# Lambda calculs et catégories

Paul-André Melliès

Master Parisien de Recherche en Informatique

Ecole Normale Supérieure

# Plan de la séance

1 – Théorie formelle des monades

2 – Lambda-calcul avec effets

3 – Monades fortes

# Première partie

# Théorie formelle des monades

Catégorie de Kleisli, catégorie d'Eilenberg-Moore

# Monade formelle

Soit $A$ une $0$-cellule dans une 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Une monade $s$ sur la $0$-cellule $A$ est une 1-cellule

$$s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une multiplication

$$\mu \quad : \quad s \circ s \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

et d'une unité

$$\eta \quad : \quad Id_A \quad \Rightarrow \quad s \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

satisfaisant les lois d'associativité et d'unité.

Autrement dit, une monade $s$ est un monoïde de la catégorie monoïdale $\mathcal{B}(A, A)$.

# Toute adjonction définit une monade

**(démonstration graphique)**

# Algèbre

Une algèbre de la monade $(T, \mu, \eta)$ est une paire $(A, h)$ constituée

— d'un objet $A$ morphisme

— d'un morphisme

$$h \quad : \quad TA \longrightarrow A$$

faisant commuter

$$\begin{tikzcd}
 & TA \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "\eta_A"] \arrow[rr, "id"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T^2A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "Th"'] & TA \arrow[d, "h"] \\
TA \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

## Morphismes d'algèbre

Un morphisme d'algèbre

$$f \quad : \quad (A, h_A) \longrightarrow (B, h_B)$$

est un morphisme

$$f : A \longrightarrow B$$

entre les objets sous-jacents dans la catégorie $\mathcal{C}$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h_A"'] & TB \arrow[d, "h_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute.

# Catégorie de Kleisli

La catégorie de Kleisli $\mathcal{C}_T$ d'une monade $(T, \mu, \eta)$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ a

— pour objets les objets de $\mathcal{C}$,

— pour morphismes $A \to B$ les morphismes de $A \longrightarrow TB$ dans la catégorie $\mathcal{C}$,

Les identités $A \to A$ sont données par les morphismes

$$\eta_A \quad : \quad A \longrightarrow TA.$$

On compose $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de la manière suivante:

$$g \circ_K f \quad := \quad \begin{tikzcd} & & TTC \arrow[d, "\mu_C"] \\ & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \\ A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

# Exercice

Montrer que les identités sont des identités, et que la composition est associative.

Remarque: la démonstration d'associativité de la loi de composition amène à considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & T^3D \arrow[d, "T\mu"'] \\
 & & T^2C \arrow[ur, "T^2h"] \arrow[d, "\mu"'] & T^2D \arrow[d, "\mu"] \\
 & TB \arrow[ur, "Tg"] & TC \arrow[ur, "Th"] & TD \\
A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[ur, "g"] & C \arrow[ur, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie $\mathcal{C}$, et de vérifier que les deux morphismes de $A$ à $TD$ coincident.

## Principe de représentation

Toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(X,t) \quad : \quad \mathcal{B}(X,A) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(X,A)$$

définie par post-composition

$$X \xrightarrow{f} A \qquad \mapsto \qquad X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{t} A$$

et cela pour toute $0$-cellule $X$ de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

**Exercice.** Vérifier que $\mathcal{B}(X,t)$ définit bien une monade sur $\mathcal{B}(X,A)$.

# Principe de représentation (dual)

Dualement, toute monade (au sens 2-catégorique)

$$t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(t,X) \quad : \quad \mathcal{B}(A,X) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,X)$$

définie par pré-composition cette fois-ci:

$$A \xrightarrow{f} X \qquad \mapsto \qquad A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{f} X$$

cela pour toute $0$-cellule $X$ de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

**Exercice.** Montrer que $\mathcal{B}(t,X) = \mathcal{B}^{op}(X^{op}, t^{op})$.

# Principe de représentation (mixte)

Toute paire de monades (au sens 2-catégorique)

$$s \;:\; A \longrightarrow A \qquad t \;:\; B \longrightarrow B$$

induit une monade (au sens catégorique)

$$\mathcal{B}(s,t) \quad : \quad \mathcal{B}(A,B) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{B}(A,B)$$

définie par pré- et post- composition:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \mapsto \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[u, "s"] & B \end{tikzcd}$$

cela pour toute $0$-cellule $X$ de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

# Objet de Eilenberg-Moore

Le 2-foncteur

$$\boxed{X \quad \mapsto \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A \quad)^{\mathcal{B}(A,t)} \quad : \quad \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{Cat}}$$

est 2-représentable par un objet $A^t$ de la 2-catégorie $\mathcal{B}$.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\boxed{\phi_{X,A} \quad : \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A \quad)^{\mathcal{B}(X,t)} \quad \cong \quad \mathcal{B}(\quad X \quad , \quad A^t \quad)}$$

2-naturel en $X$.

