Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Décembre 2009

Plan de la séance

1 – Limites, colimites et extensions de Kan

2 – La bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$ des morphismes de monades

3 – La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$ des modules de monades

4 – Fermeture

5 – Foncteurs laxes

6 – Le pseudo-foncteur $\mathbf{Mon}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

Première partie

Limites, colimites et extensions de Kan

Une généralisation des produits cartésiens

Extension de Kan à droite

L'extension de Kan à droite d'un foncteur

$$F \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad C$$

le long d'un foncteur

$$G \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

est donné par un foncteur

$$Ran_G(F) \quad : \quad B \quad \longrightarrow \quad C$$

équippé d'une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} C & \\ A \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \varepsilon"] & B \arrow[ul, "Ran_G(F)"'] \end{tikzcd}$$

définissant une bijection

$$Nat(H, Ran_G(F)) \quad \cong \quad Nat(H \circ G, F)$$

Slogan

Extension de Kan = fermeture 2-dimensionnelle

On pourrait noter

$$Ran_G(F) \quad = \quad F \Leftarrow G$$

dans l'esprit des catégories cartésiennes (ou monoidales) fermées.

Exemple: les produits cartésiens

Exemple: les produits fibrés

Extension de Kan à gauche

L'extension de Kan à gauche d'un foncteur

$$F \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad C$$

le long d'un foncteur

$$G \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

est donné par un foncteur

$$Lan_G(F) \quad : \quad B \quad \longrightarrow \quad C$$

équippé d'une transformation naturelle

$$\begin{tikzcd}
C & \\
A \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow \eta"] & B \arrow[ul, "Lan_G(F)"']
\end{tikzcd}$$

définissant une bijection

$$Nat(Lan_G(F), H) \qquad \cong \qquad Nat(F, H \circ G)$$

Exemple: les sommes cartésiennes

Exemple: les sommes amalgamées

Deuxième partie

La bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$ des monades

Monades et foncteurs

La bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

– les 0-**cellules** sont les monades (A, s) de la bicatégorie $\mathcal{B}$

– les 1-**cellules**

$$(f, \tilde{f}) \quad : \quad (A, s) \longrightarrow (B, t)$$

sont des paires constitué d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

et d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad f \otimes s \quad \Rightarrow \quad t \otimes f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

Diagrammatiquement:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tilde{f}}{\Rightarrow}"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

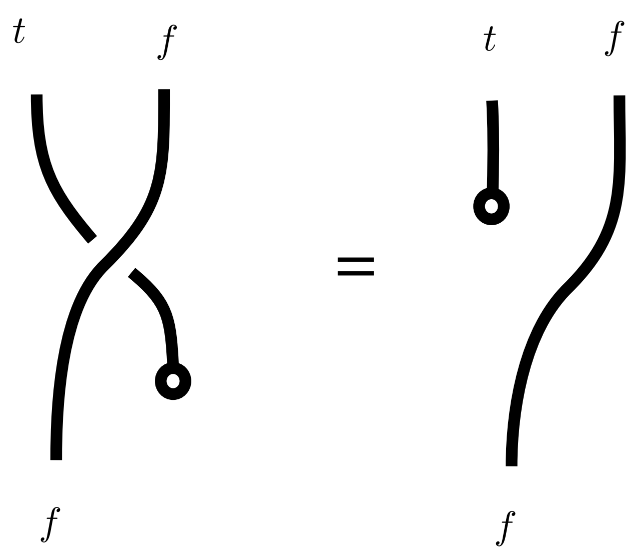
La bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

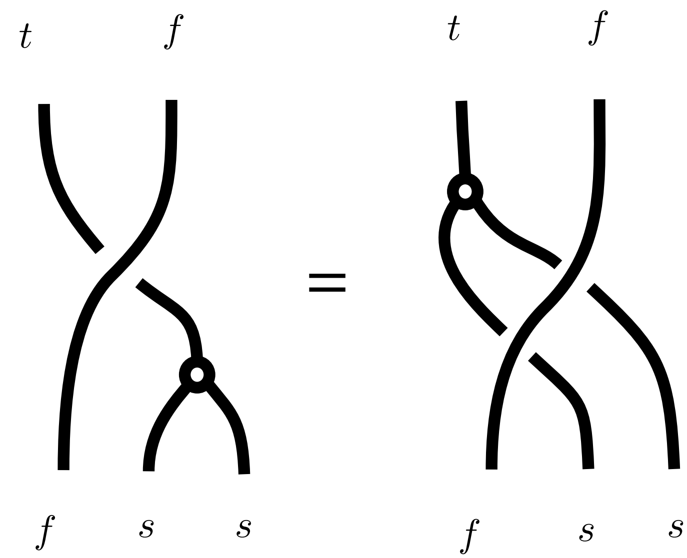
satisfaisant les égalités suivantes:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend right=70, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\eta \Rightarrow"] \arrow[dr, phantom, "\tilde{f} \Rightarrow"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=70, "id"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[d, bend right=70, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\eta \Rightarrow"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "s"] \arrow[ddr, phantom, "\tilde{f} \Rightarrow"] & B \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[dr, "s"'] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & & \\
 & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, phantom, "\tilde{f} \Rightarrow"] & & B \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & \arrow[d, phantom, "\tilde{f} \Rightarrow"] & B \arrow[dr, "t"] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & \\
 & A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

