

# Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Ecole Normale Supérieure

## Plan de la séance

- 1 – Lambda-calcul avec effets
- 2 – Théorie formelle des monades
- 3 – Monades fortes

# Première partie

## Lambda-calcul avec effets

Un langage avec effets de bord

# Lambda-calcul avec effets

Une notion de type étendue:

$$A, B ::= \alpha \mid A \rightarrow B \mid A \times B \mid T(A).$$

Deux nouvelles formes de séquents:

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

qui signifie que  $P$  et  $Q$  sont égaux et de type  $A$ , et

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

qui signifie que  $P$  est sans effet de bord et de type  $A$ .

# Conditions de bonne formation

A noter les conditions de bonne formation suivantes:

1. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

ne peut être valide que si les séquents

$$\Gamma \vdash P : A \quad \text{et} \quad \Gamma \vdash Q : A$$

sont valides.

2. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

ne peut être valide que si le séquent

$$\Gamma \vdash P : A$$

est valide.

# Lambda-calcul avec effets

Variable	$\frac{}{x : A \vdash x : A}$
Abstraction	$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightarrow B}$
Application	$\frac{\Gamma \vdash P : A \rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$
Contraction	$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$
Permutation	$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$

# Lambda-calcul avec effets

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1 P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2 P : B}$$

Unité

$$\overline{\Gamma \vdash * : 1}$$

## Lambda-calcul avec effets

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash \text{let } x = P \text{ in } Q : B}$$

$$[-] \quad \frac{\Gamma \vdash P : A}{\Gamma \vdash [P] : TA}$$

$$\mu \quad \frac{\Gamma \vdash P : TA}{\Gamma \vdash \mu(P) : A}$$

## Règles générales

$$\overline{x : A \vdash x \downarrow A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P : B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P \downarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] \downarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \quad \Delta, x : A \vdash P_1 \equiv P_2 : B}{\Gamma, \Delta \vdash P_1[x := Q] \equiv P_2[x := Q] : B}$$

## Règles pour la substitution

$$\Gamma \vdash \text{let } x = P \text{ in } x \equiv P : A$$

$$\Gamma \vdash \text{let } x_2 = (\text{let } x_1 = Q_1 \text{ in } Q_2) \text{ in } P \equiv \text{let } x_1 = Q_1 \text{ in } (\text{let } x_2 = Q_2 \text{ in } P) : A$$

lorsque la variable  $x_1$  n'est pas libre dans  $P$ .

$$\Gamma \vdash \text{let } x_1 = x_2 \text{ in } P \equiv P[x_1 := x_2] : A$$

$$\Gamma \vdash P\vec{Q} \equiv \text{let } \vec{x} = \vec{Q} \text{ in } P\vec{x} : A$$

## Règles pour les types calculatoires

$$\Gamma \vdash [P] \downarrow TA$$

$$\Gamma \vdash \mu([P]) \equiv P : A$$

$$x : A \vdash [\mu(x)] \equiv x : TA$$

## Règles pour l'unité

$$\vdash * \downarrow 1$$

$$x:1 \vdash * \equiv x : 1$$

## Règles pour le produit cartésien

$$x : A, y : B \vdash \langle x, y \rangle \downarrow A \times B$$

$$\Gamma, x : A \vdash \langle P, Q \rangle \equiv \text{let } x, y = P, Q \text{ in } \langle x, y \rangle : A \times B$$

$$x : A_1 \times A_2 \vdash \pi_i(x) \downarrow A_i$$

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2 \vdash \pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) \equiv x_i : A_i$$

$$x : A \times B \vdash \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \equiv x : A \multimap B$$

## Règles pour le $\lambda$ -calcul

$$\Gamma \vdash (\lambda x.P) \downarrow A \rightarrow B$$

$$\Gamma, x:A \vdash (\lambda x.P)x \equiv P : B$$

$$x:A \rightarrow B, y:A \vdash \lambda y.xy \equiv x : A \rightarrow B$$

# Deuxième partie

## Théorie formelle des monades

Catégorie de Kleisli, catégorie d'Eilenberg-Moore

## Monade formelle

Soit  $A$  une 0-cellule dans une 2-catégorie  $\mathcal{B}$ .

Une monade  $s$  sur la 0-cellule  $A$  est une 1-cellule

$$s : A \longrightarrow A$$

munie d'une multiplication

$$\mu : s \circ s \Rightarrow s : A \longrightarrow A$$

et d'une unité

$$\eta : Id_A \Rightarrow s : A \longrightarrow A$$

satisfaisant les lois d'associativité et d'unité.

Autrement dit, une monade  $s$  est un monoïde de la catégorie monoïdale  $\mathcal{B}(A, A)$ .

# **Toute adjonction définit une monade**

(démonstration graphique)

# Algèbre

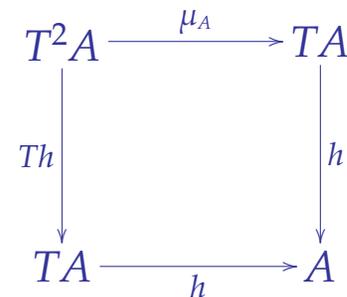
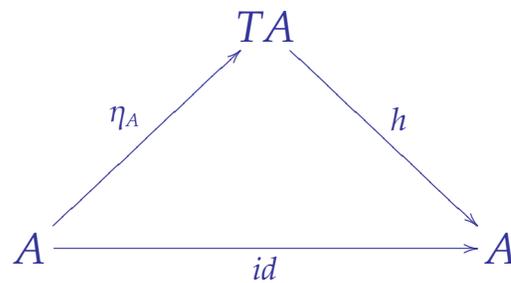
Une algèbre de la monade  $(T, \mu, \eta)$  est une paire  $(A, h)$  constituée

— d'un objet  $A$  morphisme

— d'un morphisme

$$h : TA \longrightarrow A$$

faisant commuter



# Morphismes d'algèbre

Un morphisme d'algèbre

$$f : (A, h_A) \longrightarrow (B, h_B)$$

est un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

entre les objets sous-jacents dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ h_A \downarrow & & \downarrow h_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commute.

