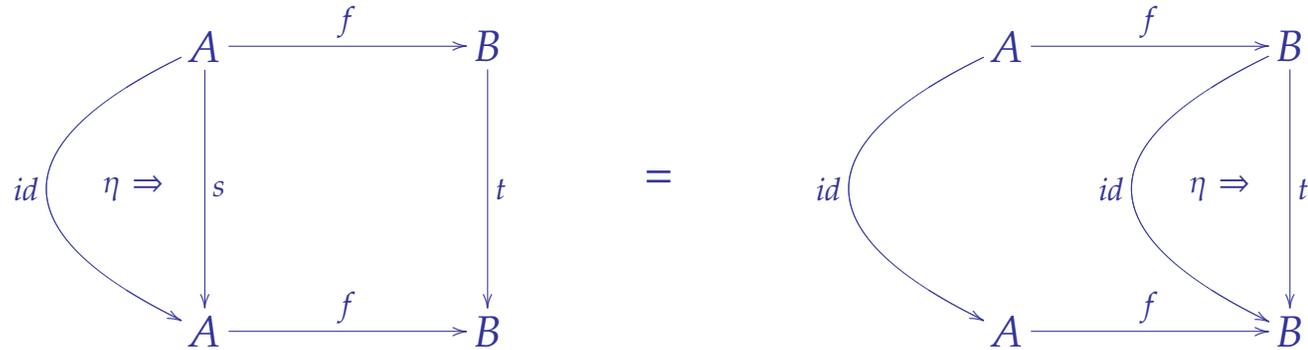
tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commute

1-cellule entre monades

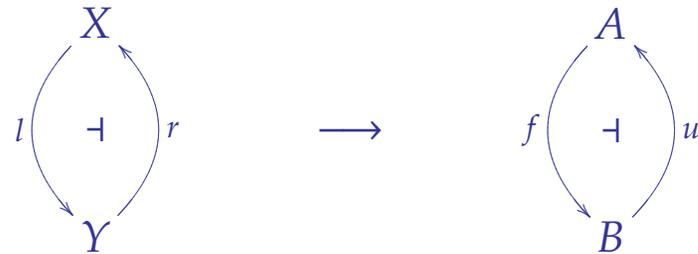
et les égalités suivantes sont satisfaites:



Notion élémentaire de morphisme entre monade.

1-cellule entre adjonctions

Une 1-cellule entre deux adjonctions

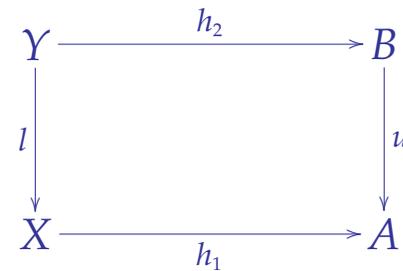
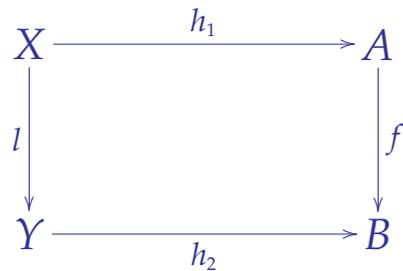