Formulation alternative en diagrammes de corde





Les 2-cellules de la bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

– les 2-**cellules**

$$\theta \quad : \quad f \Rightarrow g \quad : \quad s \longrightarrow t$$

sont des 2-cellules

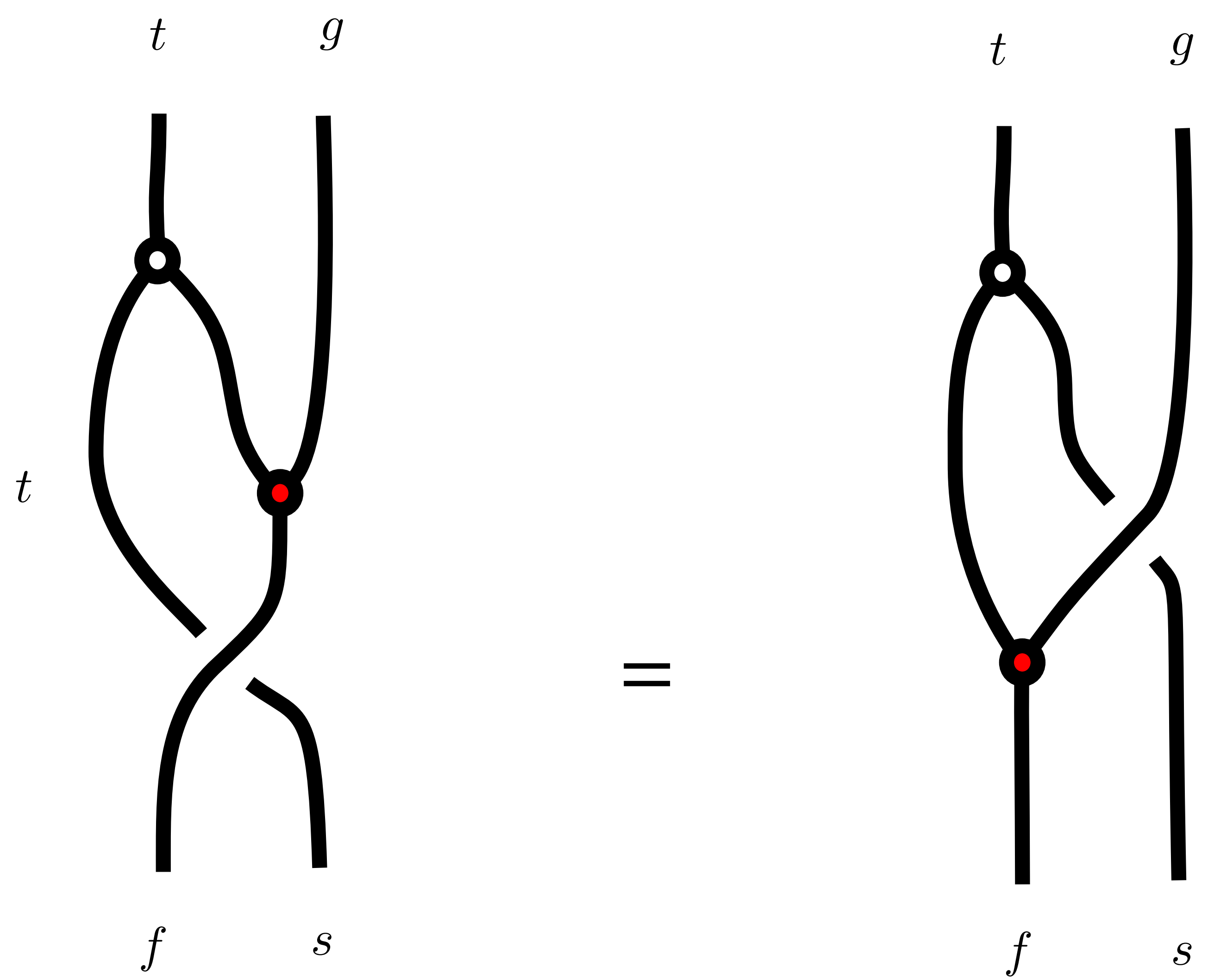
$$\theta \quad : \quad f \Rightarrow t \otimes g \quad : \quad A \longrightarrow B$$

faisant commuter le diagramme de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta"'] & t \otimes f \arrow[r, Rightarrow, "\theta"] & t \otimes t \otimes g \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
t \otimes g \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{g}"] & t \otimes t \otimes g \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & t \otimes g
\end{tikzcd}$$

Forme réduite

Formulation alternative en diagrammes de corde



Forme réduite

Les 2-cellules de la bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

– les 2**-cellules**

$$\theta \quad : \quad f \Rightarrow g \quad : \quad s \longrightarrow t$$

sont des 2-cellules

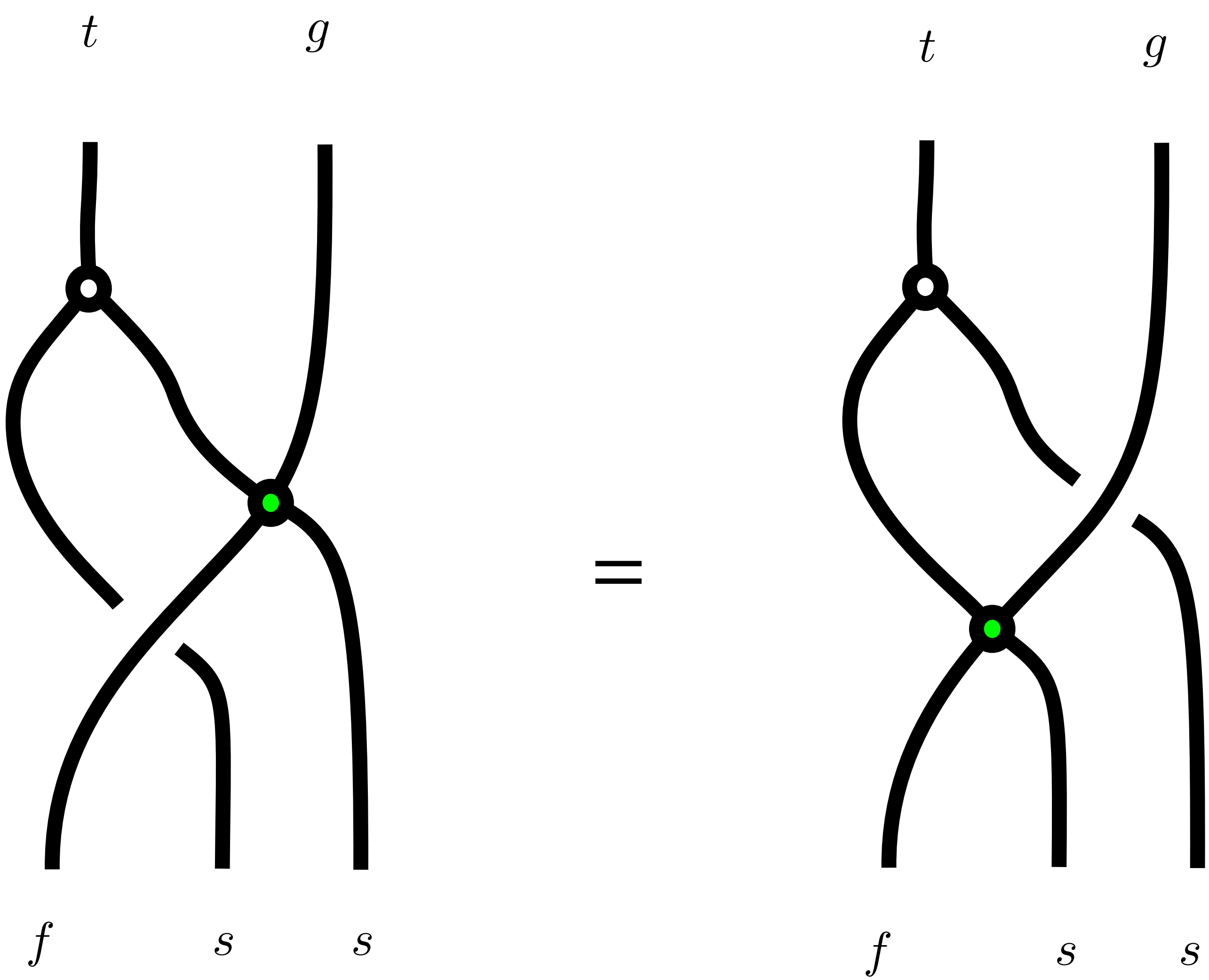
$$\theta \quad : \quad f \otimes s \Rightarrow t \otimes g \quad : \quad A \longrightarrow B$$

faisant commuter le diagramme de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
f \otimes s \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta"'] & t \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta"] & t \otimes t \otimes g \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
t \otimes g \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{g}"] & t \otimes t \otimes g \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & t \otimes g
\end{tikzcd}$$

