Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Ecole Normale Supérieure

Plan de la séance

1 – Monade des monoides

2 – Monade d'états globaux et mnémoides

3 – Monade d'états locaux et mnémoides locaux

4 – Théorie formelle des monades

5 – Monades fortes

6 – Lambda-calcul avec effets

Première partie

Monoïdes

Présentation algébrique ou monade construction libre

Monoids

A set M equipped with a **multiplication** and a **unit** e satisfying :

$$\boxed{(x \cdot y) \cdot z \quad = \quad x \cdot (y \cdot z)}$$

$$\boxed{x \cdot e \quad = \quad x \quad = \quad e \cdot x}$$

for all elements $x, y, z \in M$.

Monoids

A set M equipped with a **multiplication** and a **unit** map :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} m & : & M \times M & \longrightarrow & M \\ & & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} e & : & \{ * \} & \longrightarrow & M \\ & & * & \mapsto & e \end{array}}$$

Monoids

A set M equipped with a **multiplication** and a **unit** map :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} m & : & M^2 & \longrightarrow & M \\ & & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} e & : & M^0 & \longrightarrow & M \\ & & * & \mapsto & e \end{array}}$$

Monoids

such that the **associativity** diagram commutes :

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "M \times m"] \arrow[d, "m \times M"'] & M \times M \arrow[d, "m"] \\
M \times M \arrow[r, "m"] & M
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{(x \cdot y) \cdot z \quad = \quad x \cdot (y \cdot z)}$$

Monoids

such that the **associativity** diagram commutes :

$$\begin{tikzcd}
x \quad y \quad z \arrow[r, mapsto, "M \times m"] \arrow[d, mapsto, "m \times M"'] & x \quad y \cdot z \arrow[d, mapsto, "m"] \\
x \cdot y \quad z \arrow[r, mapsto, "m"] & (x \cdot y) \cdot z \;=\; x \cdot (y \cdot z)
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{(x \cdot y) \cdot z \quad = \quad x \cdot (y \cdot z)}$$

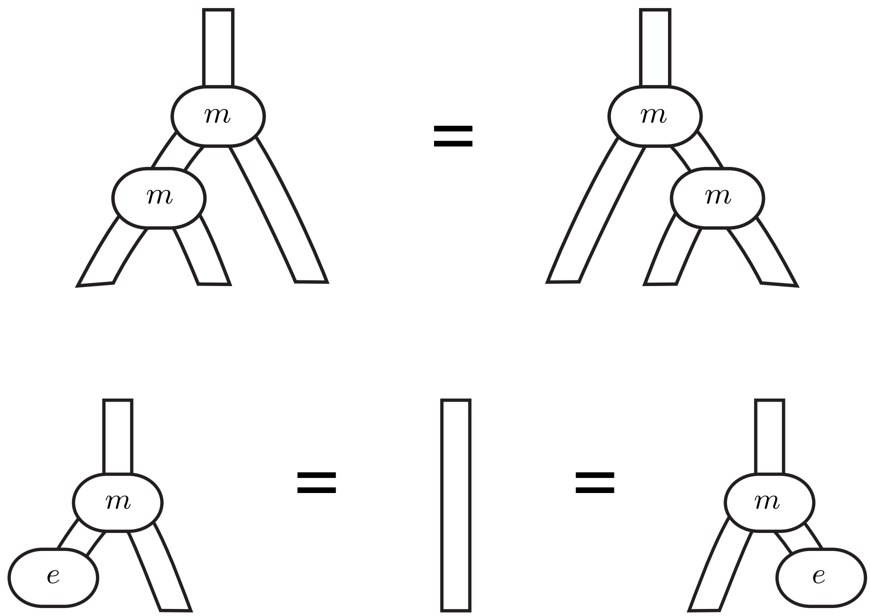
Monoids

and such that the two **unity** diagrams commute :

$$\begin{tikzcd}
 & M \times M \arrow[d, "m"'] & \\
M \arrow[ur, "M \times e"] \arrow[r, "id"] & M & M \arrow[ul, "e \times M"'] \arrow[l, "id"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{x \cdot e \quad = \quad x \quad = \quad e \cdot x}$$

In string diagrams



The “free monoid” monad

The set of finite words on an alphabet A defines a monoid

$$TA \quad = \quad A^0 + A^1 + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

with **concatenation** as multiplication and the **empty word** as unit.

$$\begin{array}{cccccc} \eta_A & : & A & \longrightarrow & TA \\ & & a & \mapsto & [a] \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \mu_A & : & TTA & \longrightarrow & TA \\ & & [[ab][aa][b]] & \mapsto & [abaab] \end{array}$$

Free monoid

By free monoid, one means that for every function

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad M$$

there exists a **unique** homomorphism

$$h \quad : \quad TA \quad \longrightarrow \quad M$$

making the diagram commute:

$$\begin{tikzcd} & & M \\ A \arrow[rru, bend left, "f"] \arrow[r, "\eta_A"] & TA \arrow[ru, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Algebras of a monad

A set A equipped with a function

$$alg \quad : \quad TA \quad \longrightarrow \quad A$$

making the two diagrams below commute:

$$\begin{tikzcd}
TTA \arrow[r, "T(alg)"] \arrow[d, "\mu"'] & TA \arrow[d, "alg"] \\
TA \arrow[r, "alg"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& TA \arrow[dr, "alg"] & \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[rr, "id"] & & A
\end{tikzcd}$$

The category of monoids

Let $\mathcal{M}$ denote the category
- with monoids as objects
- with homomorphisms as maps

Folklore theorem

$\mathcal{M}$ is equivalent to the category of algebras of the monad T

Deuxième partie

Mnemoïdes

Une présentation algébrique des accès mémoire

The state monad

A program accessing **one register** with a finite set V of values

$$A \xrightarrow{\text{impure}} B$$

is interpreted as a function

$$V \times A \xrightarrow{\text{pure}} V \times B$$

thus as a function

$$A \xrightarrow{\text{pure}} V \Rightarrow (V \times B)$$

Hence, the state monad

$$\boxed{T \quad : \quad A \quad \mapsto \quad V \Rightarrow (V \times A)}$$

What is an algebra of the state monad ?

Mnemoids

A **mnemoid** is a set A equipped with a V-ary operation

$$\mathtt{lookup} \quad : \quad A^{V} \quad \longrightarrow \quad A$$

and a unary operation

$$\mathtt{update}_{\langle val \rangle} \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

for each value $val \in V$.

Mnemoids

Typically, the lookup operation on the boolean space

$$V \quad = \quad \{\, \texttt{false} \,,\, \texttt{true} \,\}$$

is binary :

$$\texttt{lookup} \quad : \quad A \times A \quad \longrightarrow \quad A$$

The intuition is that

$$\boxed{\texttt{lookup}\,(u,v) \quad = \quad \begin{cases} u & \text{when the register is false} \\ v & \text{when the register is true} \end{cases}}$$

Annihilation lookup – update

$$\begin{tikzcd} & A^V \arrow[dr, "\texttt{lookup}"] & \\ A \arrow[ur, "\texttt{update}_{\langle V \rangle}"] \arrow[rr, "id"] & & A \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\quad term \quad = \quad \texttt{lookup}\left[\, val \mapsto \texttt{update}_{\langle val \rangle}\ term \,\right] \quad}$$

Annihilation lookup – update

Here, the map

$$\mathtt{update}_{\langle V\rangle} \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A^{\,V}$$

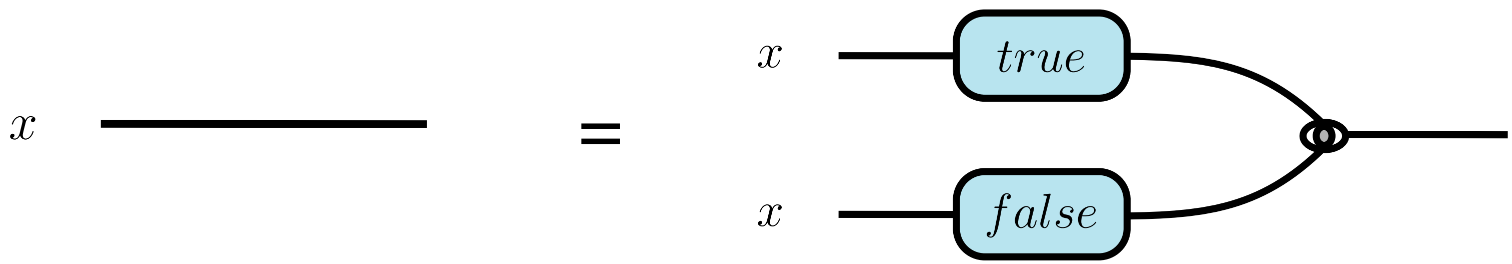
is the V-ary vector

$$\left[\quad \mathtt{update}_{\langle 0\rangle} \quad , \quad \cdots \quad , \quad \mathtt{update}_{\langle V-1\rangle} \quad \right]$$

also noted

$$\left[\quad val \mapsto \mathtt{update}_{\langle val\rangle} \quad \right]$$

Annihilation lookup – update



Interaction update – update

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\mathtt{update}_{\langle val_1 \rangle}"] & \\
A \arrow[ur, "\mathtt{update}_{\langle val_2 \rangle}"] \arrow[rr, "\mathtt{update}_{\langle val_2 \rangle}"] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathtt{update}_{\langle val_1 \rangle} \circ \mathtt{update}_{\langle val_2 \rangle} \quad = \quad \mathtt{update}_{\langle val_2 \rangle}}$$