# Catégorie de Kleisli

La catégorie de Kleisli  $\mathcal{C}_T$  d'une monade  $(T, \mu, \eta)$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  a

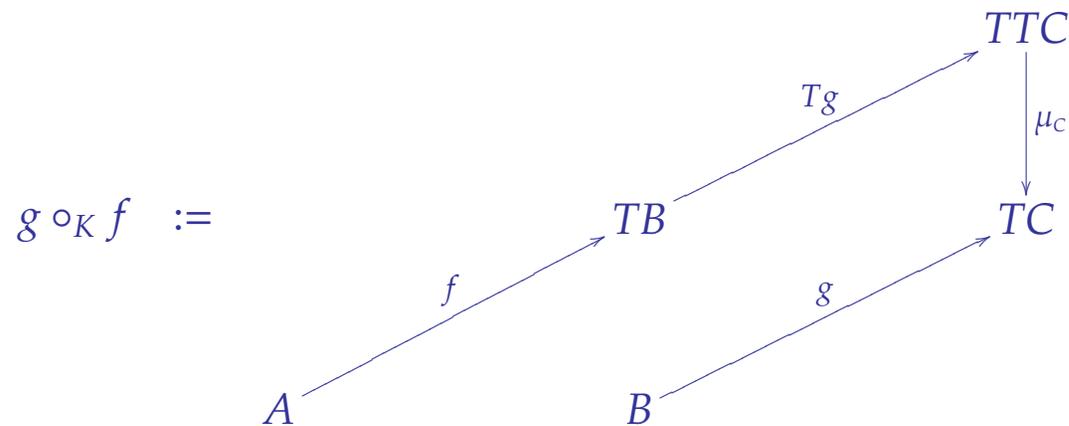
— pour objets les objets de  $\mathcal{C}$ ,

— pour morphismes  $A \rightarrow B$  les morphismes de  $A \rightarrow TB$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ ,

Les identités  $A \rightarrow A$  sont données par les morphismes

$$\eta_A : A \rightarrow TA.$$

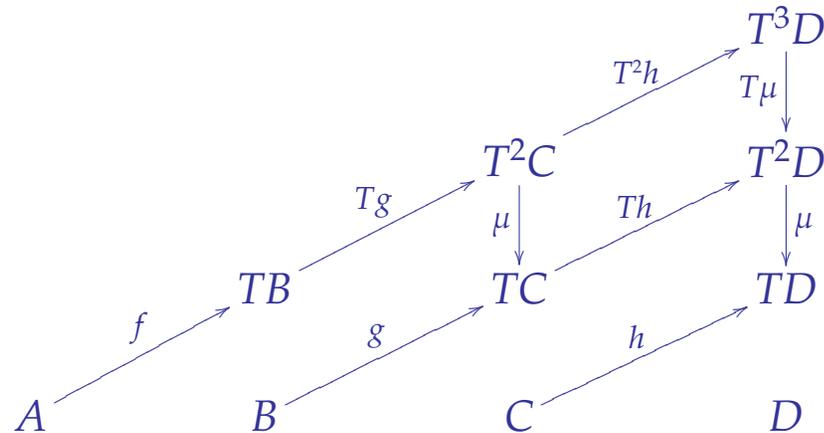
On compose  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  de la manière suivante:



## Exercice

Montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Remarque: la démonstration d'associativité de la loi de composition amène à considérer le diagramme



dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , et de vérifier que les deux morphismes de  $A$  à  $TD$  coïncident.

## Principe de représentation

Toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t : A \longrightarrow A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X, t) : \mathcal{B}(X, A) \longrightarrow \mathcal{B}(X, A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \quad \mapsto \quad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute 0-cellule  $X$  de la 2-catégorie  $\mathcal{B}$ .

**Exercice.** Vérifier que  $\mathcal{B}(X, t)$  définit bien une monade sur  $\mathcal{B}(X, A)$ .

## Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t : A \longrightarrow A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t, X) : \mathcal{B}(A, X) \longrightarrow \mathcal{B}(A, X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \quad \mapsto \quad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute 0-cellule  $X$  de la 2-catégorie  $\mathcal{B}$ .

**Exercice.** Montrer que  $\mathcal{B}(t, X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$ .

## Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens 2-catégorique)

$$s : A \longrightarrow A \quad t : B \longrightarrow B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s, t) : \mathcal{B}(A, B) \longrightarrow \mathcal{B}(A, B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$A \xrightarrow{f} B \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \uparrow s & & \downarrow t \\ & A & & B \end{array}$$

cela pour toute 0-cellule  $X$  de la 2-catégorie  $\mathcal{B}$ .

# Objet de Eilenberg-Moore

Le 2-foncteur

$$X \mapsto \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(A,t)} : \mathcal{B}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

est 2-représentable par un objet  $A^t$  de la 2-catégorie  $\mathcal{B}$ .

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\phi_{X,A} : \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X,t)} \cong \mathcal{B}(X, A^t)$$

2-naturel en  $X$ .

## Propriété de 2-naturalité

Pour toute 1-cellule

$$X \xrightarrow{f} Y$$

le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \downarrow \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} & & \downarrow \mathcal{B}(f, A^t) \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

commute.