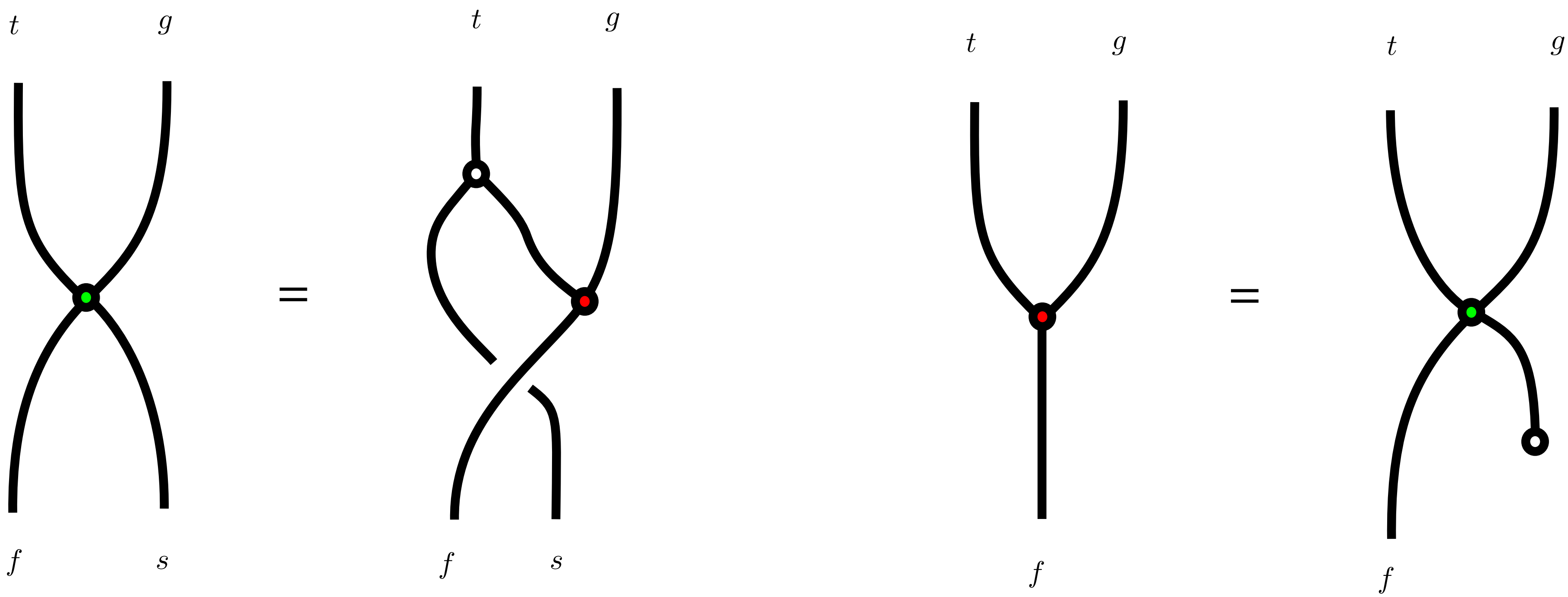
Forme non réduite

Formulation alternative en diagrammes de corde

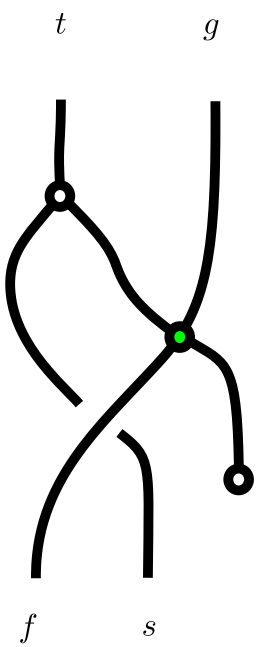


Forme non réduite

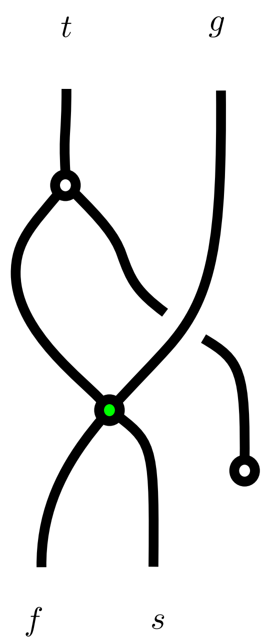
Passage de la forme réduite à la forme non réduite (et vice versa)



