Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Paris, Novembre 2009

Plan de la séance

1 – Lambda-calcul simplement typé

2 – Catégories cartésiennes fermées

Première partie

Lambda-calcul simplement typé

Un calcul fonctionnel au cœur de la logique

Interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov

Une démonstration de la formule

$$A \quad \wedge \quad B$$

est une paire

$$(\varphi, \psi)$$

constituée d'une démonstration

$$\varphi$$

de la formule A et d'une démonstration

$$\psi$$

de la formule B.

Interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov

Une démonstration de la formule

$$A \quad \Rightarrow \quad B$$

est un fonction

$$\psi$$

qui transforme toute démonstration

$$\varphi$$

de la formule A en une démonstration

$$\psi(\varphi)$$

de la formule B.

Church 1935: invention syntaxique du λ-calcul

Le λ-calcul est le calcul syntaxique ou formel des fonctions.

Les expressions du λ-calcul sont appelés des λ-termes.

Le λ-calcul est un calcul plutôt bizarre où tout λ-terme P est à la fois:

* une fonction qui s'applique à tous les λ-termes, y compris lui-même,

* un argument de n'importe quel λ-terme, y compris lui-même.

On a longtemps cru que le λ-calcul n'était qu'un jeu d'écriture, auquel on ne saurait pas donner de sens mathématique — jusqu'au modèle dénotationnel de Dana Scott (1976).

Church 1935: une syntaxe pure du calcul fonctionnel

Supposons donné un ensemble infini de variables.

Il y a trois formes de λ-termes:

Variable: Toute variable x définit un λ-terme,

Abstraction: Toute expression $\lambda x.P$ définit un λ-terme lorsque x est une variable et P est un λ-terme. Attention: la variable x apparait ou n'apparait pas dans le λ-terme P.

$\lambda x.P$ est une notation pour la fonction $x \mapsto P$.

Application: Toute expression PQ définit un λ-terme lorsque P et Q sont des λ-termes.

PQ est une notation pour l'application de la fonction P à l'argument Q.

Convention sur les variables liées: on identifie deux λ-termes comme $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$.

Church 1935: définition de la β-réduction

Pour calculer un λ-terme, on utilise la β-règle:

$$\boxed{(\lambda x.P)Q \ \longrightarrow_\beta \ P[x \leftarrow Q]}$$

qui transforme la fonction $(\lambda x.P)$ appliquée à l'argument Q en le λ-terme $P[x \leftarrow Q]$ obtenu en remplaçant dans P toutes les instances de la variable x par le λ-terme Q.

On utilise aussi la η-règle:

$$\boxed{P \ \longrightarrow_\eta \ \lambda x.(Px)}$$

Remarque: on fait attention d'éviter ce qu'on appelle la capture de variable... par exemple la β-réduction:

$$(\lambda x.\lambda y.x)y \ \longrightarrow_\beta \ \lambda z.y$$

nécessite de renommer $(\lambda x.\lambda y.x)$ en $(\lambda x.\lambda z.x)$ pour éviter tout malentendu.

Church 1935: quelques exemples de λ-termes

L'identité $I = \lambda x.x$ transforme tout λ-terme P en lui-même:

$$IP \longrightarrow_\beta P.$$

La première projection $K = \lambda x.\lambda y.x$ efface le second λ-terme parmi P et Q:

$$KPQ \longrightarrow_\beta (\lambda y.P)Q \longrightarrow_\beta P.$$

Le duplicateur $\Delta = \lambda x.xx$ réplique tout λ-terme P:

$$\Delta P \longrightarrow_\beta PP.$$

Le duplicateur Δ appliqué à lui-même boucle:

$$\Delta\Delta \longrightarrow_\beta \Delta\Delta \longrightarrow_\beta \Delta\Delta \longrightarrow_\beta \cdots$$