$\mathcal{B}(f, t)$  désigne ici le morphisme de monade  $\mathcal{B}(Y, t) \longrightarrow \mathcal{B}(X, t)$  induit par  $f$

# Propriété de 2-naturalité

Pour toute 2-cellule

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \theta \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

les transformations naturelles induites

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} \left( \Rightarrow \right) \mathcal{B}(g, A)^{\mathcal{B}(g, t)} & & \mathcal{B}(g, A^t) \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(Y, A)^{\mathcal{B}(Y, t)} & \xrightarrow{\phi_{Y, A}} & \mathcal{B}(Y, A^t) \\ \mathcal{B}(f, A)^{\mathcal{B}(f, t)} \left( \Rightarrow \right) \mathcal{B}(g, A)^{\mathcal{B}(g, t)} & & \mathcal{B}(f, A^t) \left( \Rightarrow \right) \mathcal{B}(g, A^t) \\ \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X, t)} & \xrightarrow{\phi_{X, A}} & \mathcal{B}(X, A^t) \end{array}$$

coincident.

# Objet de Eilenberg-Moore

L'isomorphisme  $\phi_{A^t, A^t}$  associe à la 1-cellule identité

$$id_{A^t} : A^t \longrightarrow A^t$$

une 1-cellule

$$u^t : A^t \longrightarrow A$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{u} : t \circ u^t \Rightarrow u^t : A^t \longrightarrow A$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade  $\mathcal{B}(A^t, t)$ , c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

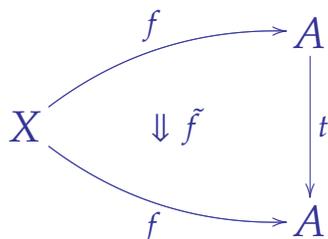
$$\begin{array}{ccc}
 & t \circ u^t & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \tilde{u} \\
 u^t & \xrightarrow{id} & u^t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 t \circ t \circ u^t & \xrightarrow{\mu} & t \circ u^t \\
 \downarrow t \circ \tilde{u} & & \downarrow \tilde{u} \\
 t \circ u^t & \xrightarrow{\tilde{u}} & u^t
 \end{array}$$

Lorsque  $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$ , le foncteur d'oubli  $u^t$  et la transformation naturelle  $\tilde{u}$  décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade  $t$ .

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule  $\tilde{f}$  munissant la 1-cellule  $f$  d'une structure de  $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre



il existe une et une seule 1-cellule

$$X \xrightarrow{\bar{f}} A^t$$

telle que  $\tilde{f}$  se décompose en  $\bar{f}$  suivi de la 2-cellule  $\tilde{u}$  définie plus haut:

Remarque: la 1-cellule  $\bar{f}$  est définie comme l'image de  $(f, \tilde{f})$  par le foncteur  $\phi_{X,A}$ .

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta : f \Rightarrow g : X \longrightarrow A$$

définissant une 2-cellule de  $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre entre  $(f, \tilde{f})$  et  $(g, \tilde{g})$ , c-à-d telle que

il existe une et une seule 2-cellule

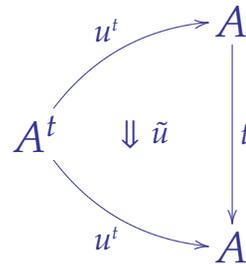
$$\bar{\theta} : \bar{f} \Rightarrow \bar{g} : X \longrightarrow A^t$$

telle que  $\theta$  se décompose en  $\bar{\theta}$  suivi de la 1-cellule  $u^t$

Remarque: la 2-cellule  $\bar{\theta}$  est l'image de  $\theta : (f, \tilde{f}) \Rightarrow (g, \tilde{g})$  par le foncteur  $\phi_{X,A}$ .

# Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la  $\mathcal{B}(A^t, t)$ -algèbre



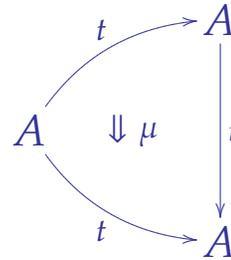
la caractérisent comme objet de Eilenberg-Moore associé à la monade  $t$ .

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Noter que la 2-cellule  $\tilde{u}$  fait bien partie de la définition d'objet d'Eilenberg-Moore: elle reflète la famille de foncteurs  $\phi$  incluse dans la notion de 2-représentation.

# Construction: le foncteur libre

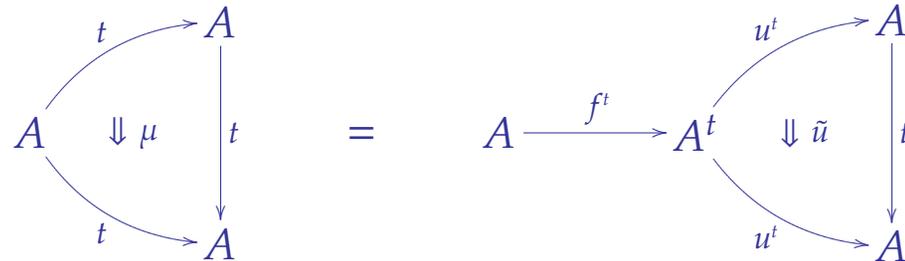
La multiplication de la monade  $t$  définit une structure de  $\mathcal{B}(A, t)$ -algèbre



Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A \xrightarrow{f^t} A^t$$

telle que



Dans le cas de  $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$ , le foncteur  $f^t$  coïncide avec le foncteur libre.