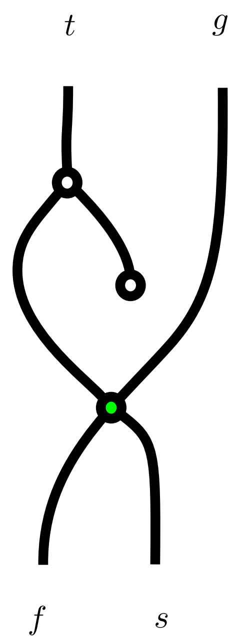
Première équation



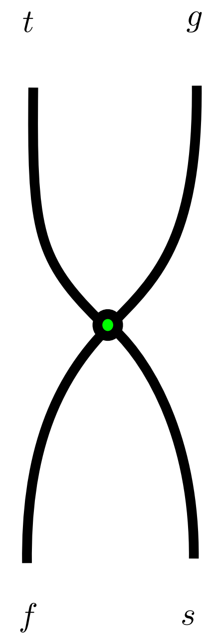
=



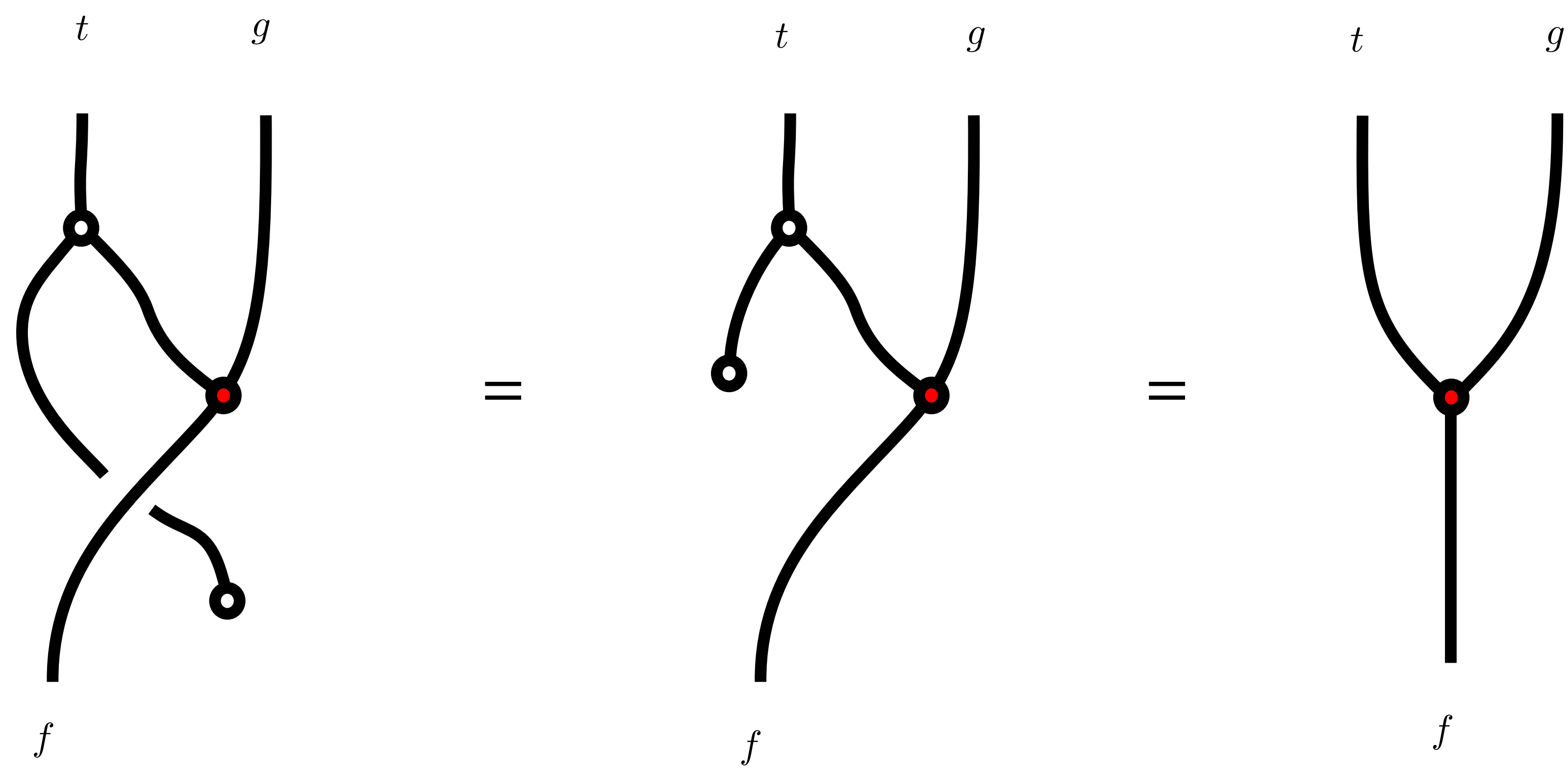
=



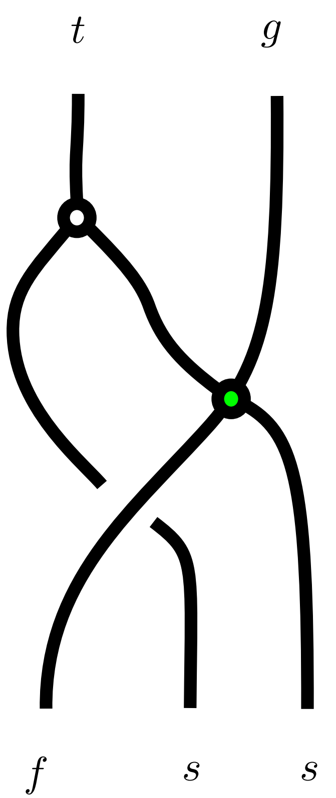
=



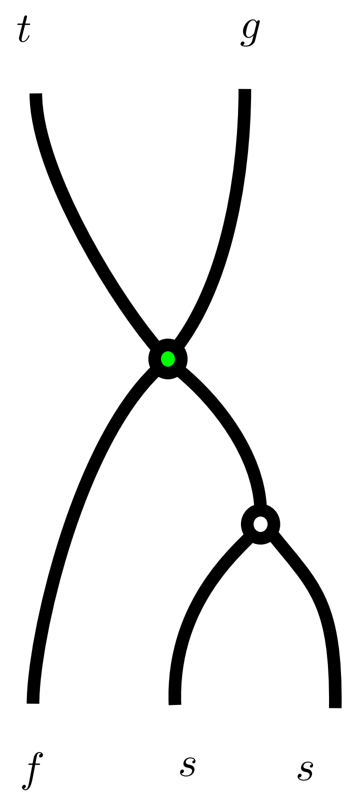
Deuxième équation



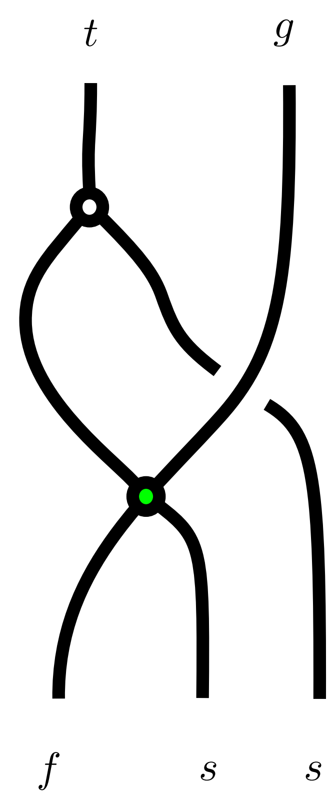
Propriété de la forme non réduite



=



=



Exemple de la bicatégorie $\mathbf{Span}$

Dans la bicatégorie $\mathbf{Mon(Span)}$

– les 0-cellules sont les petites catégories,

– les 1-cellules provenant d'une fonction sont les foncteurs,

– les 2-cellules sont les transformations naturelles.

Deux formulations possibles (réduite, non réduite)
des transformations naturelles.