Church & Rosser 1936: confluence et standardisation

En mêlant un effaceur et un duplicateur, on obtient un λ-terme $Kz(\Delta\Delta)$ qui **boucle** si on commence par calculer l'argument:

$$Kz(\Delta\Delta) \longrightarrow_\beta Kz(\Delta\Delta) \longrightarrow_\beta Kz(\Delta\Delta) \longrightarrow_\beta \cdots$$

et qui termine si on commence par calculer la fonction:

$$Kz(\Delta\Delta) \longrightarrow_\beta (\lambda y.z)(\Delta\Delta) \longrightarrow_\beta z$$

Théorème de Church-Rosser
Tout λ-terme P peut être transformé en un résultat (= λ-terme sans β-réduction) au plus.

Théorème de standardisation
La stratégie d'évaluation **standard** qui calcule toujours la fonction avant l'argument, atteint le résultat du λ-terme P si ce résultat existe.

Kleene 1936: le λ-calcul est universel

Entiers de Church

$$\ulcorner 0 \urcorner = (\lambda f.\lambda x.x) \qquad \ulcorner 1 \urcorner = (\lambda f.\lambda x.fx) \qquad \ulcorner 2 \urcorner = (\lambda f.\lambda x.f(f(x)))$$

Plus généralement:

$$\ulcorner n \urcorner = \lambda f.\lambda x.f(\ldots f(x))))).$$

Une fonction (totale) $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ est dite λ-définissable lorsqu'il existe un λ-terme P tel que:

$$\forall (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \qquad P \ulcorner n_1 \urcorner \cdots \ulcorner n_k \urcorner \xrightarrow{*}_\beta \ulcorner f(n_1, \ldots, n_k) \urcorner.$$

Théorème: Toute fonction récursive est λ-définissable (et réciproquement.)

Remarque: on utilise le combinateur de point fixe $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$ pour coder la récursion.

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Il est possible de typer certaines expressions du λ-calcul au moyen de types simples A, B construits par la grammaire:

$$A, B ::= \alpha \mid A \Rightarrow B.$$

On appelle contexte de typage Γ une suite finie $\Gamma = (x_1 : A_1, ..., x_n : A_n)$ où x_i est une variable et A_i est un type simple, pour tout $1 \leq i \leq n$.

On appelle séquent un triplet:

$$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \vdash P : B$$

où $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$ est un contexte de typage, P est un λ-terme et B est un type simple.

Curry 1958: le λ-calcul simplement typé

Variable

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Propriétés remarquables du fragment simplement typé

Un λ-terme P est appelé simplement typé lorsqu'il existe un contexte de typage Γ et un type simple A tels que:

$$\Gamma \vdash P : A$$

On démontre que l'ensemble des λ-termes simplement typés est clos par β-réduction:

Subject Reduction: Si $\Gamma \vdash P : A$ et $P \longrightarrow_\beta Q$, alors $\Gamma \vdash Q : A$.

Un λ-terme P est appelé fortement normalisable lorsque tous les chemins de β-réduction:

$$P \longrightarrow_\beta P_1 \longrightarrow_\beta P_2 \longrightarrow_\beta \cdots \longrightarrow_\beta P_n \longrightarrow_\beta \cdots$$

terminent.

Normalisation forte: Si P est simplement typé alors P est fortement normalisable.

En particulier, le λ-terme $\Delta\Delta$ qui boucle n'est pas simplement typé.

Curry-Howard

Logique minimale intuitioniste

Variable

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Abstraction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

Application

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Affaiblissement

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Contraction

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Permutation

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$$

Curry-Howard

$\boxed{\lambda\text{-calcul simplement typé}}$

Variable	$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$
Abstraction	$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$
Application	$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$
Affaiblissement	$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$
Contraction	$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$
Permutation	$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Lambda-calcul simplement typé (avec produit)

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1\ P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2\ P : B}$$