## Adjonction $f^t \dashv u^t$ associée

L'unité  $\eta$  de l'adjonction  $f^t \dashv u^t$  est définie par l'unité de la monade  $t$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \searrow f^t & \nearrow u^t \\
 & A^t & 
 \end{array}
 \quad \Downarrow \eta
 \quad := \quad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & t & 
 \end{array}$$

tandis que la counité  $\varepsilon$  est définie comme l'unique 2-cellule

$$\varepsilon : f^t \circ u^t \Rightarrow id : A^t \longrightarrow A^t$$

satisfaisant l'égalité

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 u^t \nearrow & & \searrow f^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t \xrightarrow{u^t} A
 \end{array}
 \quad \Downarrow \varepsilon
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 & A & \\
 u^t \nearrow & & \searrow t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t \xrightarrow{u^t} A
 \end{array}$$

# Egalités triangulaires (1)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule  $\varepsilon$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow u^t & \nearrow f^t \\
 & & A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow u^t & \nearrow t \\
 & & A
 \end{array}$$

et cette seconde égalité de la définition de  $f^t$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow u^t & \nearrow t \\
 & & A
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow id & \Downarrow \eta & \nearrow t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow t & \nearrow t \\
 & & A
 \end{array}$$

On en déduit que la 2-cellule considérée au départ vaut l'identité, et on conclut par propriété de relèvement (unique) sur la 2-cellule  $u^t$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{id} & A \\
 \searrow f^t & \Downarrow \eta & \nearrow u^t \\
 & A^t & \\
 & \xrightarrow{id} & A^t \\
 & \searrow u^t & \nearrow f^t \\
 & & A
 \end{array}
 = id$$

## Egalités triangulaires (2)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule  $\varepsilon$

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 u^t \nearrow & & & \searrow f^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & \Downarrow \varepsilon & & \Downarrow \eta & \\
 & & & & 
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 u^t \nearrow & & & \searrow t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A & \xrightarrow{id} & A \\
 & \Downarrow \tilde{u} & & \Downarrow \eta & 
 \end{array}$$

On conclut que

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \xrightarrow{id} & A \\
 u^t \nearrow & & & \searrow f^t \\
 A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & \Downarrow \varepsilon & & \Downarrow \eta & \\
 & & & & 
 \end{array}
 = id$$

par le fait que la 2-cellule

$$\tilde{u} : t \circ u^t \Rightarrow u^t : A^t \longrightarrow A$$

définit une algèbre de la monade  $\mathcal{B}(A^t, t)$ .

# Décomposition de la monade $t$

L'adjonction

$$f^t \dashv u^t$$

a la monade  $t$  pour monade associée.

Démonstration: tout d'abord,

$$t = f^t \circ u^t$$

par définition de  $f^t$ . Ensuite, l'unité  $\eta$  de l'adjonction coïncide par définition avec l'unité de la monade  $t$ . Pour finir, la multiplication

$$u^t \circ f^t \circ u^t \circ f^t \Rightarrow u^t \circ f^t$$

induite par l'adjonction s'écrit

$$\begin{array}{c}
 & & A & & \\
 & u^t \nearrow & & \searrow f^t & \\
 A & \xrightarrow{f^t} & A^t & \xrightarrow{id} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & & \Downarrow \varepsilon & & & & \\
 & & & & & & 
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 & & A & & \\
 & u^t \nearrow & & \searrow t & \\
 A & \xrightarrow{f^t} & A^t & \xrightarrow{u^t} & A \\
 & & \Downarrow \tilde{u} & & 
 \end{array}$$

et coïncide bien avec la multiplication de la monade, par définition de  $f^t$ .

# 1-cellule entre monades

Une 1-cellule entre deux monades

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \downarrow s & \longrightarrow & \downarrow t \\ A & & B \end{array}$$

est la donnée d'une 1-cellule

$$f : A \longrightarrow B$$

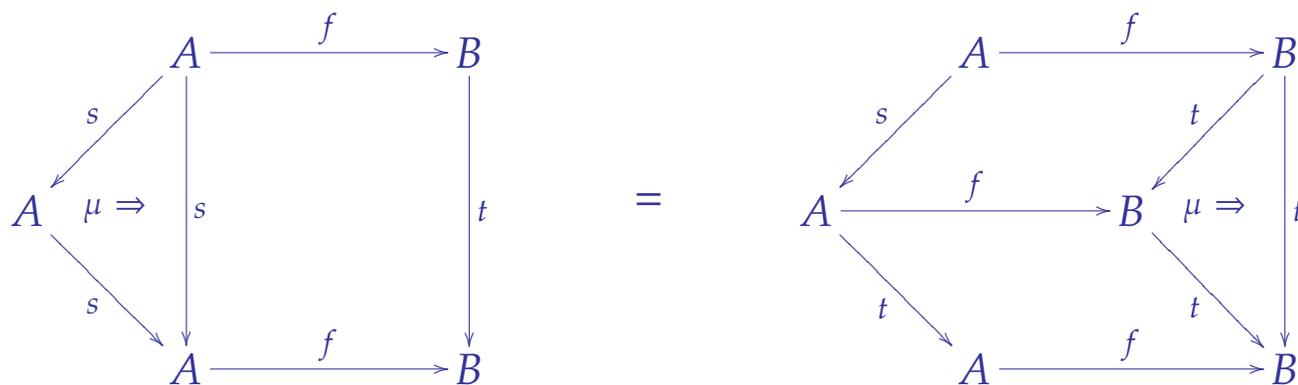
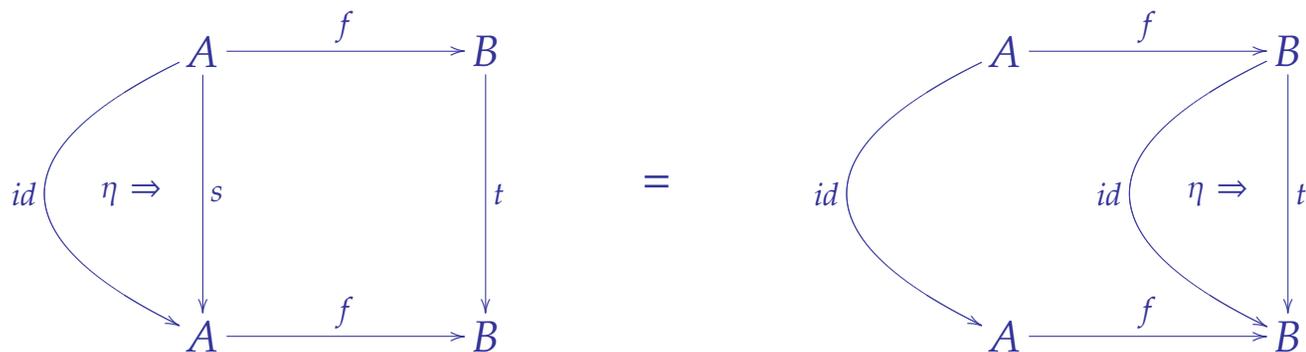
tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