est la donnée de deux 1-cellules

$$h_1 : X \longrightarrow A$$

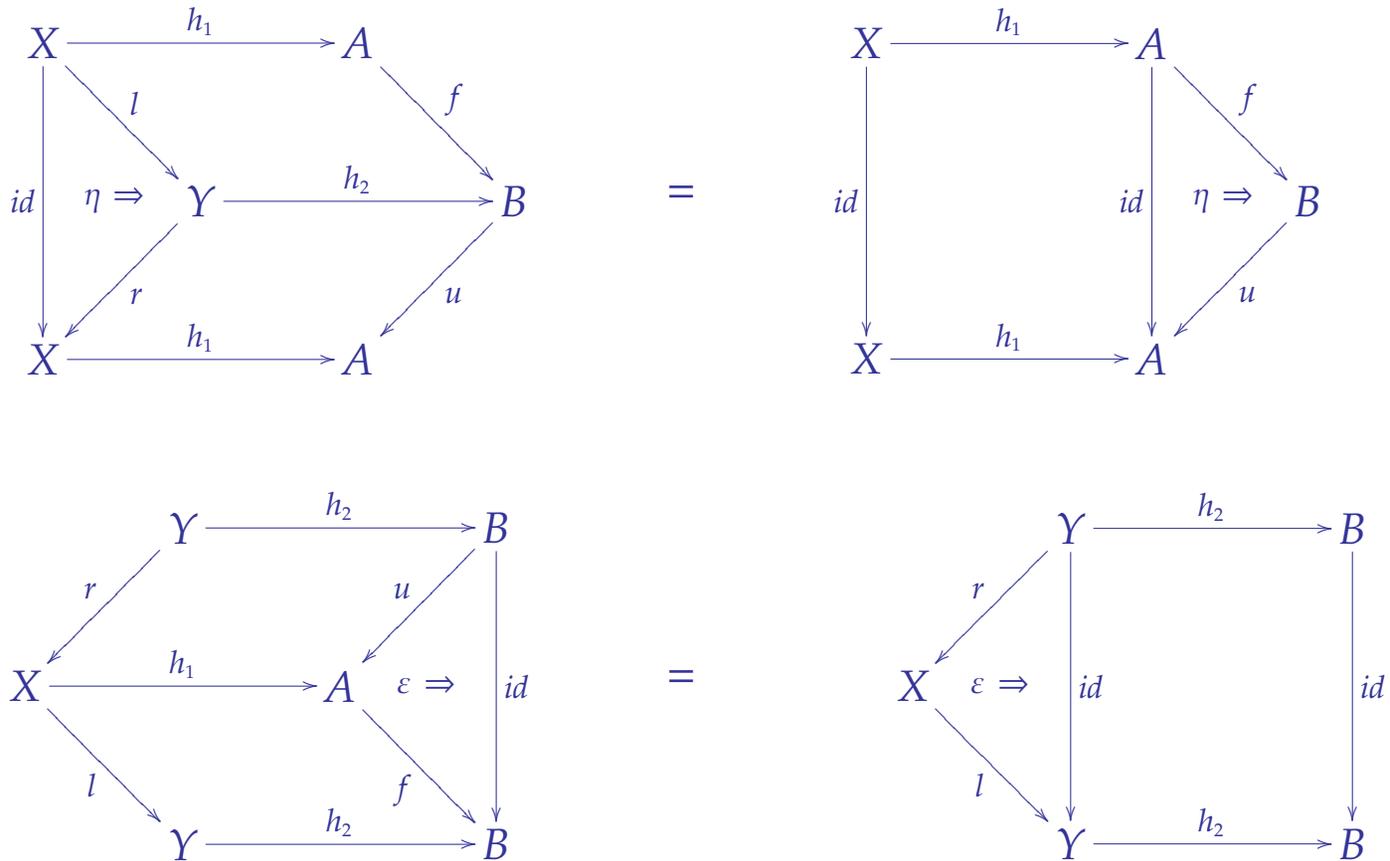
$$h_2 : Y \longrightarrow B$$

tels que les diagrammes suivants commutent:



1-cellule entre adjonctions

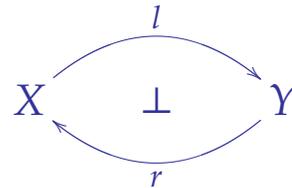
et les égalités suivantes sont satisfaites:



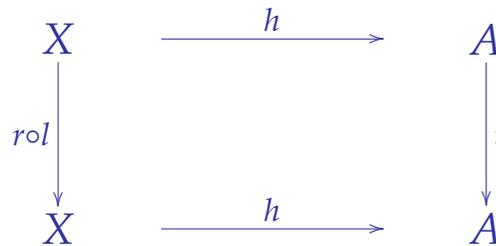
Toute 1-cellule d'adjonction induit une 1-cellule de monade.

Propriété universelle de l'objet d'Eilenberg-Moore

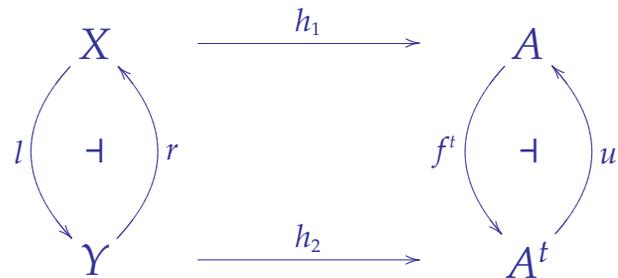
Réciproquement, supposons donnée une adjonction



Pour toute 1-cellule entre monades

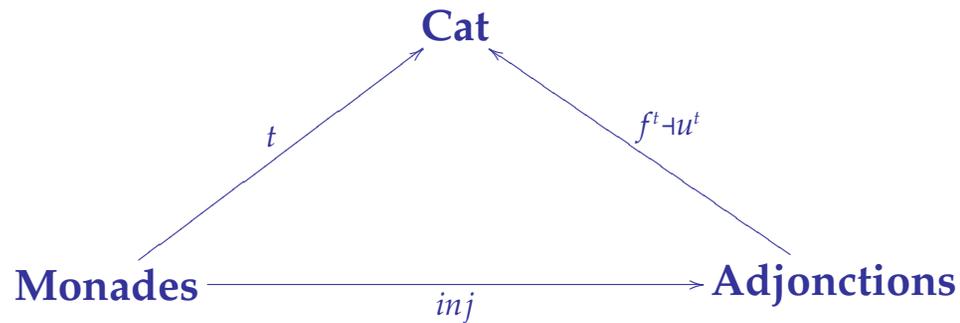


il existe une et une seule 1-cellule entre adjonctions



telle que la 1-cellule h_1 coïncide avec la 1-cellule h .

Extension de Kan à droite



- Monades** : 2-catégorie théorie des monades
- Adjonctions** : 2-catégorie théorie des adjonctions
- t : 2-foncteur associé à la monade t
- $f^t \dashv u^t$: 2-foncteur associé à l'adjonction $f^t \dashv u^t$

Objet de Kleisli

Le 2-foncteur

$$X \mapsto \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t, X)} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

est 2-représentable par un objet A_t .

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\psi_{A, X} : \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t, X)} \cong \mathcal{B}(A_t, X)$$

2-naturel en X .

Objet de Kleisli

L'isomorphisme ψ_{A_t, A_t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A_t} : A_t \longrightarrow A_t$$

une 1-cellule

$$f_t : A \longrightarrow A_t$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{f} : f_t \circ t \Rightarrow f_t : A \longrightarrow A_t$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(t, A_t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

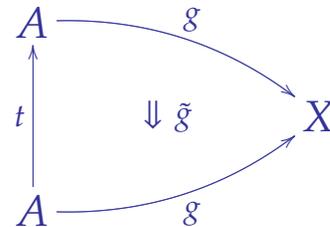
$$\begin{array}{ccc}
 & f_t \circ t & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 f_t & \xrightarrow{id} & f_t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_t \circ t \circ t & \xrightarrow{\mu} & f_t \circ t \\
 \tilde{f} \circ t \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\
 f_t \circ t & \xrightarrow{\tilde{f}} & f_t
 \end{array}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur libre f_t et la transformation naturelle \tilde{f} décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t .