Unité

$$\frac{}{\Gamma \vdash * : 1}$$

Deuxième partie

Catégories cartésiennes fermées

Le λ-calcul du point de vue algébrique

Interprétation ensembliste

On associe un ensemble X_α à chaque type atomique α.
Ensuite, on étend l'interprétation à tous les types:

$$[\![\alpha]\!] = X_\alpha \qquad [\![A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![B]\!]^{[\![A]\!]} \;=\; \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ens}}([\![A]\!], [\![B]\!])$$

Un séquent	$x_1 : A_1, ..., x_n : A_n \;\vdash\; M : B$
est interprété comme une fonction	$[\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$

Propriété remarquable: sémantique invariante modulo β et η

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \;=\; [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \;=\; [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

Produits cartésiens

Le **produit** de deux objets A et B dans une catégorie $\mathcal{C}$, est un objet $A \times B$ muni de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A \qquad \pi_2 : A \times B \longrightarrow B$$

tel que pour tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

il existe un et un seul morphisme $h : X \longrightarrow A \times B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & A \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] \arrow[r, "h"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

exo. Montrer que la définition caractérise $A \times B$ à isomorphisme près. (Cela est vrai plus généralement de toute définition **universelle**: limite, colimite, etc...)

Exemples de produits

1. Le produit cartésien dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,
2. La borne inférieure dans un ensemble ordonné $(X, \leq)$,
3. La somme disjointe dans la catégorie $\mathbf{Rel}$ des ensembles et relations.

Objet terminal

Un objet $\mathbf{1}$ est **terminal** dans la catégorie $\mathcal{C}$ lorsque $\mathbf{Hom}(A, \mathbf{1})$ est singleton, pour tout objet A.

On peut considérer que $\mathbf{1}$ est le produit “vide”de $\mathcal{C}$.

Exemple 1. Le singleton $\{*\}$ dans la catégorie $\mathbf{Ens}$,

Exemple 2. Le maximum dans un ensemble ordonné $(X, \leq)$

Exemple 3. L'ensemble vide dans la catégorie $\mathbf{Rel}$.

exo. Montrer que dans une catégorie qui contient un objet terminal $\mathbf{1}$, tout objet est produit de $\mathbf{1}$ et de lui-même.

Catégorie cartésienne

Une **catégorie cartésienne** $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$ est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée d'un produit $A \times B$ pour tout couple d'objets, et d'un objet terminal $\mathbf{1}$.

Dans toute catégorie cartésienne,

— effacement $\epsilon_A : A \longrightarrow \mathbf{1}$,

— diagonale $\delta_A : A \longrightarrow A \times A$ obtenue par

$$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[urr, bend left, "id_A"] \arrow[drr, bend right, "id_A"'] & A \times A \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

— symétrie $\gamma_{A,B} : A \times B \longrightarrow B \times A$ obtenue par

$$\begin{tikzcd} & & B \\ A \times B \arrow[r, "\gamma_{A,B}"] \arrow[urr, bend left, "\pi_2"] \arrow[drr, bend right, "\pi_1"'] & B \times A \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

exo. Montrer que $(- \times -)$ définit un foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ unique.

Exponentiation cartésienne

Soit A un objet dans une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$.

On appelle **exponentiation cartésienne** de A le couple formé par un foncteur

$$(A \Rightarrow -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

et une famille $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ de bijections

$$\phi_{A,B,C} : \mathbf{Hom}(A \times B, C) \longrightarrow \mathbf{Hom}(B, A \Rightarrow C)$$

naturelle en B et C.

Autrement dit, une adjonction entre les foncteurs:

$$A \times - \quad \dashv \quad A \Rightarrow -$$

Bijection naturelle signifie ici

Naturelle en B et C signifie ici que la famille de bijections $(\phi_{A,B,C})_{B,C}$ transforme tout diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "g"] & & C \arrow[d, "h_C"] \\
A \times B' \arrow[u, "A \times h_B"] \arrow[rr, "f"'] & & C'
\end{tikzcd}
$$

en un diagramme commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\phi_{A,B,C}(g)"] & & A \Rightarrow C \arrow[d, "A \Rightarrow h_C"] \\
B' \arrow[u, "h_B"] \arrow[rr, "\phi_{A,B',C'}(f)"'] & & A \Rightarrow C'
\end{tikzcd}
$$

Ccc

Une **catégorie cartésienne close** (ccc) est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbf{1})$ munie d'une exponentiation cartésienne

$$\frac{A \times B \longrightarrow C}{B \longrightarrow A \Rightarrow C} \quad \phi_{A,B,C} \tag{1}$$

pour tout objet A.