commute

# 1-cellule entre monades

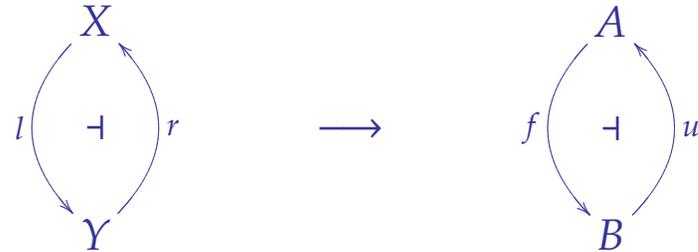
et les égalités suivantes sont satisfaites:



Notion élémentaire de morphisme entre monade.

# 1-cellule entre adjonctions

Une 1-cellule entre deux adjonctions

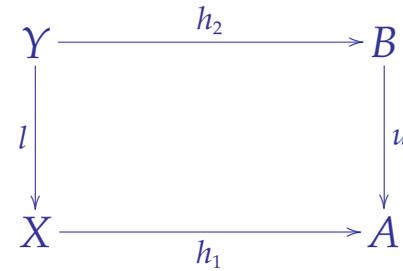
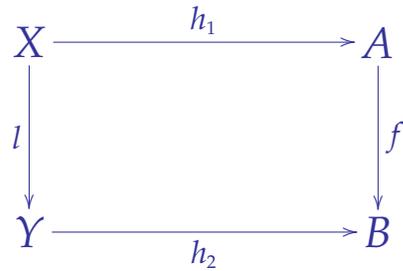