Propriété de relèvement

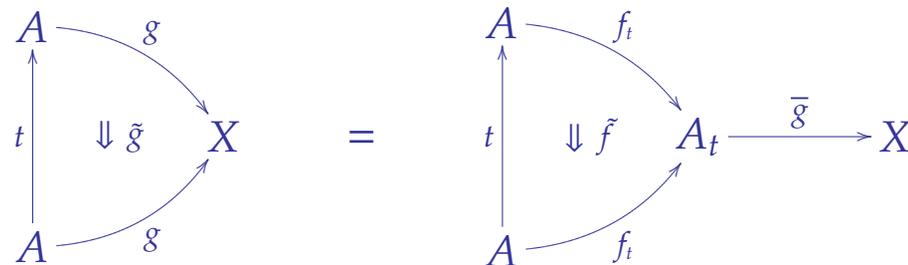
Pour toute 2-cellule \tilde{g} munissant la 1-cellule g d'une structure de $\mathcal{B}(t, X)$ -algèbre



il existe une et une seule 1-cellule

$$A_t \xrightarrow{\bar{g}} X$$

telle que \tilde{g} se décompose en \bar{g} suivi de la 2-cellule \tilde{f} définie plus haut:



Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta : g_1 \Rightarrow g_2 : A \longrightarrow X$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre entre (g_1, \tilde{g}_1) et (g_2, \tilde{g}_2) , c-à-d telle que

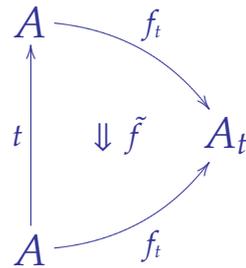
il existe une et une seule 2-cellule

$$\bar{\theta} : \bar{g}_1 \Rightarrow \bar{g}_2 : A_t \longrightarrow X$$

telle que θ se décompose en la 1-cellule u^t suivie de $\bar{\theta}$

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(t, A_t)$ -algèbre



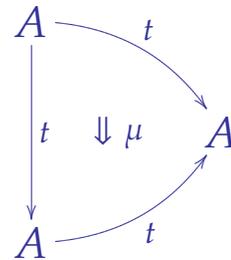
la caractérisent comme objet de Kleisli associé à la monade t .

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Ici encore, noter que la 2-cellule \tilde{f} fait partie de la définition d'objet de Kleisli.

Construction: le foncteur d'oubli

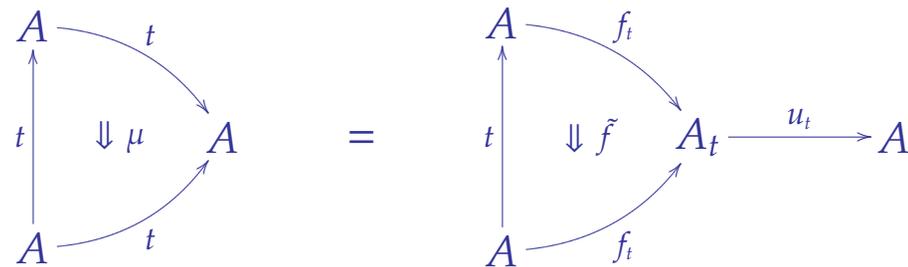
La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(t, A)$ -algèbre



Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

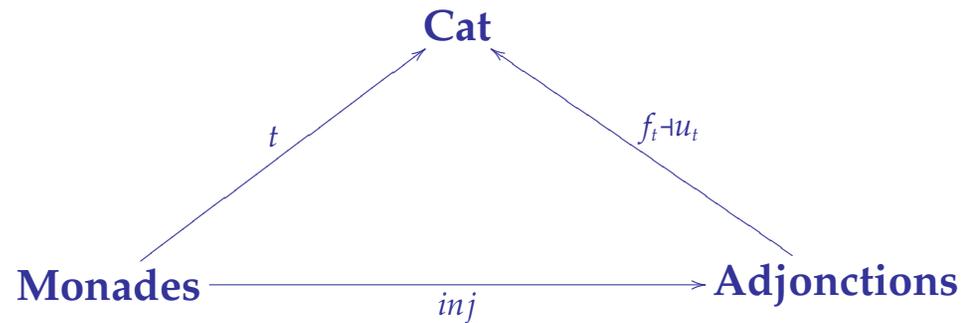
$$A_t \xrightarrow{u_t} A$$

telle que



Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur u_t coïncide avec le foncteur d'oubli.

Extension de Kan à gauche



- Monades** : 2-catégorie théorie des monades
- Adjonctions** : 2-catégorie théorie des adjonctions
- t : 2-foncteur associé à la monade t
- $f_t + u_t$: 2-foncteur associé à l'adjonction $f_t + u_t$

Troisième partie

Monades fortes

Interprétation catégorique du lambda-calcul avec
effets

Monade forte

Une monade est forte lorsqu'elle est équipée d'une famille de morphismes

$$t_{A,B} : A \times TB \longrightarrow T(A \times B)$$

naturelle en A et B , et telle que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times TC & \xrightarrow{t_{A \times B, C}} & T(A \times B \times C) \\ & \searrow^{A \times t_{B, C}} \quad \nearrow_{t_{A, B \times C}} & \\ & A \times T(B \times C) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \times TA & \xrightarrow{\lambda} & TA \\ & \searrow_t \quad \nearrow_{T\lambda} & \\ & T(1 \times A) & \end{array}$$

Monade forte

$$\begin{array}{ccccc} A \times TT B & \xrightarrow{t} & T(A \times TB) & \xrightarrow{Tt} & TT(A \times B) \\ \downarrow A \times \mu & & & & \downarrow \mu \\ A \times TB & \xrightarrow{t} & & \xrightarrow{t} & T(A \times B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{id} & A \times B \\ \downarrow A \times \eta & & \downarrow \eta \\ A \times TB & \xrightarrow{t} & T(A \times B) \end{array}$$

Modèle catégorique du λ -calcul avec effets

Une catégorie cartésienne \mathcal{C} munie d'une monade forte

$$(T, \mu, \eta, t)$$

avec une adjonction

$$\begin{array}{ccc} & A \times - & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{C}_T \\ & A \Rightarrow T(-) & \end{array}$$

pour tout objet A , ceci induisant une bijection

$$\varphi_{A,B,C} : \mathcal{C}_T(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(B, A \Rightarrow TC)$$

naturelle en B et C .