Variante: la bicatégorie $(\mathbf{Mon}(\mathcal{B}^{op}))^{op}$

– les 0**-cellules** sont les monades (A,s) de la bicatégorie $\mathcal{B}$

– les 1**-cellules**

$$(f,\tilde{f}) \quad : \quad (A,s) \longrightarrow (B,t)$$

sont des paires constitué d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

et d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad t \otimes f \quad \Rightarrow \quad f \otimes s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

Diagrammatiquement:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\tilde{f}}{\Leftarrow}"] & B
\end{tikzcd}$$

Les 2-cellules de la bicatégorie $(\mathbf{Mon}(\mathcal{B}^{op}))^{op}$

– les 2**-cellules**

$$\theta \quad : \quad f \Rightarrow g \quad : \quad s \longrightarrow t$$

sont des 2-cellules

$$\theta \quad : \quad t \otimes f \Rightarrow g \otimes s \quad : \quad A \longrightarrow B$$

faisant commuter le diagramme de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
t \otimes t \otimes f \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"] \arrow[d, Rightarrow, "\theta"'] & t \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta"] & g \otimes s \otimes s \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
t \otimes g \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{g}"] & g \otimes s \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & g \otimes s
\end{tikzcd}$$

Deuxième partie

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

des modules de monades

Modules algébriques, modules catégoriques

Principe de représentation

Toute monade (au sens bicatégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X,t) \quad : \quad \mathcal{B}(X,A) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(X,A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \qquad \mapsto \qquad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute 0-cellule X de la bicatégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Vérifier que $\mathcal{B}(X,t)$ définit bien une monade sur $\mathcal{B}(X,A)$.

Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens bicatégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t, X) \quad : \quad \mathcal{B}(A, X) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A, X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \qquad \mapsto \qquad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute 0-cellule X de la bicatégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Montrer que $\mathcal{B}(t, X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$.

Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens bicatégorique)

$$s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A \qquad t \quad : \quad B \quad \longrightarrow \quad B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s,t) \quad : \quad \mathcal{B}(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \mapsto \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ A & & B \end{array}$$

cela pour toute 0-cellule X de la bicatégorie $\mathcal{B}$.

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

– les 0-**cellules** sont les monades (A, s) de la bicatégorie $\mathcal{B}$

– les 1-**cellules**

$$(A, s) \longrightarrow (B, t)$$

sont les algèbres de la monade

$$\mathcal{B}(s, t) \quad : \quad \mathcal{B}(A, B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A, B).$$

Autrement dit, il s'agit des paires (f, ϕ) constituées d'une 1-cellule

$$A \xrightarrow{f} B$$

et d'une 2-cellule

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \phi"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

de la bicatégorie $\mathcal{B}$ sous-jacente, satisfaisant les diagrammes de cohérence suivants:

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dr, "t"] \arrow[dd, "t"'] & \\
A \arrow[ur, "s"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mu}{\Rightarrow}"] & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\mu}{\Leftarrow}"] & B \arrow[dl, "t"] \\
 & A \arrow[ul, "s"] \arrow[uu, "s"'] \arrow[r, "f"'] & B &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ddr, "t"] & \\
 & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & & \\
A \arrow[uur, "s"] \arrow[rrr, "f"] & & & B \arrow[ddl, "t"] \\
 & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & & \\
 & A \arrow[uul, "s"] \arrow[r, "f"'] & B &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dd, "t"'] \arrow[dd, bend left=60, "id"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] & \\
 & A \arrow[uu, "s"'] \arrow[uu, bend left=60, "id"] \arrow[r, "f"'] & B &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dd, bend left=60, "id"] \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow id"] & \\
A \arrow[uu, bend left=60, "id"] \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Exercice. Dessiner les diagrammes de cordes associés.

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

– les 2-**cellules**

$$\begin{tikzcd}(A,s) \arrow[r, bend left, "{(f,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(g,\psi)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & (B,t)\end{tikzcd}$$

sont les morphismes de $\mathcal{B}(s,t)$-algèbres dans la catégorie $\mathcal{B}(A,B)$.

En résumé:

$$\mathbf{Mod}(\mathcal{B})((A,s),(B,t)) \quad := \quad \mathcal{B}(A,B)^{\mathcal{B}(s,t)}$$

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

Autrement dit, une 2-cellule

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(A,s) \arrow[r, bend left, "{(f,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(g,\psi)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & (B,t)
\end{tikzcd}
\quad \text{est une 2-cellule} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B
\end{tikzcd}
$$

satisfaisant l'égalité suivante:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "f"] & & B \arrow[dd, "t"] \\
& \Downarrow\phi & \\
A \arrow[uu, "s"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta"] & & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[dd, leftarrow, "s"'] & & B \arrow[dd, "t"] \\
& \Downarrow\psi & \\
A \arrow[rr, bend right, "g"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

La bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

La composée de deux 1-cellules

$$(A,s) \xrightarrow{(f,\phi)} (B,t) \xrightarrow{(g,\psi)} (C,u)$$

est définie par le co-égaliseur des deux 2-cellules décrites par les deux manières de composer:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \cdot\phi"] & B \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "f"'] \arrow[rrr, "g\otimes f"'] & {} & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] \arrow[drr, "g"'] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\psi\cdot \Downarrow"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rrr, "g\otimes f"'] & & {} & C
\end{tikzcd}$$

Notation: on note ce co-égaliseur $g \overset{t}{\otimes} f$.

Nous ferons donc l'hypothèse

(1) que la catégorie $\mathcal{B}(A,B)$ dispose de co-égaliseurs, pour tout A, B,

(2) que la composition horizontale $\otimes$ dans $\mathcal{B}$ préserve ces co-égaliseurs.

Remarque

La 2-cellule $\cdot\phi$ est définie de la manière suivante:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[u, bend left=60, "id"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \cdot\phi"] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[u, bend left=60, "id"] \arrow[u, phantom, bend left=30, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] \arrow[u, "s"'] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \phi"] & B
\end{tikzcd}
$$

Cette opération consiste à appliquer la transformation de monade

$$\mathcal{B}(A, t) \longrightarrow \mathcal{B}(s, t)$$

pour transformer la $\mathcal{B}(s, t)$-algèbre (f, ϕ) en une $\mathcal{B}(A, t)$-algèbre $(f, \cdot\phi)$.

La $\mathcal{B}(t, C)$-algèbre $(g, \psi\cdot)$ est construite de manière duale.