est la donnée de deux 1-cellules

$$h_1 : X \longrightarrow A$$

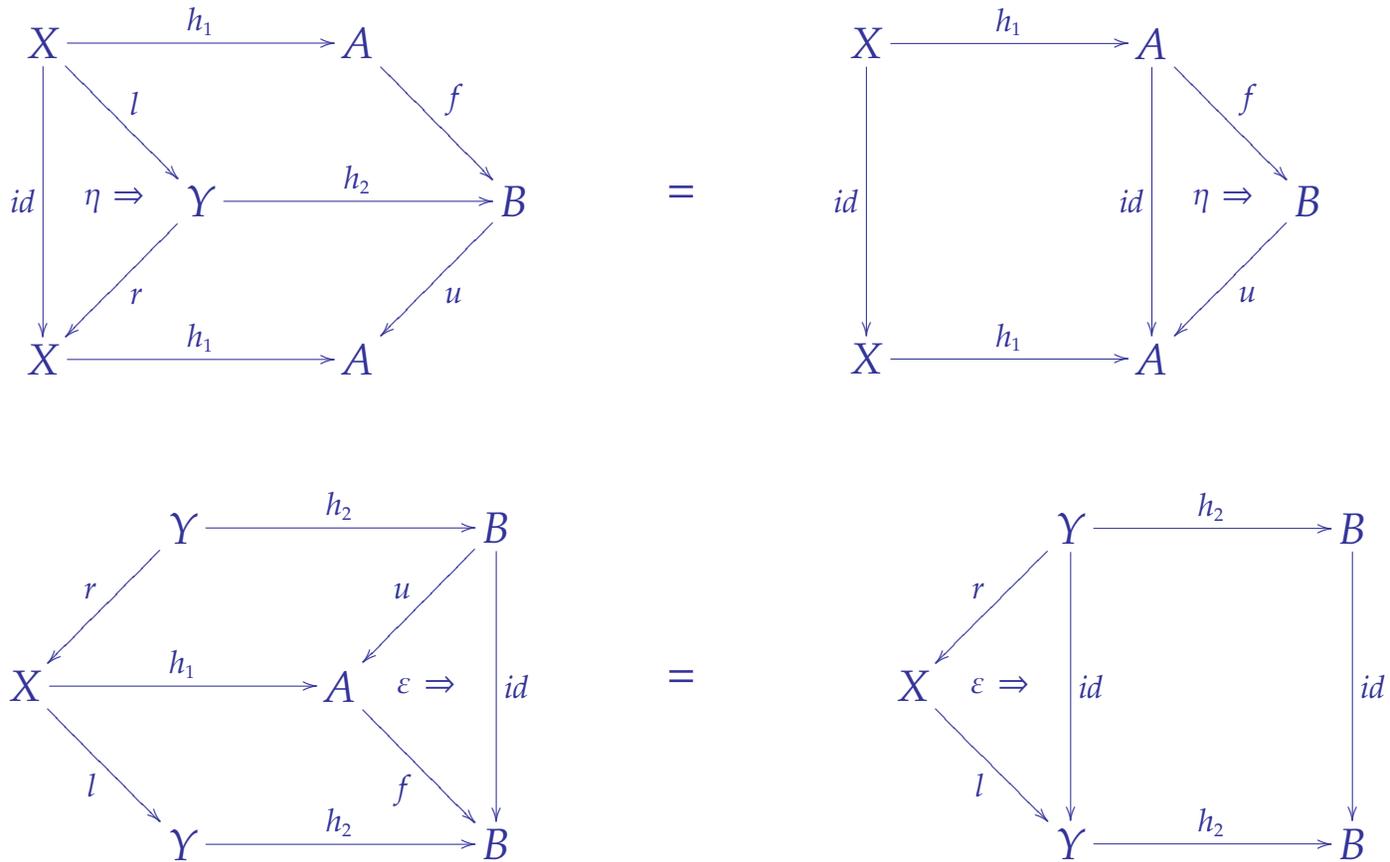
$$h_2 : Y \longrightarrow B$$

tels que les diagrammes suivants commutent:



# 1-cellule entre adjonctions

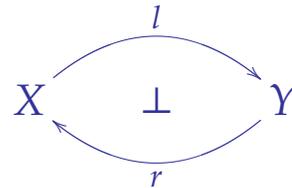
et les égalités suivantes sont satisfaites:



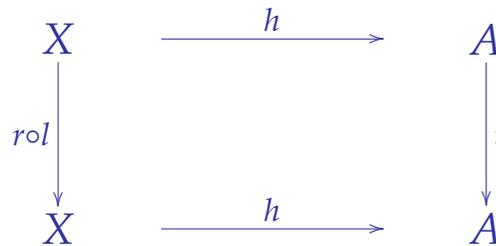
Toute 1-cellule d'adjonction induit une 1-cellule de monade.

# Propriété universelle de l'objet d'Eilenberg-Moore

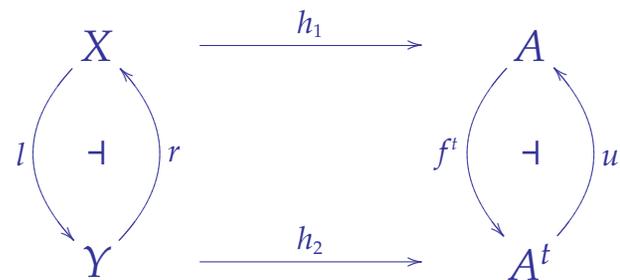
Réciproquement, supposons donnée une adjonction



Pour toute 1-cellule entre monades

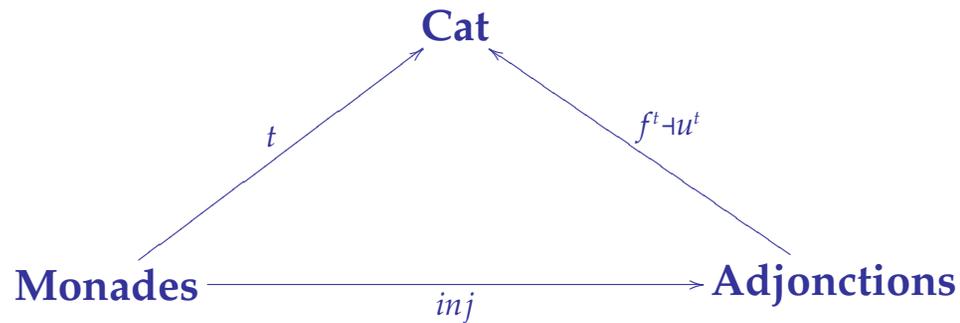


il existe une et une seule 1-cellule entre adjonctions



telle que la 1-cellule  $h_1$  coïncide avec la 1-cellule  $h$ .

# Extension de Kan à droite



- Monades** : 2-catégorie théorie des monades
- Adjonctions** : 2-catégorie théorie des adjonctions
- $t$  : 2-foncteur associé à la monade  $t$
- $f^t \dashv u^t$  : 2-foncteur associé à l'adjonction  $f^t \dashv u^t$

# Objet de Kleisli

Le 2-foncteur

$$X \mapsto \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t, X)} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

est 2-représentable par un objet  $A_t$ .

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\psi_{A, X} : \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t, X)} \cong \mathcal{B}(A_t, X)$$

2-naturel en  $X$ .

# Objet de Kleisli

L'isomorphisme  $\psi_{A_t, A_t}$  associe à la 1-cellule identité

$$id_{A_t} : A_t \longrightarrow A_t$$

une 1-cellule

$$f_t : A \longrightarrow A_t$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{f} : f_t \circ t \Rightarrow f_t : A \longrightarrow A_t$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade  $\mathcal{B}(t, A_t)$ , c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

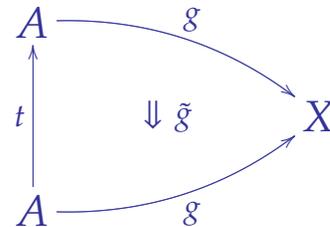
$$\begin{array}{ccc}
 & f_t \circ t & \\
 \eta \nearrow & & \searrow \tilde{f} \\
 f_t & \xrightarrow{id} & f_t
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_t \circ t \circ t & \xrightarrow{\mu} & f_t \circ t \\
 \tilde{f} \circ t \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\
 f_t \circ t & \xrightarrow{\tilde{f}} & f_t
 \end{array}$$

Lorsque  $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$ , le foncteur libre  $f_t$  et la transformation naturelle  $\tilde{f}$  décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade  $t$ .