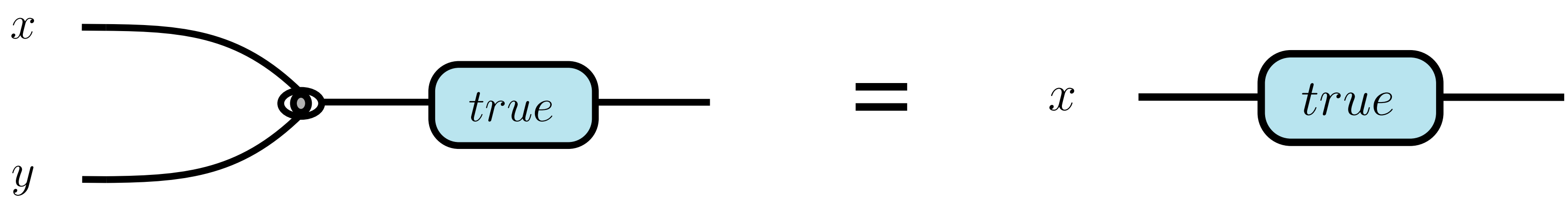
Interaction update – update

Interaction update – lookup

$$\begin{tikzcd}
A^V \arrow[r, "\mathtt{lookup}"] \arrow[d, "A^{val}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{update}_{\langle val\rangle}"] \\
A \arrow[r, "\mathtt{update}_{\langle val\rangle}"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathtt{update}_{\langle val\rangle} \circ \mathtt{lookup} \left[\quad x \mapsto term(x) \quad \right] \\ &= \quad \mathtt{update}_{\langle val\rangle} \circ term(val) \end{aligned}}$$

Interaction update – lookup



Key theorem (Plotkin & Power)

the category of mnemoids

is equivalent to

the category of algebras of the state monad

Provides an algebraic presentation of the state monad !

Store with several locations

Algebraic presentation of the state monad

The global state monad

The state monad is generally defined as

$$\boxed{T \quad : \quad A \quad \mapsto \quad S \Rightarrow (S \times A)}$$

for a set of states

$$S \quad = \quad V^L$$

induced by a set L of locations and a **finite** set V of values.

Global store (Plotkin & Power)

A global store is a family of **compatible** mnemoidal structures

$$\begin{array}{lclcl} \texttt{lookup}_{\langle loc \rangle} & : & A^V & \longrightarrow & A \\ \texttt{update}_{\langle loc, val \rangle} & : & A & \longrightarrow & A \end{array}$$

one for each location $loc \in L$.

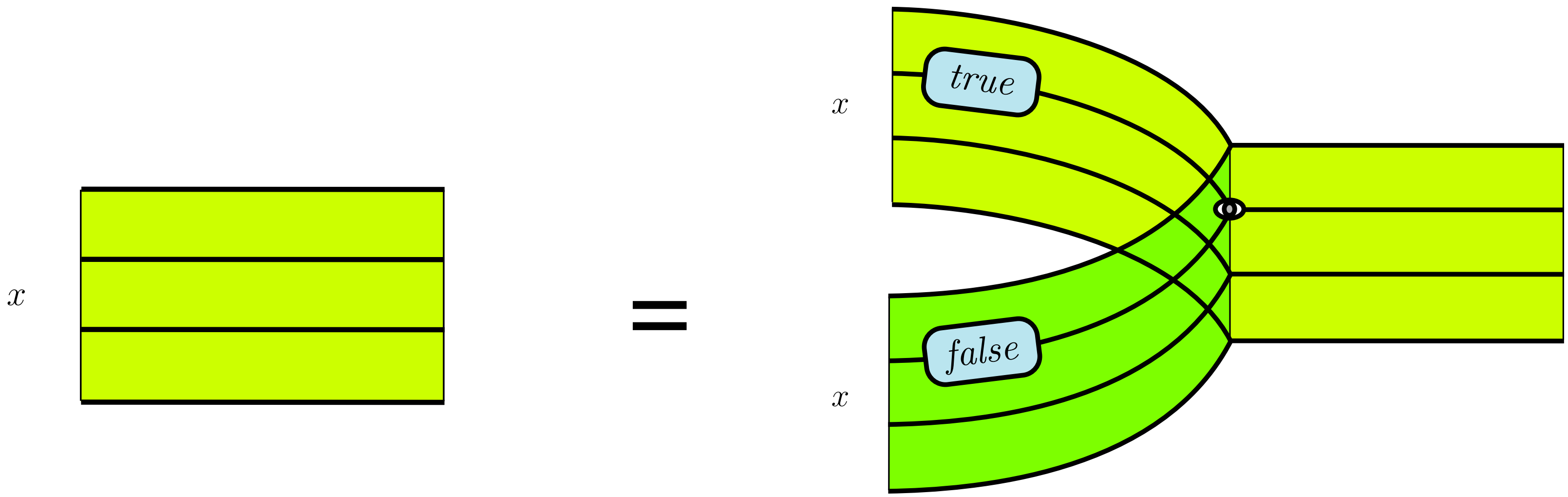
A tensor product of algebraic theories

Annihilation lookup – update

$$\begin{tikzcd} & A^V \arrow[dr, "\mathtt{lookup}_{\langle loc \rangle}"] & \\ A \arrow[ur, "\mathtt{update}_{\langle loc,V \rangle}"] \arrow[rr, "id"] & & A \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathtt{lookup}_{\langle loc \rangle}\left[val \mapsto \mathtt{update}_{\langle loc,val \rangle}\ term \right] \quad = \quad term}$$

Annihilation lookup – update

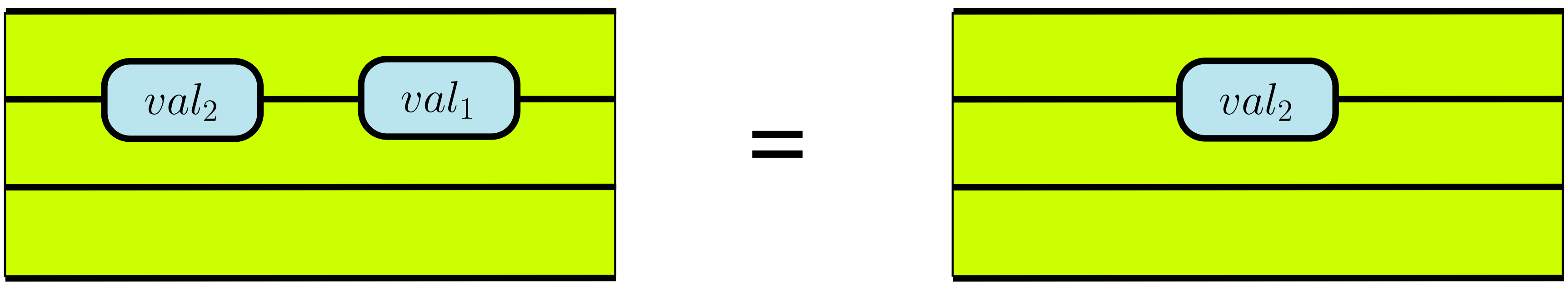


Interaction update – update

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "\mathtt{update}_{\langle loc,val\rangle}"] & \\ A \arrow[ur, "\mathtt{update}_{\langle loc,val'\rangle}"] \arrow[rr, "\mathtt{update}_{\langle loc,val'\rangle}"'] & & A \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathtt{update}_{\langle loc,val_1\rangle} \circ \mathtt{update}_{\langle loc,val_2\rangle} \quad = \quad \mathtt{update}_{\langle loc,val_2\rangle}}$$