Propriété clef

Soient trois monades

$$A \xrightarrow{s} A \qquad B \xrightarrow{t} B \qquad C \xrightarrow{u} C$$

La composée

$$s \xrightarrow{\quad g \overset{t}{\otimes} f \quad} u$$

de deux modules

$$s \xrightarrow{\quad f \quad} t \xrightarrow{\quad g \quad} u$$

est un module pour la monade

$$\mathcal{B}(s,u) \quad : \quad \mathcal{B}(A,C) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,C).$$

Définition du module $g \overset{t}{\otimes} f$

Il s'agit de définir ici une 2-cellule

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g \overset{t}{\otimes} f"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\ \theta"] & & C \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[rr, "g \overset{t}{\otimes} f"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

définissant une loi d'algèbre. Il est utile de remarquer que la 2-cellule θ a pour domaine et codomaine deux co-égaliseurs:

$$
\begin{tikzcd}
u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \arrow[d, phantom, "(1)"] & & g \otimes t \otimes f \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \arrow[d, phantom, "(2)"] \\
u \otimes g \otimes f \otimes s \arrow[d, Rightarrow] & & g \otimes f \arrow[d, Rightarrow] \\
u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \arrow[rr, Rightarrow, "\theta"] & & g \overset{t}{\otimes} f
\end{tikzcd}
$$

Définition du module $g \overset{t}{\otimes} f$

Pour définir la 2-cellule θ, il suffit donc de donner une paire θ_1, θ_2 de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \arrow[rr, Rightarrow, "\theta_1"] \arrow[d, Rightarrow, bend right, "\alpha_1"'] \arrow[d, Rightarrow, bend left, "\beta_1"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & & g \otimes t \otimes f \arrow[d, Rightarrow, bend right, "\alpha_2"'] \arrow[d, Rightarrow, bend left, "\beta_2"] \arrow[d, phantom, "(2)"] \\
u \otimes g \otimes f \otimes s \arrow[rr, Rightarrow, "\theta_2"] & & g \otimes f
\end{tikzcd}$$

telle que les égalités entre 2-cellules

$$\theta_2 \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \theta_1 \qquad\qquad \theta_2 \circ \beta_1 = \beta_2 \circ \theta_1$$

soient satisfaites.

D'où l'idée de travailler sur la paire θ_1, θ_2 plutôt que sur θ.

Définition du module $g \overset{t}{\otimes} f$

Ainsi, la 2-cellule

$$\theta \quad : \quad u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \quad \Rightarrow \quad g \overset{t}{\otimes} f$$

est entièrement définie par la paire de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & {} & {} \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur, "f"'] & & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \xRightarrow{\theta_1} g \otimes t \otimes f$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}\quad\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & {} & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes g \otimes f \otimes s \xRightarrow{\theta_2} g \otimes f$$

Définition du module $g \overset{t}{\otimes} f$

Bien entendu, on doit vérifier que le diagramme de 2-cellules commute

$$\begin{tikzcd}
u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha_1"'] & g \otimes t \otimes f \arrow[d, Rightarrow, "\alpha_2"] \\
u \otimes g \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta_2"] & g \otimes f
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que les deux 2-cellules coïncident:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "t"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\overset{\cdot\phi}{\Rightarrow}"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur] \arrow[uurr, "f"] & & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "t"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr] \arrow[r, phantom, shift left=0, "\overset{\cdot\phi}{\Rightarrow}"] & & \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uurr, "f"] & & & B
\end{tikzcd}$$

Définition du module $g \overset{t}{\otimes} f$

De manière symétrique, on doit s'assurer que le diagramme de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\beta_1"'] & g \otimes t \otimes f \arrow[d, Rightarrow, "\beta_2"] \\
u \otimes g \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow, "\theta_2"] & g \otimes f
\end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire que les deux 2-cellules coïncident:

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "t"] \arrow[ddrr, "g"'] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr] \arrow[d, phantom, "\overset{\psi\cdot}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & {} \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur] & & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[r, "t"] \arrow[ddrr, "g"'] \arrow[drr] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\overset{\psi\cdot}{\Leftarrow}"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & {} \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur] & & & B
\end{tikzcd}$$

La paire θ_1, θ_2 définit ainsi une 2-cellule $\theta : u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \Rightarrow g \overset{t}{\otimes} f$.

Démonstration que $g \overset{t}{\otimes} f$ définit bien un module

La 2-cellule composite v

$$u \otimes u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \otimes s \xRightarrow{u \otimes \theta \otimes s} u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \xRightarrow{\theta} g \overset{t}{\otimes} f$$

est décrite par la paire de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr] \arrow[dddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uuur, "f"] & & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \otimes s \xRightarrow{v_1} g \otimes t \otimes f$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr] \arrow[dddr, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uur] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uuur, "f"] & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes u \otimes g \otimes f \otimes s \otimes s \xRightarrow{v_2} g \otimes f$$

Démonstration que $g \overset{t}{\otimes} f$ définit bien un module

La 2-cellule composite

$$u \otimes u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \otimes s \xRightarrow{\mu \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes \mu} u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \xRightarrow{\theta} g \overset{t}{\otimes} f$$

est décrite par la même paire de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dddr, bend right, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mu}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\mu}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uu, bend right] \arrow[uuur, bend right, "f"'] & & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes u \otimes g \otimes t \otimes f \otimes s \otimes s \xRightarrow{v_1} g \otimes t \otimes f$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dddr, bend right, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right] \arrow[l, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mu}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[d, "u"] \arrow[l, phantom, "\overset{\mu}{\Leftarrow}"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[uu, bend right] \arrow[uuur, bend right, "f"'] & & & B
\end{tikzcd}
\quad : \quad u \otimes u \otimes g \otimes f \otimes s \otimes s \xRightarrow{v_2} g \otimes f$$

Cela démontre la première égalité: $\theta \circ (s \otimes \theta \otimes u) = \theta \circ (\mu \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes \mu)$.

Démonstration que $g \overset{t}{\otimes} f$ définit bien un module

La 2-cellule composite

$$g \overset{t}{\otimes} f \xRightarrow{\eta \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes \eta} u \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes s \xRightarrow{\theta} g \overset{t}{\otimes} f$$

est décrite par la paire de 2-cellules identité

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}"] & {} & {} \arrow[r, phantom, "\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & B \arrow[d, dash, "id"] \arrow[d, bend right] \\
A \arrow[u, bend right] \arrow[uur, bend right, "f"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & & & B \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd} \quad : \quad g \otimes t \otimes f \xRightarrow{id} g \otimes t \otimes f$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\phi\cdot}{\Rightarrow}\quad\overset{\cdot\psi}{\Leftarrow}"] & {} & B \arrow[d, dash, "id"] \arrow[d, bend right] \\
A \arrow[u, bend right] \arrow[uur, bend right, "f"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & & B \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd} \quad : \quad g \otimes f \xRightarrow{id} g \otimes f$$

Cela démontre la seconde égalité: $\theta \circ (\eta \otimes g \overset{t}{\otimes} f \otimes \eta) = 1.$

Exemple: la bicatégorie des modules d'anneaux

Soit k un corps, et $\mathbf{Vect}$ la catégorie monoïdale de ses espaces vectoriels.

Soit

$$\mathcal{B} \quad = \quad \Sigma\,\mathbf{Vect}$$

la bicatégorie obtenue par suspension de $\mathbf{Vect}$.