# Propriété de relèvement

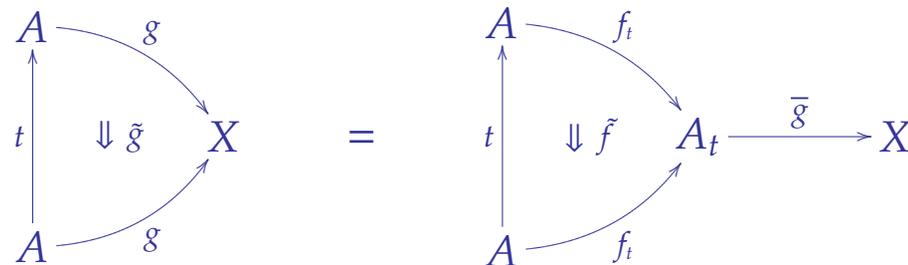
Pour toute 2-cellule  $\tilde{g}$  munissant la 1-cellule  $g$  d'une structure de  $\mathcal{B}(t, X)$ -algèbre



il existe une et une seule 1-cellule

$$A_t \xrightarrow{\bar{g}} X$$

telle que  $\tilde{g}$  se décompose en  $\bar{g}$  suivi de la 2-cellule  $\tilde{f}$  définie plus haut:



# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta : g_1 \Rightarrow g_2 : A \longrightarrow X$$

définissant une 2-cellule de  $\mathcal{B}(X, t)$ -algèbre entre  $(g_1, \tilde{g}_1)$  et  $(g_2, \tilde{g}_2)$ , c-à-d telle que

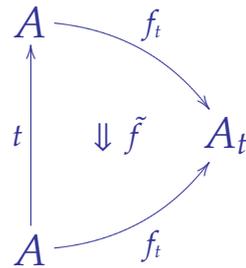
il existe une et une seule 2-cellule

$$\bar{\theta} : \bar{g}_1 \Rightarrow \bar{g}_2 : A_t \longrightarrow X$$

telle que  $\theta$  se décompose en la 1-cellule  $u^t$  suivie de  $\bar{\theta}$

# Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la  $\mathcal{B}(t, A_t)$ -algèbre



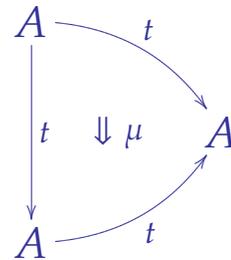
la caractérisent comme objet de Kleisli associé à la monade  $t$ .

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Ici encore, noter que la 2-cellule  $\tilde{f}$  fait partie de la définition d'objet de Kleisli.

# Construction: le foncteur d'oubli

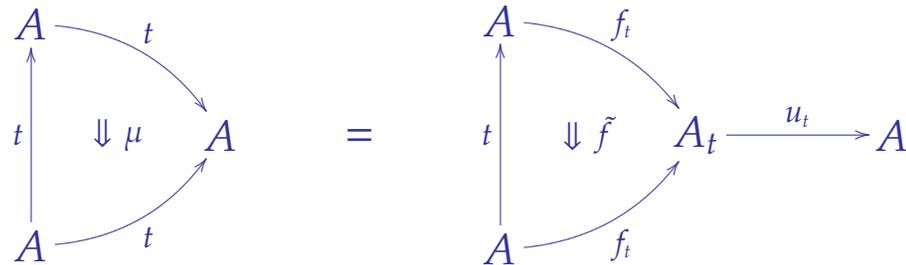
La multiplication de la monade  $t$  définit une structure de  $\mathcal{B}(t, A)$ -algèbre



Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

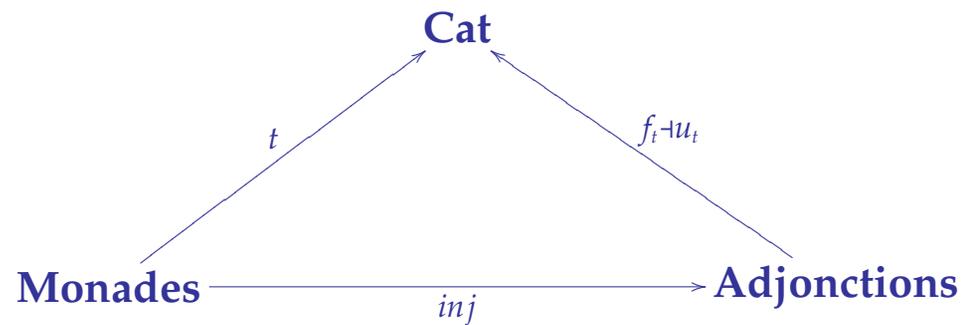
$$A_t \xrightarrow{u_t} A$$

telle que



Dans le cas de  $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$ , le foncteur  $u_t$  coïncide avec le foncteur d'oubli.