Interaction update – update

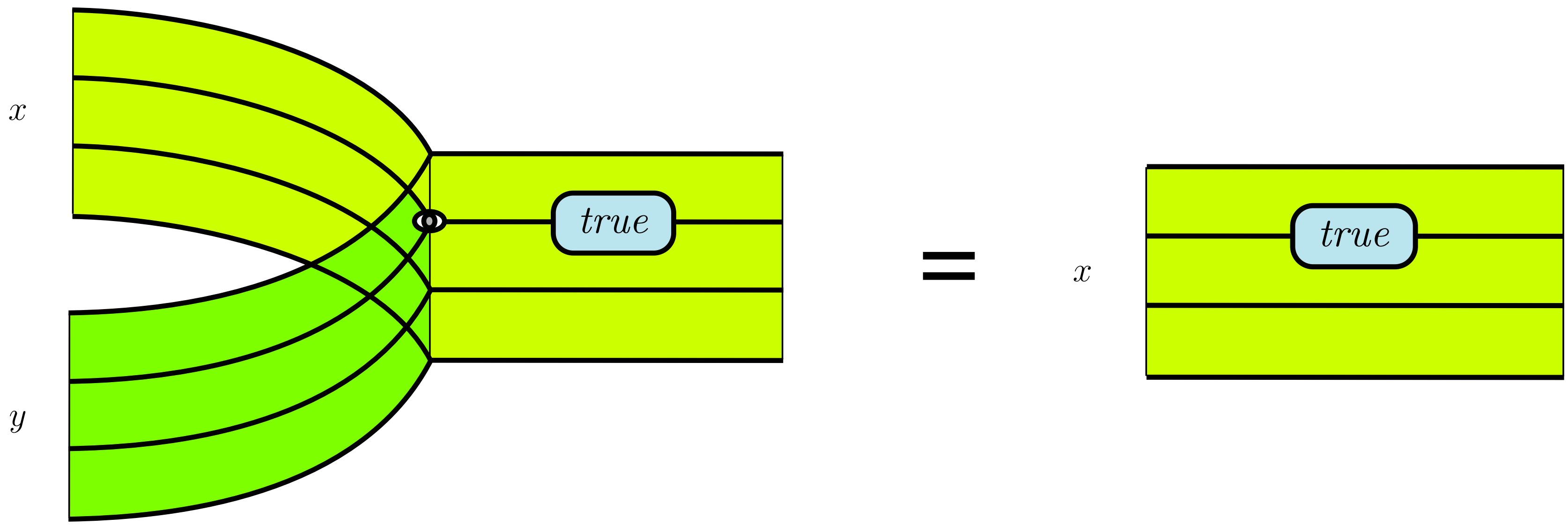


Interaction update – lookup

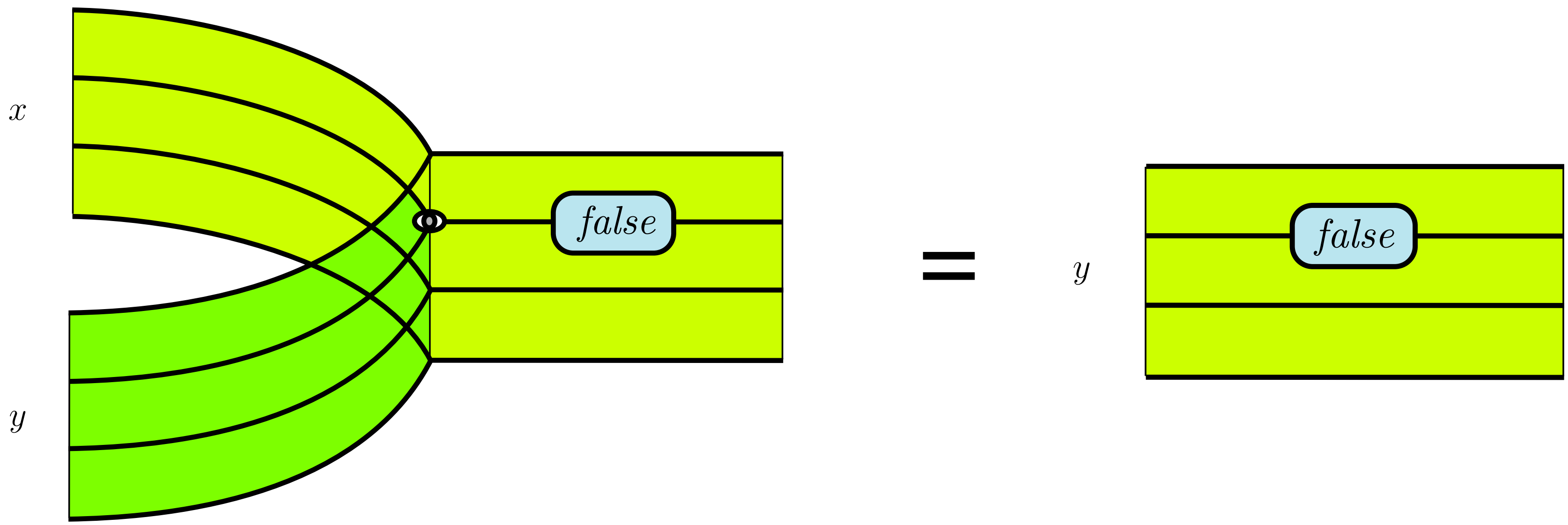
$$
\begin{tikzcd}
A^V \arrow[r, "\mathtt{lookup}_{\langle loc \rangle}"] \arrow[d, "A^{val}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{update}_{\langle loc,val \rangle}"] \\
A \arrow[r, "\mathtt{update}_{\langle loc,val \rangle}"'] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{l} \mathtt{update}_{\langle loc,val \rangle} \circ \mathtt{lookup}_{\langle loc \rangle} \left[\quad x \mapsto term(x) \quad \right] \\ \quad = \quad \mathtt{update}_{\langle loc,val \rangle} \circ term(val) \end{array}}
$$

Interaction update – lookup



Interaction update – lookup

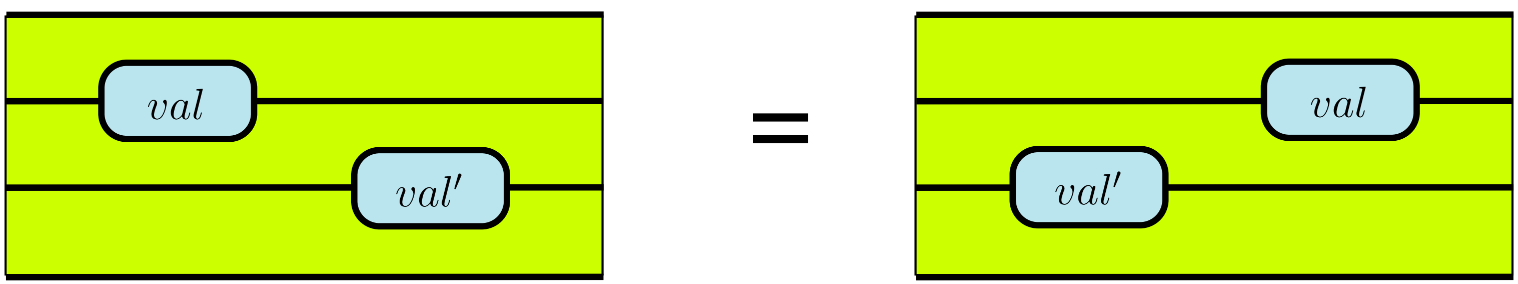


Commutation update – update

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathtt{update}_{\langle loc, val\rangle}"] \arrow[d, "\mathtt{update}_{\langle loc', val'\rangle}"'] & A \arrow[d, "\mathtt{update}_{\langle loc', val'\rangle}"] \\
A \arrow[r, "\mathtt{update}_{\langle loc, val\rangle}"'] & A
\end{tikzcd}
$$

$$
\boxed{\begin{array}{c}
\mathtt{update}_{\langle loc, v\rangle}\ \mathtt{update}_{\langle loc', v'\rangle}\ x \\
= \\
\mathtt{update}_{\langle loc', v'\rangle}\ \mathtt{update}_{\langle loc, v\rangle}\ x \\
\\
\text{when} \quad loc \neq loc'
\end{array}}
$$

Commutation update – update



Corollary (Plotkin & Power)

the category of objects with a global store

is equivalent to

the category of algebras of the state monad

Troisième partie

Etats locaux

Une présentation algébrique des variables locales

Functorial semantics

Key idea: interpret a type A as a family of sets

$$A_{[0]} \qquad A_{[1]} \qquad \cdots \qquad A_{[n]} \qquad \cdots$$

indexed by natural numbers, where each set

$$A_{[n]}$$

contains the programs of type A which have access to n variables.

Functorial semantics

This defines a covariant presheaf

$$A_{[n]} \quad : \quad Inj \quad \longrightarrow \quad Set$$

on the category Inj of natural numbers and injections.

The action of the injections on A are induced by the operations

$$\mathtt{collect}_{\langle loc \rangle} \quad : \quad A_{[n]} \quad \longrightarrow \quad A_{[n+1]}$$

defined for $0 \leq loc \leq n$.

Functorial semantics

The intuition is that

$$A_{[n]}$$

contains the programs with n locations. Every injection

$$f : p \longrightarrow q$$

defines a function

$$A_{[f]} \quad : \quad A_{[p]} \longrightarrow A_{[q]}$$

which transports every program

$$P \quad \in \quad A_{[p]}$$

to the program

$$P[loc \hookleftarrow f(loc)] \quad \in \quad A_{[q]}.$$

A cartesian closed category

The category $[Inj, Set]$ is cartesian

$$A \times B \quad : \quad n \quad \mapsto \quad A_{[n]} \times B_{[n]}$$

and closed

$$A \Rightarrow B \quad : \quad n \quad \mapsto \quad [Inj, Set]\,(\,A \;\times\; Inj(n,-)\,,\; B\,)$$

Note that

$$(A \Rightarrow B)_{[n]} \quad = \quad \int_{p \in Inj} Set\,(\,A_{[p]} \times \; Inj(n,p)\,,\; B_{[p]}\,)$$

A monoidal closed category

The category $[Inj, Set]$ is symmetric monoidal

$$A \otimes B \quad : \quad n \quad \mapsto \quad \int^{p,q \in I} A_{[p]} \times B_{[q]} \times Inj(p+q, n)$$

and closed

$$A \multimap B \quad : \quad n \quad \mapsto \quad [Inj, Set](A, B_{[n+-]})$$

Note that

$$(A \multimap B)_{[n]} \quad = \quad \int_{p \in I} Set\ (\ A_{[p]}\ ,\ Y_{[n+p]}\ )$$

Local stores (Plotkin – Power)

The slightly intimidating monad

$$\boxed{TA \quad : \quad n \quad \mapsto \quad S^{[n]} \quad \Rightarrow \quad \left(\int^{p \in Inj} \quad S^{[p]} \times A_{[p]} \times I(n,p) \right)}$$

on the presheaf category $[Inj, Set]$ where the contravariant presheaf

$$S^{[p]} \quad = \quad V^{p}$$

describes the states available at degree p.