Interprétation des types du λ -calcul avec effets

$$\llbracket A \multimap B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \Rightarrow T \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket A \times B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket TA \rrbracket = T \llbracket A \rrbracket$$

Interprétation des séquents

Tout séquent

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash P : B$$

est interprété par un morphisme

$$\llbracket A_1 \times \dots \times A_n \rrbracket \longrightarrow \llbracket B \rrbracket$$

de la catégorie de kleisli associée à la monade T , autrement dit,

$$\llbracket A_1 \times \dots \times A_n \rrbracket \longrightarrow T \llbracket B \rrbracket$$

de la catégorie \mathcal{C} .

Interprétation de l'abstraction

$$\text{Abstraction} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightarrow B}$$

La règle transforme le morphisme

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f} TB$$

de la catégorie \mathcal{C} en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi_{\Gamma, A, B}(f)} A \Rightarrow TB$$

de la catégorie \mathcal{C} .

Interprétation de l'application

La règle

$$\text{Application} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie \mathcal{C}

$$\Gamma \xrightarrow{f} A \Rightarrow TB$$

et

$$\Delta \xrightarrow{g} TA$$

en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{g \times f} TA \times (A \Rightarrow TB) \xrightarrow{t} T(A \times (A \Rightarrow TB)) \xrightarrow{T(\text{eval})} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie \mathcal{C} .

Interprétation du let

La règle

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash \text{let } x = P \text{ in } Q : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie \mathcal{C}

$$\Gamma \xrightarrow{f} TA$$

et

$$A \times \Delta \xrightarrow{g} TB$$

en le morphisme

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times \Delta} TA \times \Delta \xrightarrow{t} T(A \times \Delta) \xrightarrow{T(g)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie \mathcal{C} .

Interprétation de la paire

On doit choisir un ordre d'implémentation pour la paire

$$\langle P, Q \rangle$$

On choisit typiquement l'ordre gauche-droite, induit par le morphisme

$$TA \times TB \longrightarrow T(A \times TB) \longrightarrow TT(A \times B) \xrightarrow{\mu} T(A \times B).$$

Quatrième partie

Monade d'état

Une présentation algébrique

La monade d'état

Dans une catégorie \mathcal{C} avec les produits et les coproduits dénombrables, on définit

$$T : X \mapsto (S \otimes X)^S$$

avec

$$S \otimes X := \bigoplus_{s \in S} X \qquad Y^S := \prod_{s \in S} Y$$

où l'ensemble des états S est défini comme l'ensemble des fonctions

$$S = V^L$$

de l'ensemble des adresses mémoire L à l'ensemble des valeurs V .

La catégorie de kleisli associée

Rappel : un morphisme

$$X \xrightarrow{k} Y$$

dans la catégorie de kleisli est défini comme un morphisme

$$X \longrightarrow (S \otimes Y)^S$$

dans la catégorie \mathcal{C} , que l'on peut aussi voir comme un morphisme

$$S \otimes X \longrightarrow S \otimes Y$$

de cette même catégorie \mathcal{C} .

Un objet avec état global

Un objet A muni d'un morphisme de "lecture"

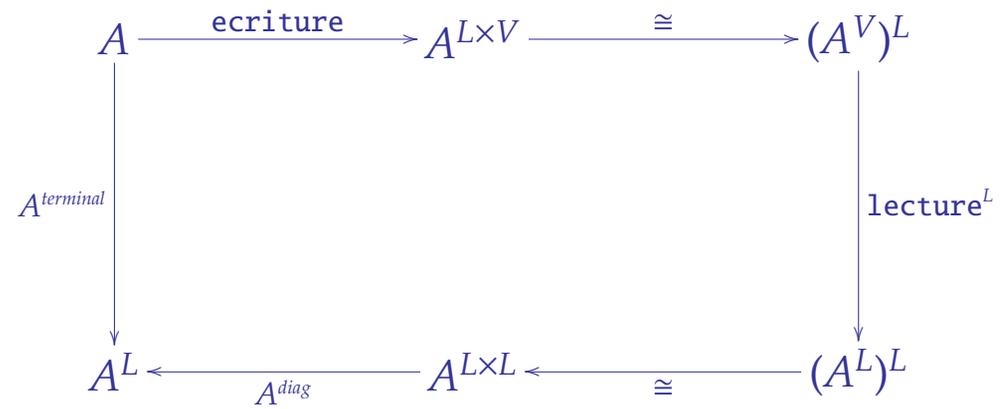
$$\text{lecture} : A^V \longrightarrow A^L$$

ainsi que d'un morphisme d' "écriture"

$$\text{écriture} : A \longrightarrow A^{L \times V}$$

qui vérifient une série de lois décrivant les propriétés algébriques de la lecture et de l'écriture dans l'espace mémoire.

Interaction 1



$$\text{lecture}_{loc} (v \mapsto \text{écriture}_{loc,v}(x)) = x$$

Interaction 2

$$\begin{array}{ccccc}
 (A^V)^V & \xrightarrow{\text{lecture}^V} & (A^L)^V & \xrightarrow{\cong} & (A^V)^L \\
 \downarrow \cong & & & & \downarrow \text{lecture}^L \\
 A^{V \times V} & & & & (A^L)^L \\
 \downarrow A^{diag} & & & & \downarrow \cong \\
 A^V & \xrightarrow{\text{lecture}} & A^L & \xleftarrow{A^{diag}} & A^{L \times L}
 \end{array}$$

$$\text{lecture}_{loc} (v' \mapsto \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v'])) = \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v])$$

Interaction 3

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\text{écriture}} & A^{L \times V} & \xrightarrow{\text{écriture}^{L \times V}} & (A^{L \times V})^{L \times V} \\
 \downarrow \text{écriture} & & & & \downarrow \cong \\
 A^{L \times V} & \xrightarrow{A^{L \times \pi_1}} & A^{L \times V \times V} & \xleftarrow{A^{diag \times V \times V}} & A^{L \times L \times V \times V}
 \end{array}$$