# Extension de Kan à gauche



- Monades** : 2-catégorie théorie des monades
- Adjonctions** : 2-catégorie théorie des adjonctions
- $t$  : 2-foncteur associé à la monade  $t$
- $f_t + u_t$  : 2-foncteur associé à l'adjonction  $f_t + u_t$

# Troisième partie

## Monades fortes

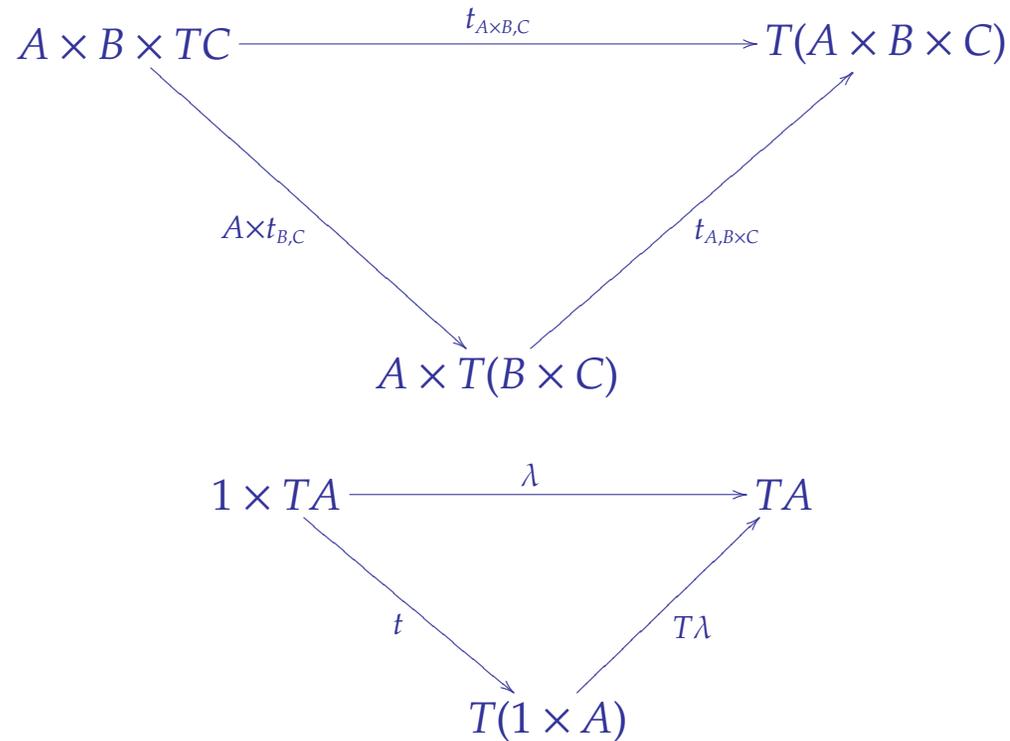
Interprétation catégorique du lambda-calcul avec  
effets

# Monade forte

Une monade est forte lorsqu'elle est équipée d'une famille de morphismes

$$t_{A,B} : A \times TB \longrightarrow T(A \times B)$$

naturelle en  $A$  et  $B$ , et telle que les diagrammes suivants commutent:



# Monade forte

$$\begin{array}{ccccc} A \times TT B & \xrightarrow{t} & T(A \times TB) & \xrightarrow{Tt} & TT(A \times B) \\ \downarrow A \times \mu & & & & \downarrow \mu \\ A \times TB & \xrightarrow{t} & & \xrightarrow{t} & T(A \times B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{id} & A \times B \\ \downarrow A \times \eta & & \downarrow \eta \\ A \times TB & \xrightarrow{t} & T(A \times B) \end{array}$$

## Modèle catégorique du $\lambda$ -calcul avec effets

Une catégorie cartésienne  $\mathcal{C}$  munie d'une monade forte

$$(T, \mu, \eta, t)$$

avec une adjonction

$$\begin{array}{ccc} & A \times - & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathcal{C}_T \\ & A \Rightarrow T(-) & \end{array}$$

pour tout objet  $A$ , ceci induisant une bijection

$$\varphi_{A,B,C} : \mathcal{C}_T(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(B, A \Rightarrow TC)$$

naturelle en  $B$  et  $C$ .

## Interprétation des types du $\lambda$ -calcul avec effets

$$\llbracket A \multimap B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \Rightarrow T \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket A \times B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket TA \rrbracket = T \llbracket A \rrbracket$$

## Interprétation des séquents

Tout séquent

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash P : B$$

est interprété par un morphisme

$$\llbracket A_1 \times \dots \times A_n \rrbracket \longrightarrow \llbracket B \rrbracket$$

de la catégorie de kleisli associée à la monade  $T$ , autrement dit,

$$\llbracket A_1 \times \dots \times A_n \rrbracket \longrightarrow T \llbracket B \rrbracket$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

## Interprétation de l'abstraction

$$\text{Abstraction} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x. P : A \rightarrow B}$$

La règle transforme le morphisme

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f} TB$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$  en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi_{\Gamma, A, B}(f)} A \Rightarrow TB$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

## Interprétation de l'application

La règle

$$\text{Application} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \rightarrow B \quad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie  $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} A \Rightarrow TB$$

et

$$\Delta \xrightarrow{g} TA$$

en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{g \times f} TA \times (A \Rightarrow TB) \xrightarrow{t} T(A \times (A \Rightarrow TB)) \xrightarrow{T(\text{eval})} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

## Interprétation du let

La règle

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \quad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash \text{let } x = P \text{ in } Q : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie  $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} TA$$

et

$$A \times \Delta \xrightarrow{g} TB$$

en le morphisme

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times \Delta} TA \times \Delta \xrightarrow{t} T(A \times \Delta) \xrightarrow{T(g)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie  $\mathcal{C}$ .

## Interprétation de la paire

On doit choisir une ordre d'implémentation pour la paire

$$\langle P, Q \rangle$$

On choisit typiquement l'ordre gauche-droite, induit par le morphisme

$$TA \times TB \longrightarrow T(A \times TB) \longrightarrow TT(A \times B) \xrightarrow{\mu} T(A \times B).$$