Local mnemoids

A **local mnemoid** is a family of sets

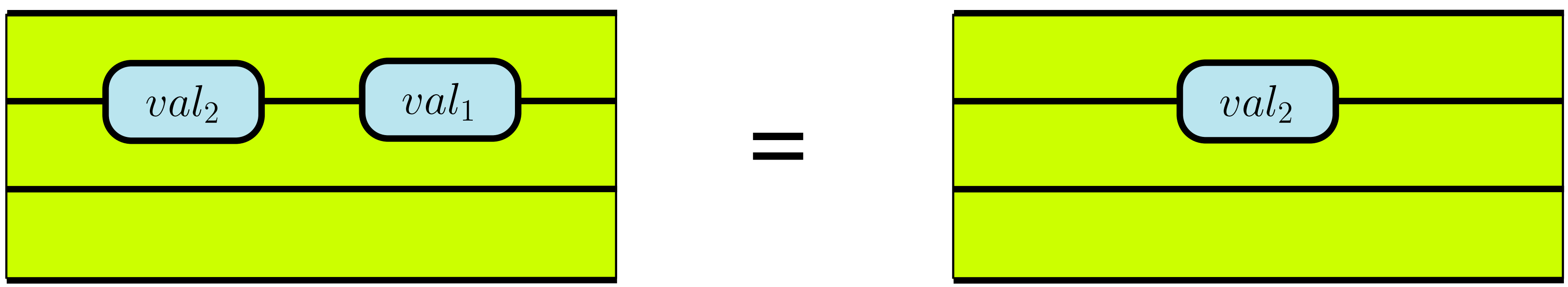
$$A_{[0]} \qquad A_{[1]} \qquad \cdots \qquad A_{[n]} \qquad \cdots$$

equipped with the following operations

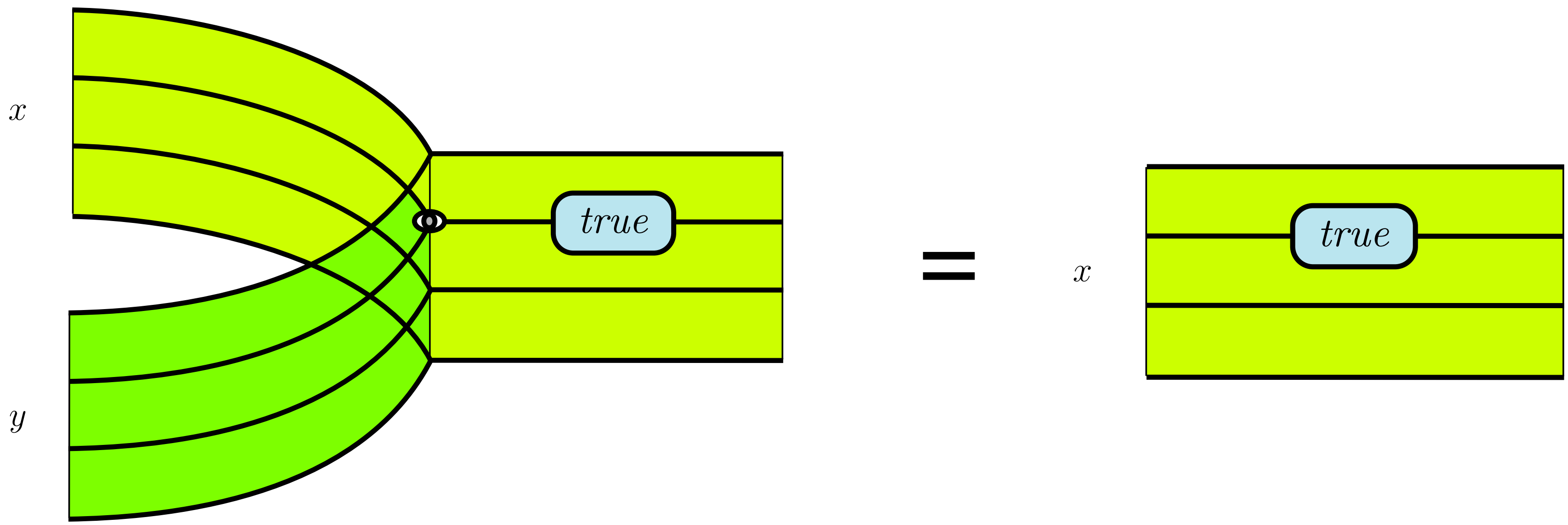
$$\begin{array}{lcrcll}
\texttt{lookup}_{\langle loc \rangle} & : & A^V_{[n]} & \longrightarrow & A_{[n]} & 0 \le loc \le n-1 \\
\texttt{update}_{\langle loc,val \rangle} & : & A_{[n]} & \longrightarrow & A_{[n]} & 0 \le loc \le n-1 \\
\texttt{fresh}_{\langle loc,val \rangle} & : & A_{[n+1]} & \longrightarrow & A_{[n]} & 0 \le loc \le n \\
\texttt{collect}_{\langle loc \rangle} & : & A_{[n]} & \longrightarrow & A_{[n+1]} & 0 \le loc \le n \\
\texttt{permute}_{\langle loc,loc' \rangle} & : & A_{[n]} & \longrightarrow & A_{[n]} & 0 \le loc < loc' \le n-1
\end{array}$$

satisfying a series of basic equations.