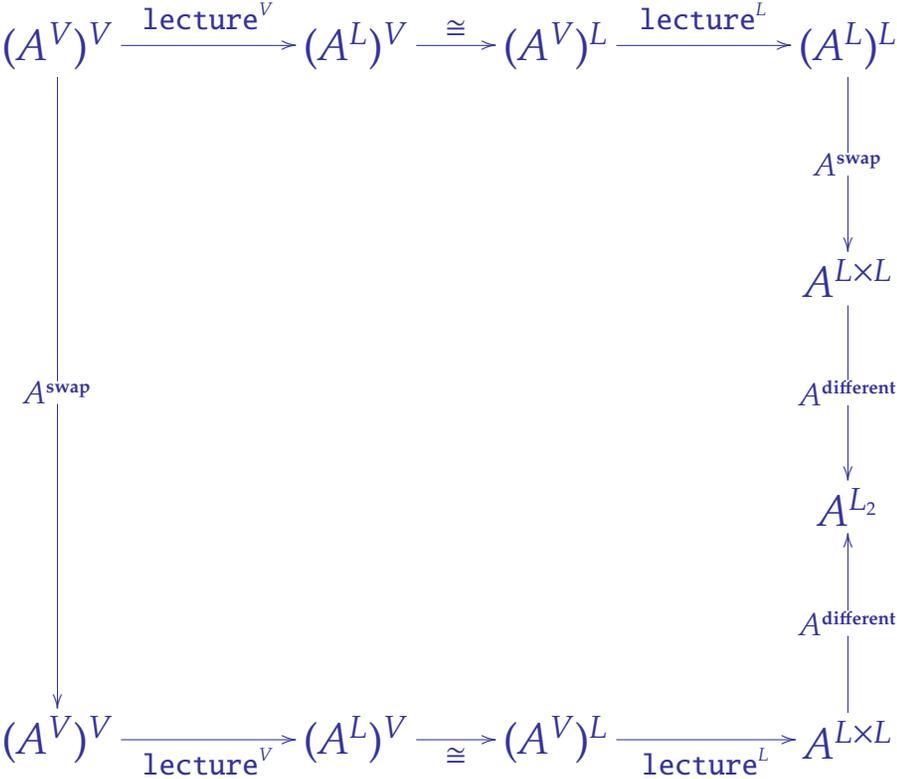
$$\text{écriture}_{loc,v}(\text{écriture}_{loc,v'}(x)) = \text{écriture}_{loc,v'}(x)$$

Interaction 4

$$\begin{array}{ccccc}
 A^V & \xrightarrow{\text{lecture}} & A^L & \xrightarrow{\text{écriture}^L} & (A^{L \times V})^L \\
 \downarrow \text{écriture}^V & & & & \downarrow A^{diag \times V} \\
 (A^{L \times V})^V & \xrightarrow{A^{L \times diag}} & & & A^{L \times V}
 \end{array}$$

$$\text{écriture}_{loc,v} (\text{lecture}_{loc} (v' \mapsto t[v'])) = \text{écriture}_{loc,v} (t[v])$$

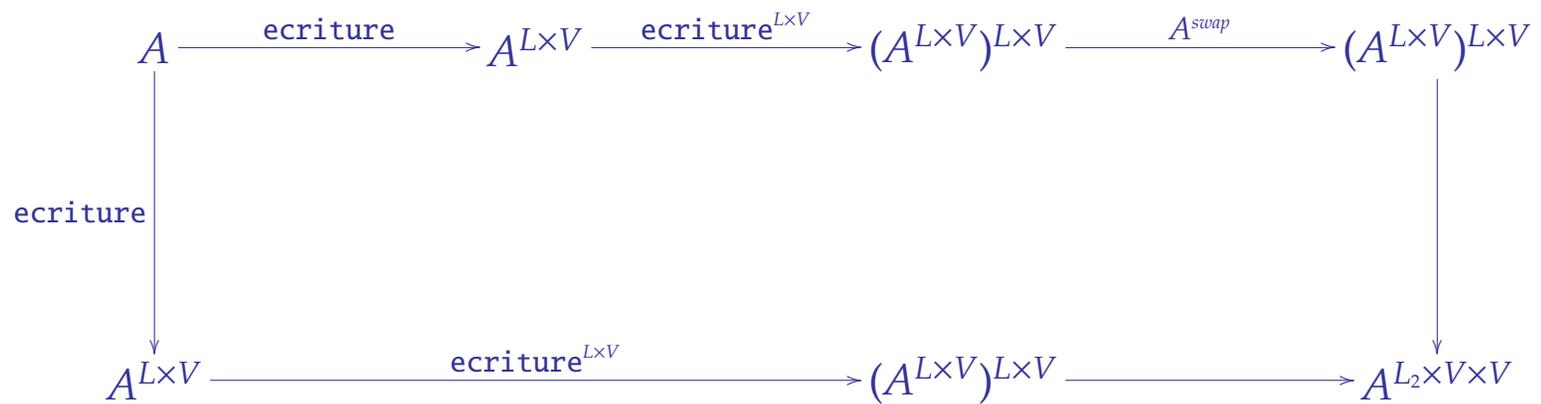
Commutation 1



$$\text{lecture}_{loc} (v \mapsto \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto t[v, v'])) = \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v']))$$

où $loc \neq loc'$

Commutation 2



$$\text{écriture}_{loc,v} \text{écriture}_{loc',v'} x = \text{écriture}_{loc',v'} \text{écriture}_{loc,v} x$$

où $loc \neq loc'$

Commutation 3

$$\begin{array}{ccccccc}
 A^V & \xrightarrow{\text{lecture}} & A^L & \xrightarrow{\text{écriture}^L} & (A^{L \times V})^L & \xrightarrow{\cong} & (A^L)^{L \times V} \\
 \downarrow \text{écriture}^V & & & & & & \downarrow \\
 (A^{L \times V})^V & \xrightarrow{\cong} & (A^V)^{L \times V} & \xrightarrow{\text{lecture}^{L \times V}} & (A^L)^{L \times V} & \xrightarrow{\quad} & A^{L_2 \times V}
 \end{array}$$