Alors, la catégorie des modules sur $\mathbf{Vect}$ est définie par

$$\mathbf{Mod}(\Sigma\mathbf{Vect})$$

Exemple: la bicatégorie $\mathbf{Span}$

Span est une bicatégorie de comonades sur la bicatégorie

$$\mathcal{B} \quad = \quad \Sigma\,\mathbf{Ens}$$

obtenue par soulèvement sur la catégorie cartésienne $\mathbf{Ens}$ des ensembles et des fonctions:

$$\mathbf{Span} = \mathbf{Comod}(\Sigma\,\mathbf{Ens})$$

où

$$\mathbf{Comod}(\mathcal{B}) \quad = \quad (\mathbf{Mod}(\mathcal{B}^{co}))^{co}$$

Autrement dit, on peut voir $\mathbf{Span}$ comme une catégorie de comonoïdes sur $\mathbf{Ens}$.

Composition par égaliseurs plutôt que par coégaliseurs.

Quatrième partie

Fermeture

Fermeture à tous les étages

Fermeture

Soit une 2-cellule

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dr, "g"] & \\ s \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\ \theta"] & & u \end{tikzcd}$$

dans la bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

$$\boxed{\theta \quad : \quad g \overset{t}{\otimes} f \quad \Rightarrow \quad h}$$

Fermeture

Cela revient à dire que la 2-cellule θ de $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$ est entièrement décrite par une 2-cellule de $\mathcal{B}$

$$g \otimes f \quad \Rightarrow \quad h$$

qui fait commuter les trois diagrammes

$$\begin{tikzcd}
g \otimes t \otimes f \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \arrow[d, phantom, "(1)"] \\
g \otimes f \arrow[d, Rightarrow] \\
h
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \otimes g \otimes f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & g \otimes f \arrow[d, Rightarrow] \\
u \otimes h \arrow[r, Rightarrow] & h
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
g \otimes f \otimes s \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & g \otimes f \arrow[d, Rightarrow] \\
h \otimes s \arrow[r, Rightarrow] & h
\end{tikzcd}$$

dans la bicatégorie $\mathcal{B}$.

Fermeture

La 2-cellule de la bicatégorie $\mathcal{B}$ induite par fermeture

$$f \quad \Rightarrow \quad g \multimap h$$

fait commuter les trois diagrammes

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d, Rightarrow] \\
g \multimap h \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \arrow[d, phantom, "(2)"] \\
(u \otimes g) \multimap h
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t \otimes f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & f \arrow[d, Rightarrow] \\
t \otimes (g \multimap h) \arrow[r, Rightarrow] & g \multimap h
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f \otimes s \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & f \arrow[d, Rightarrow] \\
(g \multimap h) \otimes s \arrow[r, Rightarrow] & g \multimap h
\end{tikzcd}$$

dans la bicatégorie $\mathcal{B}$.

Fermeture

Il y a donc bijection entre les 2-cellules de module sur $\mathcal{B}(s,u)$

$$g \overset{t}{\otimes} f \quad \Rightarrow \quad h$$

et les 2-cellule de module sur $\mathcal{B}(s,t)$

$$f \quad \Rightarrow \quad g \overset{u}{\multimap} h$$

naturelle en f, g, h, où la 1-cellule $g \overset{u}{\multimap} h$ est définie comme l'égaliseur

$$\begin{tikzcd}
g \overset{u}{\multimap} h \arrow[d, Rightarrow] \\
g \multimap h \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \\
(u \otimes g) \multimap h
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\mathcal{B}(A,B)$.

Fermeture

Rappelons que la paire

$$\begin{tikzcd} g \multimap h \arrow[d, Rightarrow, bend right] \arrow[d, Rightarrow, bend left] \\ (u \otimes g) \multimap h \end{tikzcd}$$

provient de la paire

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u \otimes g \otimes (g \multimap h) \arrow[dl, Rightarrow, bend right] \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\ g \otimes (g \multimap h) \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & u \otimes h \arrow[dl, Rightarrow, bend left] \\ & h & \end{tikzcd}$$

Fermeture

Propriété:

Supposons que

- la bicatégorie $\mathcal{B}$ est fermée à gauche et à droite,
- chaque catégorie $\mathcal{B}(A, B)$ dispose d'égaliseurs,
- ces égaliseurs sont préservés par composition horizontale $\otimes$ dans $\mathcal{B}$.

Alors la bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$ est fermée à gauche et à droite.

Cinquième partie

2-foncteurs laxes

2-foncteurs laxes

Un 2-foncteur laxe

$$F \quad : \quad \mathcal{B} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}$$

est la donnée

– d'une fonction F qui associe une 0-cellule $F(A)$ de $\mathcal{M}$ à toute 0-cellule A de $\mathcal{B}$,

– d'un foncteur

$$F_{A,B} \quad : \quad \mathcal{B}(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}(FA,FB)$$

– de 2-cellules de comparaison

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F}_2 & : & F(g) \otimes F(f) & \Rightarrow & F(g \bullet f) \\ \tilde{F}_0 & : & id_{FA} & \Rightarrow & F(id_A) \end{array}$$

pour toute paire de 1-cellules A, B de la bicatégorie $\mathcal{B}$ faisant commuter les diagrammes suivants.

Diagrammes de cohérence

$$\begin{tikzcd}
(Fh \bullet Fg) \bullet Ff \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{\bullet}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{F} \bullet Ff"'] & Fh \bullet (Fg \bullet Ff) \arrow[d, Rightarrow, "Fh \bullet \tilde{F}"] \\
F(h \otimes g) \bullet Ff \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{F}"'] & Fh \bullet F(g \otimes f) \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{F}"] \\
F((h \otimes g) \otimes f) \arrow[r, Rightarrow, "F\alpha^{\otimes}"] & F(h \otimes (g \otimes f))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \bullet id \arrow[r, Rightarrow, "\rho"] \arrow[d, Rightarrow, "FA \bullet \tilde{F}"'] & FA \\
FA \bullet F(id) \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{F}"] & F(A \otimes id) \arrow[u, Rightarrow, "F\rho"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
id \bullet FB \arrow[r, Rightarrow, "\lambda"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{F} \bullet FB"'] & FB \\
F(id) \otimes FB \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{F}"] & F(id \otimes B) \arrow[u, Rightarrow, "F\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Transformations naturelles laxes

Pour toute 0-cellule A, la donnée d'une 1-cellule

$$FA \longrightarrow GA$$

et pour toute 1-cellule $f : A \longrightarrow B$, la donnée d'une 2-cellule

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi_f}{\Longrightarrow}"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB
\end{tikzcd}$$

satisfaisant les trois propriétés suivantes:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, bend right, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi_f}{\Longrightarrow}"] & GA \arrow[d, bend right, "Gf"'] \arrow[d, bend left, "Gg"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tilde{G}}{\Longrightarrow}"] \\
FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, bend right, "Ff"'] \arrow[d, bend left, "Fg"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tilde{F}}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi_g}{\Longrightarrow}"] & GA \arrow[d, bend left, "Gg"] \\
FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB
\end{tikzcd}$$