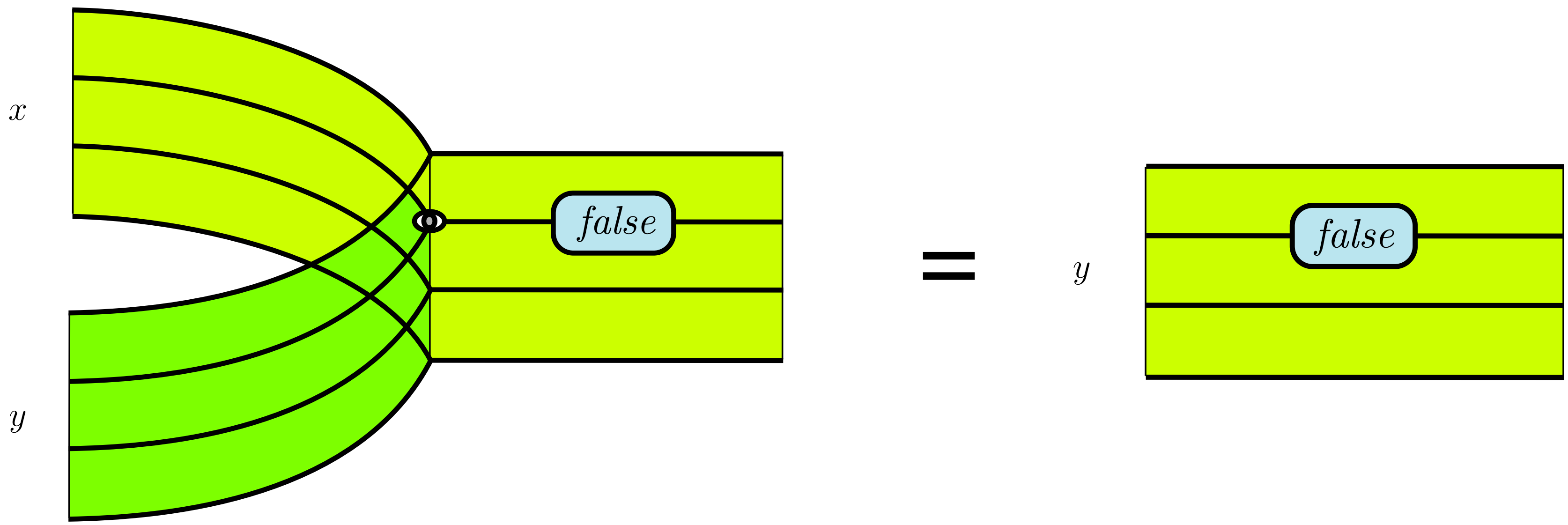
Interaction update – update



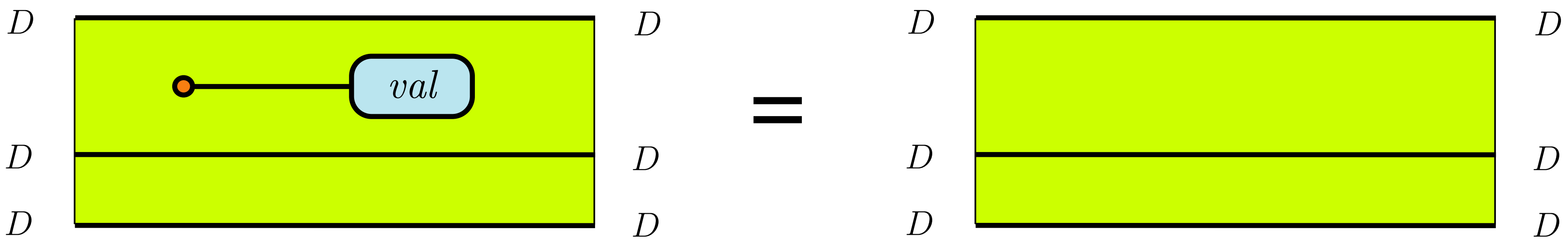
Interaction update – lookup



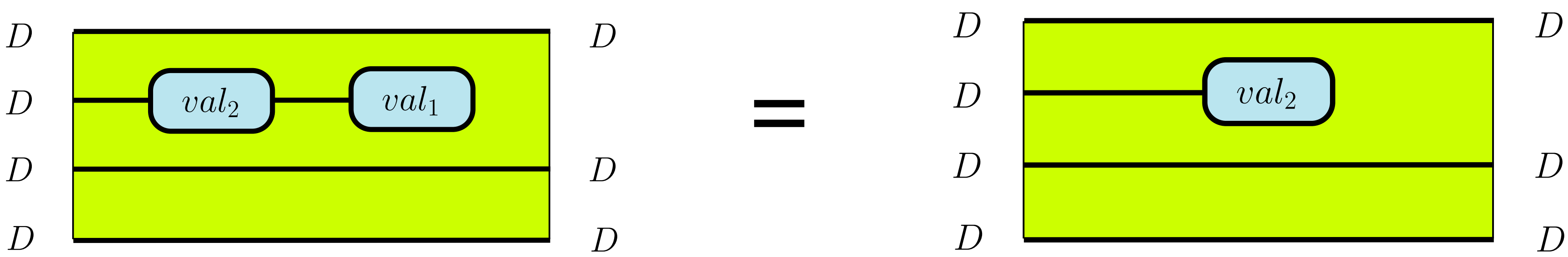
Interaction update – lookup



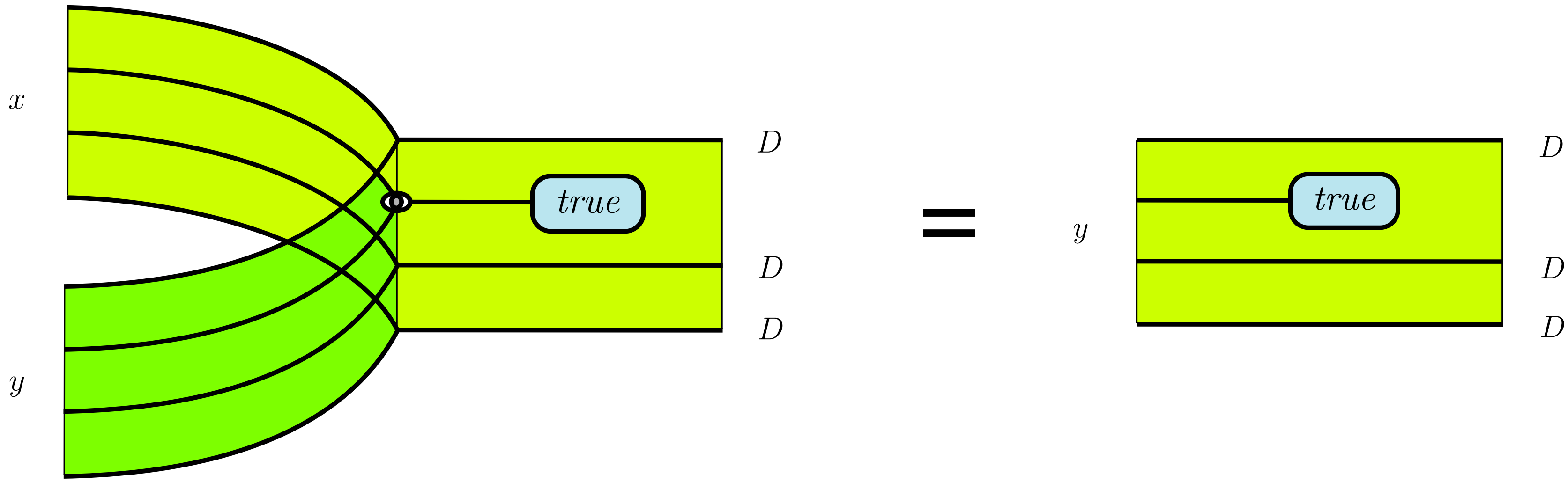
Interaction fresh – dispose



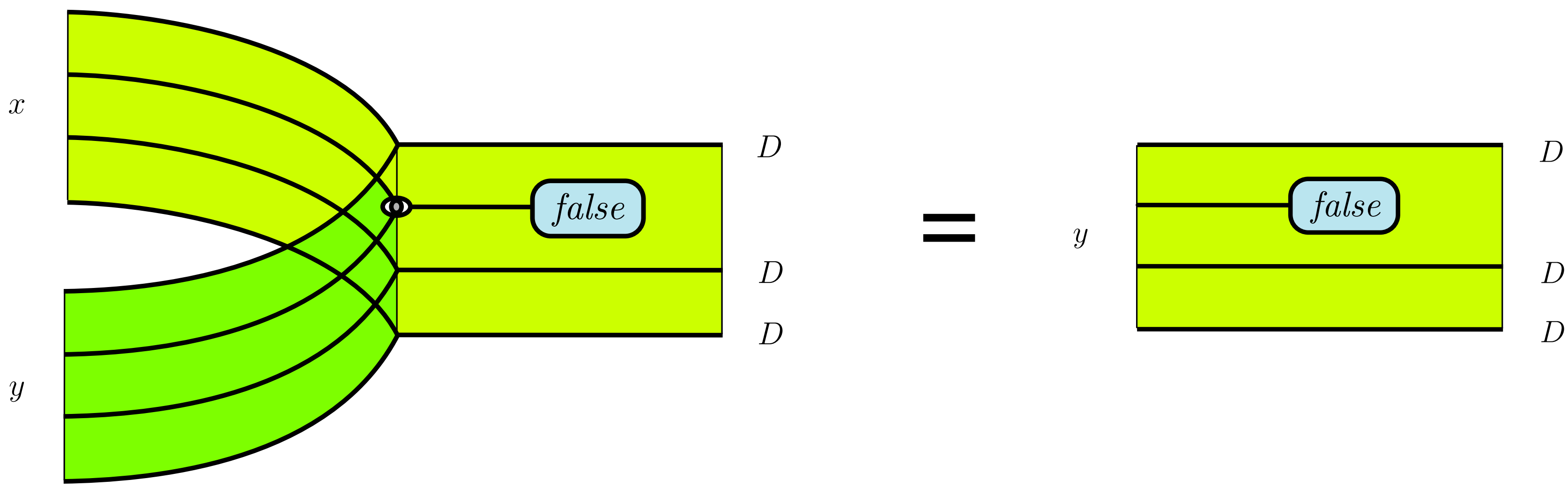
Interaction fresh – update



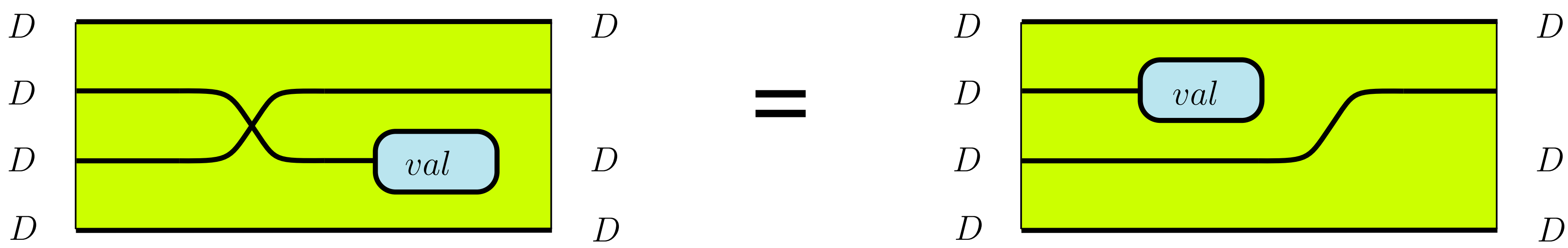
Interaction fresh – lookup



Interaction fresh – lookup



Interaction fresh – permutation



Modules over the category Inj

An Inj-module is a category C equipped with an action

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} * & : & Inj \times C & \longrightarrow & C \\ & & (m, A) & & m * A \end{array}}$$

satisfying the expected properties:

$$(p+q)*A \quad = \quad p*(q*A) \qquad\qquad 0*A \quad = \quad A$$

Modules over the category Inj

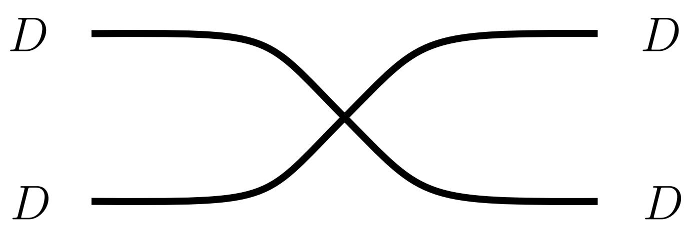
A category $\mathcal{A}$ equipped with an endofunctor

$$D \quad : \quad \mathcal{C} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}$$