$$\text{écriture}_{loc,v} \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto t[v']) = \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto \text{écriture}_{loc,v} t[v'])$$

où $loc \neq loc'$

La catégorie des objets avec états globaux

Soit la catégorie $GS(\mathcal{C})$

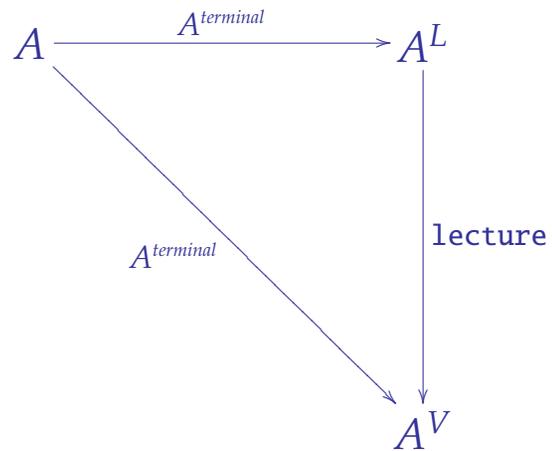
- dont les objets sont les objets avec état global,
- dont les morphismes sont les morphismes qui préservent la structure d'état global.

Théorème (Plotkin, Power)

La catégorie $GS(\mathcal{C})$ est équivalente à la catégorie des algèbres de la monade d'état.

Lemme préparatoire

Le diagramme



commute pour tout objet $(A, lecture, ecriture)$ avec état global.

Lemme préparatoire

Pour tout objet X de la catégorie \mathcal{C} , on munit l'objet $(S \otimes X)^S$ des morphismes

$$\text{écriture} : (S \otimes X)^S \longrightarrow ((S \otimes X)^S)^{L \times V}$$

$$\text{lecture} : ((S \otimes X)^S)^V \longrightarrow ((S \otimes X)^S)^L$$

définis comme suit:

$$\text{écriture}(loc, v, x) : \sigma \mapsto x(\sigma[v/loc])$$

$$\text{lecture}(loc, v \mapsto x(v)) : \sigma \mapsto x(\sigma(loc))(\sigma)$$

Cela définit une structure d'état global sur l'objet $(S \otimes X)^S$.

On rappelle les notations: $\sigma \in S = V^L$ et $x \in (S \otimes X)^S$.

Etapes de démonstration du théorème

1. Montrer que le foncteur d'oubli

$$GS(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

a un foncteur adjoint à gauche

$$X \longmapsto (S \otimes X)^S$$

où l'objet $(S \otimes X)^S$ est muni de la structure d'état global définie plus haut.

2. Appliquer le théorème de caractérisation de Beck (non étudié en cours).

Présentation alternative

Idée: faire de la présentation précédente une théorie proprement algébrique.

Un objet avec mémoire globale est un objet muni de deux familles d'opérations:

– une opération V -aire pour chaque adresse loc de cellule mémoire:

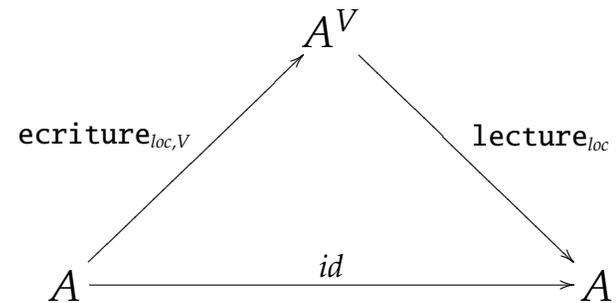
$$\text{lecture}_{loc} : A^V \longrightarrow A$$

– une opération unaire pour chaque paire d'adresse loc et de valeur val :

$$\text{écriture}_{loc,val} : A \longrightarrow A$$

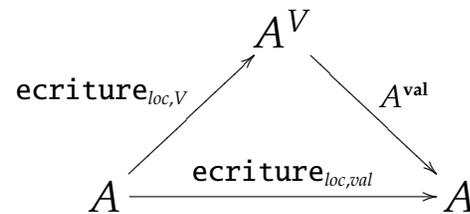
qui vérifient les sept équations suivantes.

1. annihilation lecture - écriture



$$\text{lecture}_{loc} (\text{val} \mapsto \text{écriture}_{loc,\text{val}}(x)) = x$$

Le morphisme $\text{écriture}_{loc,V} : A \longrightarrow A^V$



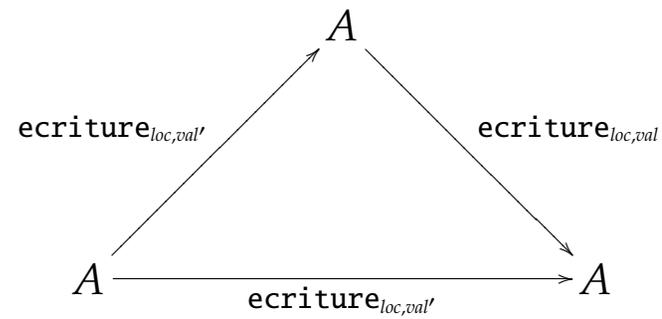
for every value $val \in V$, where $A^{val} : A^V \longrightarrow A$ is the val -th projection of A^V over A .