Transformations naturelles laxes

$$
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[rr, "\varphi_A"] \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi_f}{\Longrightarrow}"] & & GA \arrow[dl, "Gf"'] \arrow[dd, "G(g\circ f)"] \\
FB \arrow[rr, "\varphi_B"] \arrow[dr, "Fg"'] & & GB \arrow[dr, "Gg"] \arrow[r, phantom, "\overset{\tilde{G}}{\Longrightarrow}"] & \\
 & FC \arrow[rr, "\varphi_C"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varphi_g}{\Longrightarrow}"] & & GC
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\varphi_{(g\circ f)}}{\Longrightarrow}"] & GA \arrow[dd, "G(g\circ f)"] \\
FB \arrow[dr, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\tilde{F}}{\Longrightarrow}"] & & \\
 & FC \arrow[r, "\varphi_C"'] & GC
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d] \arrow[d, bend right=80, "id_{FA}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi_{id}}{\Longrightarrow}"] & GA \arrow[d, "G(id_A)"] \\
FA \arrow[r, "\varphi_A"'] & GA
\end{tikzcd}
\overset{\tilde{F}}{\Longrightarrow}
=
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, bend right=80, "id_{FA}"'] & GA \arrow[d, bend right=80, "id_{GA}"'] \arrow[d, "G(id_A)"] \arrow[d, phantom, shift left=2ex, "\overset{\tilde{G}}{\Longrightarrow}"] \\
FA \arrow[r, "\varphi_A"'] & GA
\end{tikzcd}
$$

Modifications laxes

Une modification laxe

$$\theta \quad : \quad \varphi \quad \Rightarrow \quad \psi$$

est la donnée d'une 2-cellule

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_f}{\Rightarrow}"] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB
\end{tikzcd}$$

pour toute 1-cellule $f : A \longrightarrow B$, cette famille de 2-cellules satisfaisant la propriétés suivantes:

Modifications laxes

$$
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[rr, "\varphi_A"] \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta_f}{\Rightarrow}"] & & GA \arrow[dl, "Gf"'] \arrow[dd, "G(g\circ f)"] \\
FB \arrow[rr, "\psi_B"] \arrow[dr, "Fg"'] & & GB \arrow[dr, "Gg"] \arrow[r, phantom, "\overset{\tilde{G}}{\Rightarrow}"] & \\
 & FC \arrow[rr, "\psi_C"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\psi_g}{\Rightarrow}"] & & GC
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & FA \arrow[rr, "\varphi_A"] \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi_f}{\Rightarrow}"] & & GA \arrow[dl, "Gf"'] \arrow[dd, "G(g\circ f)"] \\
FB \arrow[rr, "\varphi_B"] \arrow[dr, "Fg"'] & & GB \arrow[dr, "Gg"] \arrow[r, phantom, "\overset{\tilde{G}}{\Rightarrow}"] & \\
 & FC \arrow[rr, "\psi_C"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\theta_g}{\Rightarrow}"] & & GC
\end{tikzcd}
$$

Observations

– une monade est la même chose qu'un 2-foncteur laxe

$$(A,s) \quad : \quad \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{B}$$

– un homomorphisme est la même chose qu'une transformation naturelle laxe

$$(A,s) \Rightarrow (B,t) \quad : \quad \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{B}$$

– une 2-cellule d'homomorphismes est la même chose qu'une modification laxe

$$(A,s) \Rightarrow (B,t) \quad : \quad \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Sixième partie

Le pseudo-foncteur

$$\mathbf{Mon}(\mathcal{B}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Mod}(\mathcal{B})$$

Des morphismes aux modules

Définition du pseudo-foncteur

Le pseudo-foncteur transporte toute 1-cellule

$$(f,\tilde{f}) \quad : \quad (A,s) \longrightarrow (B,t)$$

de la bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$ constituée d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

et d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad f \otimes s \quad \Rightarrow \quad t \otimes f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

en la 1-cellule

$$t \otimes f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

munie de la structure de $\mathcal{B}(s,t)$-module suivante:

$$t \otimes t \otimes f \otimes s \quad \xRightarrow{t \otimes t \otimes \tilde{f}} \quad t \otimes t \otimes t \otimes f \quad \xRightarrow{\mu \otimes f} \quad t \otimes f$$

Diagrammatiquement,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tilde{f}}{\Rightarrow}"] & B \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tilde{f}}{\Rightarrow}"] & B \arrow[r, "t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mu"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "t"] \arrow[r, "t"'] & B
\end{tikzcd}$$

Définition du pseudo-foncteur

Le pseudo-foncteur transporte toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad (f, \tilde{f}) \Rightarrow (g, \tilde{g}) \quad : \quad (A, s) \longrightarrow (B, s)$$

de la bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$ définie par une 2-cellule

$$\theta \quad : \quad f \otimes s \Rightarrow t \otimes g \quad : \quad A \longrightarrow B$$

en la 2-cellule

$$t \otimes f \xRightarrow{\eta} t \otimes f \otimes s \xRightarrow{\theta} t \otimes t \otimes g \xRightarrow{\mu \otimes g} t \otimes g$$

Diagrammatiquement,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, ""] & B \\ A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta}{\Rightarrow}"] & B \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mu"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta}{\Rightarrow}"] & B \arrow[u, "t"'] \arrow[r, "t"'] & B \end{tikzcd}$$

Propriété clef

Supposons donnée une 1-cellule de la bicatégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

$$(f_*, \tilde{f_*}) \quad : \quad (A, s) \longrightarrow (B, t)$$

dont la 1-cellule support f_* dispose d'un adjoint à droite

$$f_* \quad \dashv \quad f^*$$

dans la bicatégorie $\mathcal{B}$. Alors, le module associé

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_*"] & B \arrow[r, "t"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f_*"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\tilde{f_*}}{\Rightarrow}"] & B \arrow[u, "t"'] \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mu"] & B
\end{tikzcd}$$

a le module

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "t"] & B \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "t"] & A \\
B \arrow[u, "t"] \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mu"] & B \arrow[r, "f^*"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\tilde{f^*}}{\Leftarrow}"] & A \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

pour adjoint à droite dans la bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$.

Propriété additionelle

Le 2-foncteur pseudo

$$\mathbf{Mon}(\mathcal{B}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Mod}(\mathcal{B})$$

est localement plein et fidèle.

Autrement dit, toute 2-cellule dans la bicatégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{B})$

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, bend left, "f_*"] \arrow[r, bend right, "g_*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi"] & t \end{tikzcd}$$

est l'image $\varphi = \theta_*$ d'une 2-cellule θ unique dans la 2-catégorie $\mathbf{Mon}(\mathcal{B})$

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & t \end{tikzcd}$$