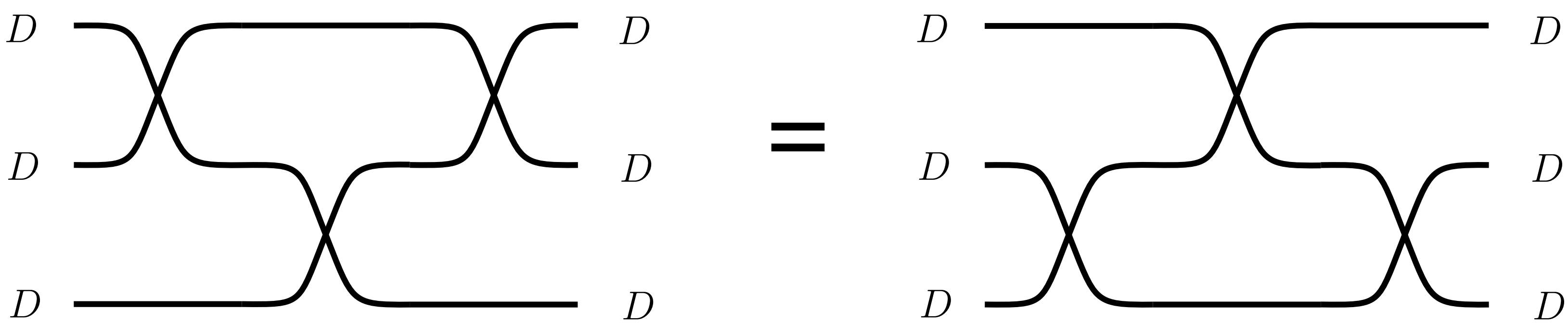
and two natural transformations

$$\texttt{permute} \quad : \quad D \circ D \quad \longrightarrow \quad D \circ D \qquad\qquad \texttt{collect} \quad : \quad Id \quad \longrightarrow \quad D$$

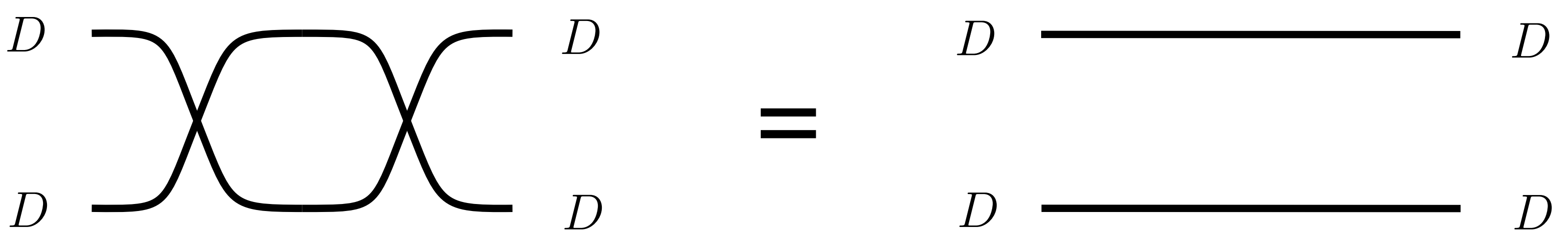
depicted as follows in the language of string diagrams:



Yang-Baxter equation



Symmetry



Alternative formulation

A **dynamic mnemoid** is a pair of sets

$$A_{[0]} \qquad\qquad A_{[1]}$$

equipped with the following operations

$$\begin{array}{lcccc}
\texttt{lookup} & : & A_{[1]}^{V} & \longrightarrow & A_{[1]} \\
\texttt{update}_{\langle val \rangle} & : & A_{[1]} & \longrightarrow & A_{[1]} \\
\texttt{fresh}_{\langle val \rangle} & : & A_{[1]} & \longrightarrow & A_{[0]} \\
\texttt{collect} & : & A_{[0]} & \longrightarrow & A_{[1]}
\end{array}$$

satisfying a series of basic equations.

Garbage collect : fresh – collect

$$
\begin{tikzcd}
 & A_{[1]} \arrow[dr, "\mathtt{fresh}_{\langle val \rangle}"] & \\
A_{[0]} \arrow[ur, "\mathtt{collect}"] \arrow[rr, "id"] & & A_{[0]}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathtt{fresh}_{\langle val \rangle} \circ \mathtt{collect}\ (term) \quad = \quad term$$

Garbage collect : fresh – collect

Interaction fresh – update

$$
\begin{tikzcd}
 & A_{[1]} \arrow[dr, "\texttt{fresh}_{\langle val_1 \rangle}"] & \\
A_{[1]} \arrow[ur, "\texttt{update}_{\langle val_2 \rangle}"] \arrow[rr, "\texttt{fresh}_{\langle val_2 \rangle}"] & & A_{[0]}
\end{tikzcd}
$$

$$\texttt{fresh}_{\langle val_1 \rangle} \circ \texttt{update}_{\langle val_2 \rangle} \quad = \quad \texttt{fresh}_{\langle val_2 \rangle}$$

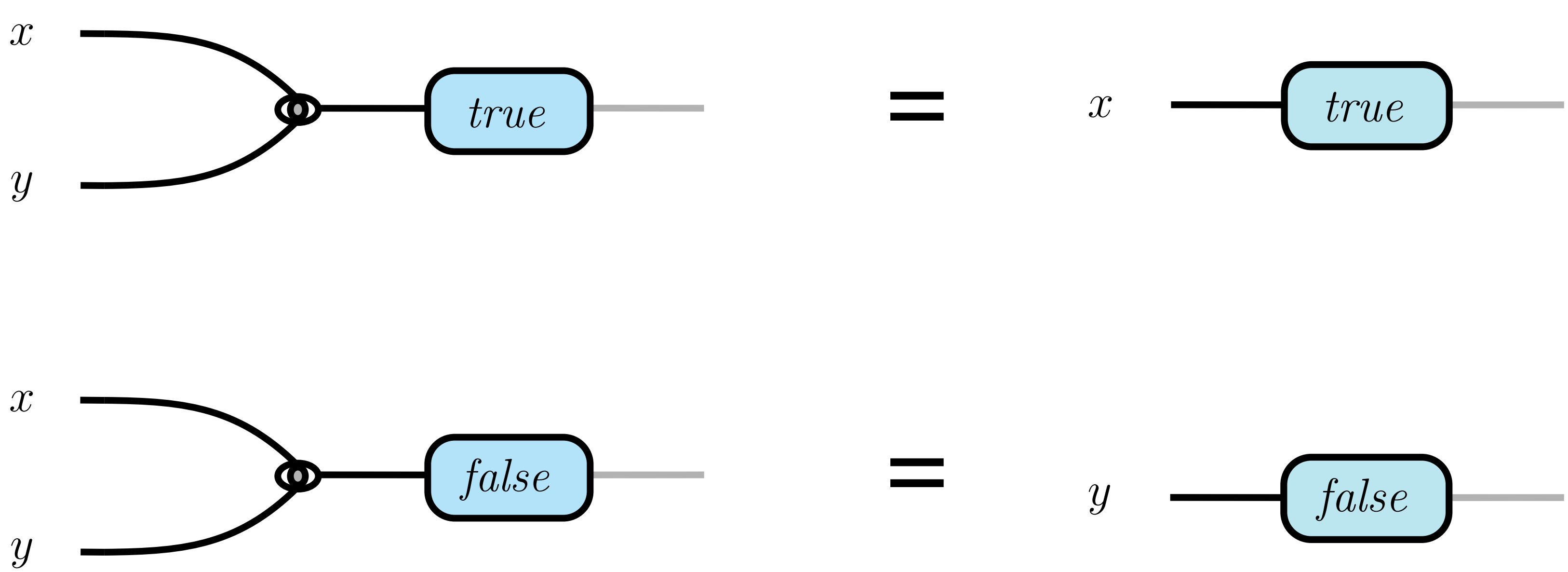
Interaction fresh – update

Interaction fresh – lookup

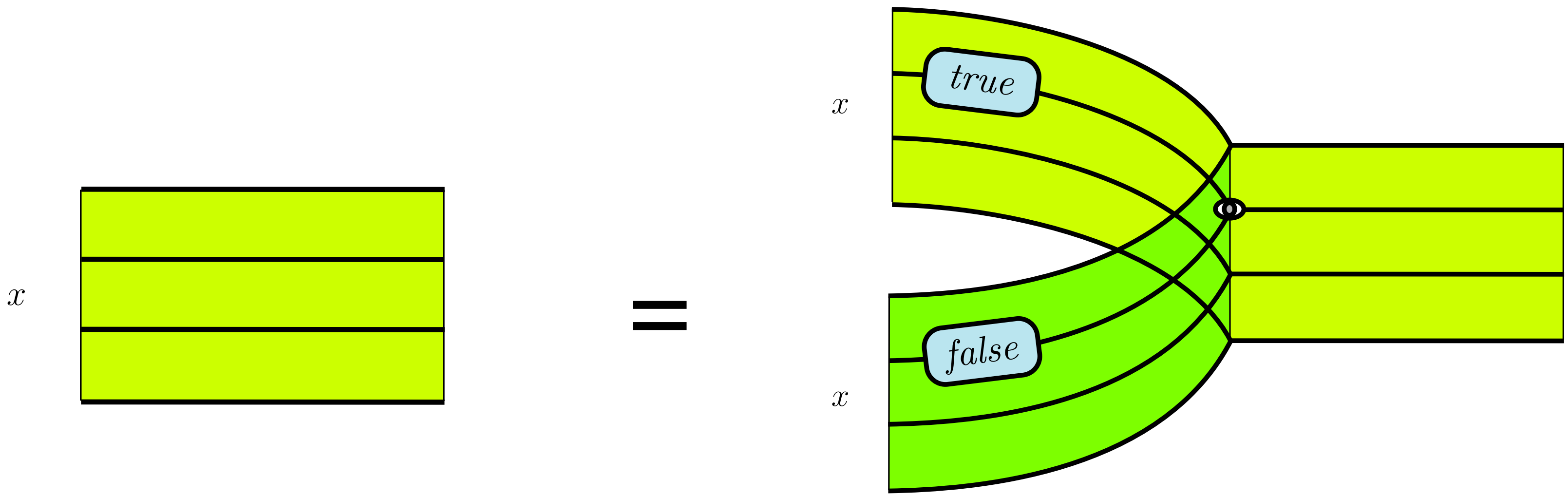
$$\begin{CD} A^V_{[1]} @>{\texttt{lookup}}>> A_{[1]} \\ @V{A^{val}_{[1]}}VV @VV{\texttt{fresh}_{\langle val \rangle}}V \\ A_{[1]} @>{\texttt{fresh}_{\langle val \rangle}}>> A_{[0]} \end{CD}$$

$$\texttt{fresh}_{\langle val \rangle}\ \texttt{lookup}\ (wal \mapsto term[wal])$$
$$=$$
$$\texttt{fresh}_{\langle val \rangle}\ (term[val])$$

Interaction fresh – lookup



Annihilation lookup – update



The equation $D(A \times B) \cong DA \times DB$ means

that **space** commutes with **time ramification** !!!