2. interaction lecture - lecture

$$\begin{array}{ccc} A^{V \times V} & \xrightarrow{\text{lecture}_{loc}^V} & A^V \\ \downarrow A^{\text{diag}} & & \downarrow \text{lecture}_{loc} \\ A^V & \xrightarrow{\text{lecture}_{loc}} & A \end{array}$$

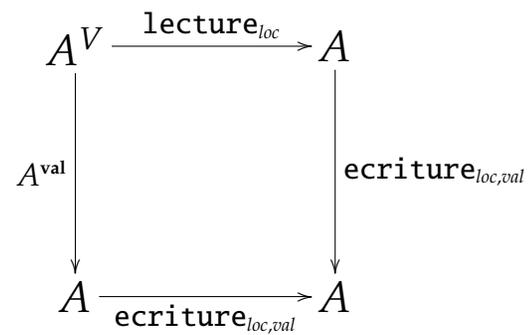
$$\begin{aligned} & \text{lecture}_{loc} (v' \mapsto \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v'])) \\ & = \\ & \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v]) \end{aligned}$$

3. interaction écriture - écriture



$$\begin{aligned} & \text{écriture}_{loc, val} (\text{écriture}_{loc, val'} (x)) \\ & = \\ & \text{écriture}_{loc, val'} (x) \end{aligned}$$

4. interaction écriture - lecture



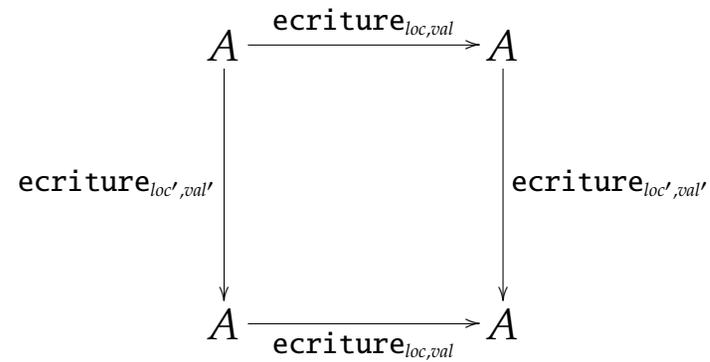
$$\begin{aligned} & \text{écriture}_{loc, v} (\text{lecture}_{loc} (v' \mapsto t[v'])) \\ & = \\ & \text{écriture}_{loc, v} (t[v]) \end{aligned}$$

5. commutation lecture - lecture

$$\begin{array}{ccccc}
 (A^V)^V & \xrightarrow{\text{lecture}^V} & (A^L)^V & \xrightarrow{\cong} & (A^V)^L & \xrightarrow{\text{lecture}^L} & (A^L)^L \\
 \downarrow A^{\text{swap}} & & & & & & \downarrow A^{\text{swap}} \\
 & & & & & & A^{L \times L} \\
 & & & & & & \downarrow A^{\text{different}} \\
 & & & & & & A^{L_2} \\
 & & & & & & \uparrow A^{\text{different}} \\
 & & & & & & A^{L \times L} \\
 (A^V)^V & \xrightarrow{\text{lecture}^V} & (A^L)^V & \xrightarrow{\cong} & (A^V)^L & \xrightarrow{\text{lecture}^L} & A^{L \times L}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{lecture}_{loc} (v \mapsto \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto t[v, v'])) \\
 = \\
 \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto \text{lecture}_{loc} (v \mapsto t[v, v'])) \\
 \text{when } loc \neq loc'
 \end{array}$$

6. commutation écriture - écriture



$$\begin{aligned} & \text{écriture}_{loc, v} \text{écriture}_{loc', v'} x \\ & = \\ & \text{écriture}_{loc', v'} \text{écriture}_{loc, v} x \\ & \text{when } loc \neq loc' \end{aligned}$$

7. commutation écriture - lecture

$$\begin{array}{ccc} A^V & \xrightarrow{\text{lecture}_{loc'}} & A \\ \text{écriture}_{loc, val}^V \downarrow & & \downarrow \text{écriture}_{loc, val} \\ A^V & \xrightarrow{\text{lecture}_{loc'}} & A \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{écriture}_{loc, v} \text{ lecture}_{loc'} (v' \mapsto t[v']) \\ & = \\ & \text{lecture}_{loc'} (v' \mapsto \text{écriture}_{loc, v} t[v']) \\ & \text{when } loc \neq loc' \end{aligned}$$

Part 4

Local states as a computational effect

Functorial algebraic theories at work

Functorial semantics

Every type is described as a functor

$$X : I \longrightarrow \mathit{Set}$$

where I is the category with

- natural numbers as objects
- injections as morphisms.

Functorial semantics

The intuition is that

$$X(n)$$

contains the programs with n locations. Every injection

$$f : p \longrightarrow q$$

defines a function

$$X(f) : X(p) \longrightarrow X(q)$$

which transports every program

$$P \in X(p)$$

to the program

$$P[loc \leftarrow f(loc)] \in X(q).$$

A cartesian closed category

The category $[I, Set]$ is cartesian

$$X \times Y : n \mapsto Xn \times Yn$$

and closed

$$X \Rightarrow Y : n \mapsto [I, Set] (X \times I(n, -), Y)$$

Note that

$$(X \Rightarrow Y)(n) = \int_{p \in I} Set (Xp \times I(n, p), Yp)$$

A monoidal closed category

The category $[I, Set]$ is symmetric monoidal

$$X \otimes Y : n \mapsto \int^{p, q \in I} X_p \times Y_q \times I(p + q, n)$$

and closed

$$X \multimap Y : n \mapsto [I, Set](X, Y(n + -))$$

Note that

$$(X \multimap Y)(n) = \int_{p \in I} Set(X_p, Y(n + p))$$

Local state monad

Define the contravariant functor

$$S : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}^{op} & \longrightarrow & \mathcal{Set} \\ n & \longmapsto & V^n \end{array}$$

The monad is then defined as:

$$TX : n \mapsto \left(\int^{m \in (n/I)} (Sm \times Xm) \right)^{Sn}$$

Local state monad

Define the covariant functor

$$L : I \longrightarrow \text{Set} \\ n \longmapsto I(1, n)$$

Note that

$$\partial X = L \multimap X : n \longmapsto X(n + 1)$$

A distributivity law

A natural transformation

$$(X \times Y) \otimes Z \longrightarrow X \times (Y \otimes Z)$$

defined componentwise as

$$\begin{aligned} \int^{p,q \in I} (X_p \times Y_p) \times Z_q \times I(p+q, n) &\longrightarrow \int^{p,q \in I} X_n \times Y_p \times Z_q \times I(p+q, n) \\ &\longrightarrow X_n \times \int^{p,q \in I} Y_p \times Z_q \times I(p+q, n) \end{aligned}$$