Théorème du paramètre

Nous avons vu que le produit $(- \times -)$ définit un bifoncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$. De même:

Théorème du paramètre (MacLane)

La famille d'exponentiations $(A \Rightarrow -)_A$ définit un unique foncteur

$$(- \Rightarrow -) \; : \; \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tel que les bijections

$$\phi_{A,B,C} \quad : \quad \mathcal{C}(A \times B, C) \quad \cong \quad \mathcal{C}(B, A \Rightarrow C)$$

soient naturelles en A, B et C.

Théorème du paramètre

Naturelle en A, B et C signifie que la famille de bijections

$$\phi_{A,B,C} \quad : \quad \mathcal{C}(A \times B, C) \quad \cong \quad \mathcal{C}(B, A \Rightarrow C)$$

transforme tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_C" ', phantom] & C \arrow[d, "h_C"] \\
A' \times B' \arrow[u, "h_A \times h_B"] \arrow[r, "f" '] & C'
\end{tikzcd}$$

en un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\phi_{A,B,C}(g)"] & A \Rightarrow C \arrow[d, "h_A \Rightarrow h_C"] \\
B' \arrow[u, "h_B"] \arrow[r, "\phi_{A',B',C'}(f)" '] & A' \Rightarrow C'
\end{tikzcd}$$

Lambda-calcul simplement typé

Variable
$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

Abstraction
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \Rightarrow B}$$

Application
$$\frac{\Gamma \vdash P : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

Affaiblissement
$$\frac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$$

Contraction
$$\frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$$

Permutation
$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$$

Lambda-calcul simplement typé (avec produit)

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1\ P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2\ P : B}$$

Unité

$$\frac{}{\Gamma \vdash * : 1}$$

Interprétation du λ-calcul

Variable: $A \xrightarrow{id_A} A$

Lambda: $A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $\Gamma \xrightarrow{\phi_{A,\Gamma,B}(f)} A \Rightarrow B$

Application: $\Gamma \xrightarrow{f} A$ et $\Delta \xrightarrow{g} A \Rightarrow B$ deviennent

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times g} A \times (A \Rightarrow B) \xrightarrow{eval_{A,B}} B$$

Contraction: $A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\delta_A \times \Gamma} A \times A \times \Gamma \xrightarrow{f} B$

Affaiblissement: $\Gamma \xrightarrow{f} B$ devient $A \times \Gamma \xrightarrow{\epsilon_A \times \Gamma} 1 \times \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma \xrightarrow{f} B$

Permutation: $\Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$ devient

$$\Gamma \times B \times A \times \Delta \xrightarrow{\Gamma \times \gamma_{A,B} \times \Delta} \Gamma \times A \times B \times \Delta \xrightarrow{f} B$$

Propriété: invariance modulo évaluation

Théorème ("soundness"):

L'interprétation du λ-calcul simplement typée est correcte dans toute ccc.

Autrement dit, si $\mathcal{C}$ est une **ccc** et $[\![-]\!]$ est son crochet d'interprétation,

— Si $\Gamma \vdash (\lambda x.M) : A \Rightarrow B$ et $\Delta \vdash N : A$, alors

$$[\![\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.M)N : B]\!] \quad = \quad [\![\Gamma, \Delta \vdash M[x := N] : B]\!]$$

— Si $\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B$ alors

$$[\![\Gamma \vdash (\lambda x.Mx) : A \Rightarrow B]\!] \quad = \quad [\![\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B]\!]$$

exo. Démontrer le théorème ci-dessus.