Quatrième partie

Théorie formelle des monades

Catégorie de Kleisli, catégorie d'Eilenberg-Moore

Monade formelle

Soit A une 0-cellule dans une 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Une monade s sur la 0-cellule A est une 1-cellule

$$s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une multiplication

$$\mu \quad : \quad s \circ s \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

et d'une unité

$$\eta \quad : \quad Id_A \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

satisfaisant les lois d'associativité et d'unité.

Autrement dit, une monade s est un monoïde de la catégorie monoïdale $\mathcal{B}(A, A)$.

Toute adjonction définit une monade

(démonstration graphique)

Algèbre

Une algèbre de la monade (T, μ, η) est une paire (A, h) constituée

— d'un objet A morphisme

— d'un morphisme

$$h \quad : \quad TA \longrightarrow A$$

faisant commuter

$$\begin{tikzcd}
 & TA \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[rr, "id"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "Th"'] & TA \arrow[d, "h"] \\
TA \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

Morphismes d'algèbre

Un morphisme d'algèbre

$$f \quad : \quad (A, h_A) \longrightarrow (B, h_B)$$

est un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

entre les objets sous-jacents dans la catégorie $\mathcal{C}$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_A"'] & TB \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute.

Catégorie de Kleisli

La catégorie de Kleisli $\mathcal{C}_T$ d'une monade (T, μ, η) sur une catégorie $\mathcal{C}$ a

— pour objets les objets de $\mathcal{C}$,

— pour morphismes $A \to B$ les morphismes de $A \longrightarrow TB$ dans la catégorie $\mathcal{C}$,

Les identités $A \to A$ sont données par les morphismes

$$\eta_A \quad : \quad A \longrightarrow TA.$$

On compose $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de la manière suivante:

$$g \circ_K f \quad := \quad \begin{tikzcd} & & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \\ A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Exercice

Montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Remarque: la démonstration d'associativité de la loi de composition amène à considérer le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & & & T^3D \arrow[d, "T\mu"'] \\
 & & T^2C \arrow[ur, "T^2h"] \arrow[d, "\mu"'] & T^2D \arrow[d, "\mu"] \\
 & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \arrow[ur, "Th"] & TD \\
A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & C \arrow[ur, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

dans la catégorie $\mathcal{C}$, et de vérifier que les deux morphismes de A à TD coincident.

Principe de représentation

Toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X,t) \quad : \quad \mathcal{B}(X,A) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(X,A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \qquad \mapsto \qquad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Vérifier que $\mathcal{B}(X,t)$ définit bien une monade sur $\mathcal{B}(X,A)$.

Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t, X) \quad : \quad \mathcal{B}(A, X) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A, X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \qquad \mapsto \qquad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Exercice. Montrer que $\mathcal{B}(t, X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$.

Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens 2-catégorique)

$$s \ : \ A \longrightarrow A \qquad t \ : \ B \longrightarrow B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s,t) \quad : \quad \mathcal{B}(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \mapsto \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[u, "s"] & B \end{tikzcd}$$

cela pour toute 0-cellule X de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Objet de Eilenberg-Moore

Le 2-foncteur

$$X \mapsto \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(A,t)} : \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

est 2-représentable par un objet A^t de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\phi_{X,A} : \mathcal{B}(X, A)^{\mathcal{B}(X,t)} \cong \mathcal{B}(X, A^t)$$

2-naturel en X.

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 1-cellule

$$X \xrightarrow{f} Y$$

le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A^t)"] \\
\mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t)
\end{tikzcd}$$

commute.

$\mathcal{B}(f,t)$ désigne ici le morphisme de monade $\mathcal{B}(Y,t) \longrightarrow \mathcal{B}(X,t)$ induit par f

Propriété de 2-naturalité

Pour toute 2-cellule

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & Y \end{tikzcd}$$

les transformations naturelles induites

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A)^{\mathcal{B}(g,t)}"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow"] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A^t)"] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend right, "\mathcal{B}(f,A^t)"'] \arrow[d, bend left, "\mathcal{B}(g,A^t)"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow"] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \end{tikzcd}$$

coincident.

Objet de Eilenberg-Moore

L'isomorphisme ϕ_{A^t,A^t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A^t} \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

une 1-cellule

$$u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd} & t \circ u^t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{u}"] & \\ u^t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & u^t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \circ t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "t \circ \tilde{u}"'] & t \circ u^t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{u}"] \\ t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{u}"'] & u^t \end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur d'oubli u^t et la transformation naturelle $\tilde{u}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{f}$ munissant la 1-cellule f d'une structure de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$X \xrightarrow{\overline{f}} A^t$$

telle que $\tilde{f}$ se décompose en $\overline{f}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{u}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[r, "\overline{f}"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Remarque: la 1-cellule $\overline{f}$ est définie comme l'image de $(f, \tilde{f})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad f \quad \Rightarrow \quad g \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X, t)$-algèbre entre $(f, \tilde{f})$ et $(g, \tilde{g})$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, ""'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{g}"] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, bend right, "g"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{f}"] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, bend left, ""] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{f} \quad \Rightarrow \quad \overline{g} \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A^t$$

telle que θ se décompose en $\overline{\theta}$ suivi de la 1-cellule u^t

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\overline{f}"] \arrow[r, bend right, "\overline{g}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\theta}"] & A^t \arrow[r, "u^t"] & A \end{tikzcd}$$

Remarque: la 2-cellule $\overline{\theta}$ est l'image de $\theta : (f, \tilde{f}) \Rightarrow (g, \tilde{g})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(A^t, t)$-algèbre

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "t"] \\
A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & A
\end{tikzcd}
$$

la caractérisent comme objet de Eilenberg-Moore associé à la monade t.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Noter que la 2-cellule $\tilde{u}$ fait bien partie de la définition d'objet d'Eilenberg-Moore: elle reflète la famille de foncteurs ϕ incluse dans la notion de 2-représentation.

Construction: le foncteur libre

La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(A,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A \xrightarrow{f^t} A^t$$

telle que

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\ & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "t"] \\ A \arrow[r, "f^t"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur f^t coïncide avec le foncteur libre.

Adjonction $f^t \dashv u^t$ associée

L'unité η de l'adjonction $f^t \dashv u^t$ est définie par l'unité de la monade t

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & A \\ & A^t \arrow[ur, "u^t"'] & \end{tikzcd} \quad := \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[rr, bend right=90, "t"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow \eta"] & & A \end{tikzcd}$$

tandis que la counité ε est définie comme l'unique 2-cellule

$$\varepsilon \quad : \quad f^t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad id \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

satisfaisant l'égalité

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & {} & A \end{tikzcd}$$

Egalités triangulaires (1)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \arrow[dr, "f^t"] & & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & A
\end{tikzcd}
$$

et cette seconde égalité de la définition de f^t

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "id"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \arrow[dr, "t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "t"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\mu"] & A
\end{tikzcd}
$$

On en déduit que la 2-cellule considérée au départ vaut l'identité, et on conclut par propriété de relèvement (unique) sur la 2-cellule u^t

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \arrow[dr, "f^t"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A^t
\end{tikzcd}
\quad = \quad id
$$

Egalités triangulaires (2)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule ε

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \, & A^t \arrow[ur, "u^t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & \, & A \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}
$$

On conclut que

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \, & A^t \arrow[ur, "u^t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad id
$$

par le fait que la 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définit une algèbre de la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$.

Décomposition de la monade t

L'adjonction

$$f^t \dashv u^t$$

a la monade t pour monade associée.

Démonstration: tout d'abord,

$$t \quad = \quad f^t \circ u^t$$

par définition de f^t. Ensuite, l'unité η de l'adjonction coïncide par définition avec l'unité de la monade t. Pour finir, la multiplication

$$u^t \circ f^t \circ u^t \circ f^t \quad \Rightarrow \quad u^t \circ f^t$$

induite par l'adjonction s'écrit

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

et coïncide bien avec la multiplication de la monade, par définition de f^t.

1-cellule entre monades

Une 1-cellule entre deux monades

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "s"'] \\ A \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "t"] \\ B \end{tikzcd}$$

est la donnée d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute

1-cellule entre monades

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend right=80, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\eta \Rightarrow"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=80, "id"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[d, bend right=80, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\eta \Rightarrow"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "s"] & B \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[dr, "s"'] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & {} & \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "s"'] & & B \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & B \arrow[dr, "t"] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & {} \\
& A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Notion élémentaire de morphisme entre monade.