From this follows a distributivity law

$$Y \multimap Z^X \longrightarrow (Y \multimap Z)^X$$

An object with local state

An object A equipped with a **lookup** map

$$\text{lecture} : A^V \longrightarrow A^L$$

and an **update** map

$$\text{écriture} : A \longrightarrow A^{L \times V}$$

and a **block** map

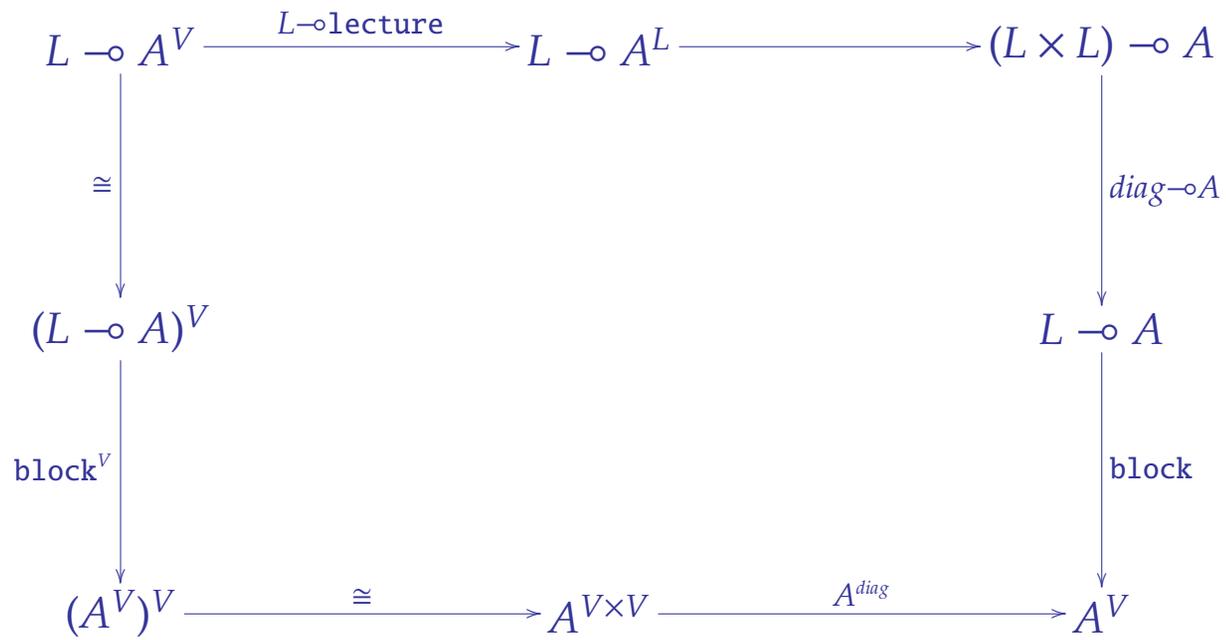
$$\text{block} : L \multimap A \longrightarrow A^V$$

satisfying a series of coherence laws.

Interaction 5

$$\begin{array}{ccccccc}
 L \multimap A & \xrightarrow{L \multimap \text{écriture}} & L \multimap A^{L \times V} & \xrightarrow{\cong} & (L \multimap A^L)^V & \longrightarrow & ((L \times L) \multimap A)^V \\
 \downarrow \text{block} & & & & & & \downarrow (\text{diag} \multimap A)^V \\
 A^V & \xrightarrow{(A^{\text{terminal}})^V} & (A^V)^V & \xleftarrow{\text{block}^V} & (L \multimap A)^V & &
 \end{array}$$

Interaction 6



Commutation 4

$$\begin{array}{ccccc}
 L \multimap (L \multimap A) & \xrightarrow{L\text{-oblock}} & L \multimap A^V & \xrightarrow{\cong} & (L \multimap A)^V \\
 \downarrow \text{swap} & & & & \downarrow \text{block}^V \\
 L \multimap (L \multimap A) & & & & (A^V)^V \\
 \downarrow L\text{-oblock} & & & & \downarrow \text{swap} \\
 L \multimap A^V & \xrightarrow{\cong} & (L \multimap A)^V & \xrightarrow{\text{block}^V} & (A^V)^V
 \end{array}$$

Commutation 5

$$\begin{array}{ccccc}
 L \multimap A & \xrightarrow{L \multimap \text{écriture}} & L \multimap A^{L \times V} & \longrightarrow & (L \multimap A)^{L \times V} \\
 \downarrow \text{block} & & & & \downarrow \text{block}^{L \times V} \\
 A^V & \xrightarrow{\text{écriture}^V} & (A^{L \times V})^V & \xrightarrow{\cong} & (A^V)^{L \times V}
 \end{array}$$

Commutation 6

$$\begin{array}{ccccc}
 (L \multimap A)^V & \xrightarrow{\text{block}^V} & (A^V)^V & \xrightarrow{\text{swap}} & (A^V)^V \\
 \downarrow \cong & & & & \downarrow \text{lecture}^V \\
 L \multimap A^V & & & & (A^L)^V \\
 \downarrow L\text{-}\text{lecture} & & & & \downarrow \cong \\
 L \multimap A^L & \longrightarrow & (L \multimap A)^L & \xrightarrow{\text{block}^L} & (A^V)^L
 \end{array}$$

Monadicity for local stores

Let $LS(\mathcal{C})$ denote the category

- whose objects are the objects with local stores,
- whose morphisms are the structure preserving morphisms.

Theorem (Plotkin, Power)

The category $LS(\mathcal{C})$ is equivalent to the category of algebras of the local state monad.