1-cellule entre adjonctions

Une 1-cellule entre deux adjonctions

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ Y \arrow[u, bend right, "r"'] \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ B \arrow[u, bend right, "u"'] \end{tikzcd}$$

est la donnée de deux 1-cellules

$$h_1 \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A \qquad\qquad h_2 \quad : \quad Y \quad \longrightarrow \quad B$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "l"'] & A \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "l"'] & B \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "h_1"'] & A \end{tikzcd}$$

1-cellule entre adjonctions

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "id"'] & & A \arrow[dr, "f"] & \\
\eta \Rightarrow & Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"] & & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] & & A &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[dd, "id"'] & A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "id"'] & \\
 & \eta \Rightarrow & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[r, "h_1"] & A &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] & & B \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"'] & & A \arrow[dr, "f"] & \varepsilon \Rightarrow \\
 & Y \arrow[rr, "h_2"] & & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] \arrow[dd, "id"] & B \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[dr, "l"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Rightarrow"] & {} & \\
 & Y \arrow[r, "h_2"] & B
\end{tikzcd}
$$

Toute 1-cellule d'adjonction induit une 1-cellule de monade.

Propriété universelle de l'objet d'Eilenberg-Moore

Réciproquement, supposons donnée une adjonction

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "l"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Y \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Pour toute 1-cellule entre monades

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r\circ l"'] & A \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule entre adjonctions

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & A \arrow[d, bend right, "f^t"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[u, bend right, "r"'] & A^t \arrow[u, bend right, "u^t"'] \end{tikzcd}$$

telle que la 1-cellule h_1 coïncide avec la 1-cellule h.

Extension de Kan à droite

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Cat} & \\
\mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f^t \dashv u^t"']
\end{tikzcd}
$$

Monades	:	2-catégorie théorie des monades
Adjonctions	:	2-catégorie théorie des adjonctions
t	:	2-foncteur associé à la monade t
$f^t \dashv u^t$	:	2-foncteur associé à l'adjonction $f^t \dashv u^t$

Objet de Kleisli

Le 2-foncteur

$$\boxed{X \quad \mapsto \quad \mathcal{B}(\quad A \quad , \quad X \quad)^{\mathcal{B}(t,X)} \quad : \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Cat}}$$

est 2-représentable par un objet A_t.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\boxed{\psi_{A,X} \quad : \quad \mathcal{B}(\quad A \quad , \quad X \quad)^{\mathcal{B}(t,X)} \quad \cong \quad \mathcal{B}(\quad A_t \quad , \quad X \quad)}$$

2-naturel en X.

Objet de Kleisli

L'isomorphisme ψ_{A_t,A_t} associe à la 1-cellule identité

$$id_{A_t} \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad A_t$$

une 1-cellule

$$f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad f_t \circ t \quad \Rightarrow \quad f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(t, A_t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd} & f_t \circ t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{f}"] & \\ f_t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & f_t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_t \circ t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f} \circ t"'] & f_t \circ t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f}"] \\ f_t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"'] & f_t \end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur libre f_t et la transformation naturelle $\tilde{f}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade t.

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{g}$ munissant la 1-cellule g d'une structure de $\mathcal{B}(t, X)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rd, bend left, "g"] & \\ & X \\ A \arrow[uu, "t"] \arrow[ru, bend right, "g"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \tilde{g}"] & \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$A_t \xrightarrow{\overline{g}} X$$

telle que $\tilde{g}$ se décompose en $\overline{g}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{f}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rd, bend left, "g"] & \\ & X \\ A \arrow[uu, "t"] \arrow[ru, bend right, "g"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \tilde{g}"] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rd, bend left, "f_t"] & & \\ & A_t \arrow[r, "\overline{g}"] & X \\ A \arrow[uu, "t"] \arrow[ru, bend right, "f_t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & & \end{tikzcd}$$

Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad g_1 \quad \Rightarrow \quad g_2 \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad X$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X, t)$-algèbre entre $(g_1, \tilde{g}_1)$ et $(g_2, \tilde{g}_2)$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \tilde{g}_2"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \tilde{g}_1"] & X
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{g}_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{g}_2 \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad X$$

telle que θ se décompose en la 1-cellule u^t suivie de $\overline{\theta}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "\overline{g}_1"] \arrow[r, bend right, "\overline{g}_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_t"] & A_t \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \overline{\theta}"] & X
\end{tikzcd}$$

Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(t, A_t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "f_t"] & & \\
& \Downarrow \tilde{f} & A_t \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[urr, bend right, "f_t"'] & &
\end{tikzcd}$$

la caractérisent comme objet de Kleisli associé à la monade t.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Ici encore, noter que la 2-cellule $\tilde{f}$ fait partie de la définition d'objet de Kleisli.

Construction: le foncteur d'oubli

La multiplication de la monade t définit une structure de $\mathcal{B}(t, A)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "t"] \arrow[dd, "t"'] & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & A \\
A \arrow[ur, bend right, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A_t \xrightarrow{u_t} A$$

telle que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "t"] & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & A \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "t"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "f_t"] & & \\
\arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & A_t \arrow[r, "u_t"] & A \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "f_t"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur u_t coïncide avec le foncteur d'oubli.

Extension de Kan à gauche

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Cat} & \\
\mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f_t \dashv u_t"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{Monades}$	:	2-catégorie théorie des monades
$\mathbf{Adjonctions}$	:	2-catégorie théorie des adjonctions
t	:	2-foncteur associé à la monade t
$f_t \dashv u_t$	:	2-foncteur associé à l'adjonction $f_t \dashv u_t$

Cinquième partie

Monades fortes

Interprétation du lambda-calcul avec effets

Monade forte

Une monade est forte lorsqu'elle est équippée d'une famille de morphismes

$$t_{A,B} \quad : \quad A \times TB \quad \longrightarrow \quad T(A \times B)$$

naturelle en A et B, et telle que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times TC \arrow[rr, "t_{A\times B,C}"] \arrow[dr, "A\times t_{B,C}"'] & & T(A \times B \times C) \\
& A \times T(B \times C) \arrow[ur, "t_{A,B\times C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \times TA \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "t"'] & & TA \\
& T(1 \times A) \arrow[ur, "T\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

Monade forte

$$\begin{tikzcd}
A \times TTB \arrow[r, "t"] \arrow[d, "A\times\mu"'] & T(A \times TB) \arrow[r, "Tt"] & TT(A \times B) \arrow[d, "\mu"] \\
A \times TB \arrow[rr, "t"] & & T(A \times B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "id"] \arrow[d, "A\times\eta"'] & A \times B \arrow[d, "\eta"] \\
A \times TB \arrow[r, "t"] & T(A \times B)
\end{tikzcd}$$

Modèle catégorique du λ-calcul avec effets

Une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$ munie d'une monade forte

$$(T, \mu, \eta, t)$$

avec une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "A\times -"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C}_T \arrow[ll, bend left, "A\Rightarrow T(-)"] \end{tikzcd}$$

pour tout objet A, ceci induisant une bijection

$$\varphi_{A,B,C} \quad : \quad \mathcal{C}_T(A \times B, C) \quad \cong \quad \mathcal{C}(B, A \Rightarrow TC)$$

naturelle en B et C.

Interprétation des types du λ-calcul avec effets

$$
\begin{aligned}
[\![A \rightharpoonup B]\!] &= [\![A]\!] \Rightarrow T\,[\![B]\!] \\[2em]
[\![A \times B]\!] &= [\![A]\!] \times [\![B]\!] \\[2em]
[\![TA]\!] &= T\,[\![A]\!]
\end{aligned}
$$

Interprétation des séquents

Tout séquent

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \quad \vdash \quad P \quad : \quad B$$

est interprété par un morphisme

$$[\![A_1 \times \cdots \times A_n]\!] \quad \longrightarrow \quad [\![B]\!]$$

de la catégorie de kleisli associée à la monade T, autrement dit,

$$[\![A_1 \times \cdots \times A_n]\!] \quad \longrightarrow \quad T\,[\![B]\!]$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de l'abstraction

Abstraction $$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightharpoonup B}$$

La règle transforme le morphisme

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$ en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi_{\Gamma,A,B}(f)} A \Rightarrow TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de l'application

La règle

$$\text{Application} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : A \rightharpoonup B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} A \Rightarrow TB$$

et

$$\Delta \xrightarrow{g} TA$$

en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{g \times f} TA \times (A \Rightarrow TB) \xrightarrow{t} T(A \times (A \Rightarrow TB)) \xrightarrow{T(eval)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation du let

La règle

$$\text{Let} \quad \frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash let\ x = P\ in\ Q : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} TA$$

et

$$A \times \Delta \xrightarrow{g} TB$$

en le morphisme

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times \Delta} TA \times \Delta \xrightarrow{t} T(A \times \Delta) \xrightarrow{T(g)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

Interprétation de la paire

On doit choisir une ordre d'implémentation pour la paire

$$\langle P, Q \rangle$$

On choisit typiquement l'ordre gauche-droite, induit par le morphisme

$$TA \times TB \quad \longrightarrow \quad T(A \times TB) \quad \longrightarrow \quad TT(A \times B) \quad \xrightarrow{\mu} \quad T(A \times B).$$