# Propriété de 2-naturalité

Pour toute 1-cellule

$$X \xrightarrow{f} Y$$

le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, "\mathcal{B}(f,A^t)"] \\
\mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t)
\end{tikzcd}$$

commute.

$\mathcal{B}(f,t)$ désigne ici le morphisme de monade $\mathcal{B}(Y,t) \longrightarrow \mathcal{B}(X,t)$ induit par $f$

# Propriété de 2-naturalité

Pour toute 2-cellule

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & Y \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\theta"] \end{tikzcd}$$

les transformations naturelles induites

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right=50, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'{name=L}] \arrow[d, bend left=50, "\mathcal{B}(g,A)^{\mathcal{B}(g,t)}"{name=R}] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend left=50, "\mathcal{B}(g,A^t)"] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \arrow[from=L, to=R, phantom, "\Rightarrow"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{B}(Y,A)^{\mathcal{B}(Y,t)} \arrow[r, "\phi_{Y,A}"] \arrow[d, bend right=50, "\mathcal{B}(f,A)^{\mathcal{B}(f,t)}"'] & \mathcal{B}(Y,A^t) \arrow[d, bend right=50, "\mathcal{B}(f,A^t)"'{name=L}] \arrow[d, bend left=50, "\mathcal{B}(g,A^t)"{name=R}] \\ \mathcal{B}(X,A)^{\mathcal{B}(X,t)} \arrow[r, "\phi_{X,A}"] & \mathcal{B}(X,A^t) \arrow[from=L, to=R, phantom, "\Rightarrow"] \end{tikzcd}$$

coincident.

# Objet de Eilenberg-Moore

L'isomorphisme $\phi_{A^t,A^t}$ associe à la 1-cellule identité

$$id_{A^t} \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

une 1-cellule

$$u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd}
 & t \circ u^t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{u}"] & \\
u^t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & u^t
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t \circ t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "t \circ \tilde{u}"'] & t \circ u^t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{u}"] \\
t \circ u^t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{u}"'] & u^t
\end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur d'oubli $u^t$ et la transformation naturelle $\tilde{u}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade $t$.

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{f}$ munissant la 1-cellule $f$ d'une structure de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$X \xrightarrow{\overline{f}} A^t$$

telle que $\tilde{f}$ se décompose en $\overline{f}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{u}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] & \\ & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "t"] \\ X \arrow[r, "\overline{f}"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Remarque: la 1-cellule $\overline{f}$ est définie comme l'image de $(f, \tilde{f})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad f \quad \Rightarrow \quad g \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X,t)$-algèbre entre $(f,\tilde{f})$ et $(g,\tilde{g})$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, ""] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{g}"] & A \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, bend right, "g"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, dash, "id"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{f}"] & A \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, bend left, ""] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{f} \quad \Rightarrow \quad \overline{g} \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A^t$$

telle que $\theta$ se décompose en $\overline{\theta}$ suivi de la 1-cellule $u^t$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "\overline{f}"] \arrow[r, bend right, "\overline{g}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\theta}"] & A^t \arrow[r, "u^t"] & A
\end{tikzcd}$$

Remarque: la 2-cellule $\overline{\theta}$ est l'image de $\theta : (f,\tilde{f}) \Rightarrow (g,\tilde{g})$ par le foncteur $\phi_{X,A}$.

# Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(A^t, t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "t"] \\ A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\ & A \end{tikzcd}$$

la caractérisent comme objet de Eilenberg-Moore associé à la monade $t$.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Noter que la 2-cellule $\tilde{u}$ fait bien partie de la définition d'objet d'Eilenberg-Moore: elle reflète la famille de foncteurs $\phi$ incluse dans la notion de 2-représentation.

# Construction: le foncteur libre

La multiplication de la monade $t$ définit une structure de $\mathcal{B}(A,t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & A \end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une 1-cellule unique

$$A \xrightarrow{f^t} A^t$$

telle que

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[ur, bend left, "t"] \arrow[dr, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mu"] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & & A \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f^t"] & A^t \arrow[ur, bend left, "u^t"] \arrow[dr, bend right, "u^t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & A \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur $f^t$ coïncide avec le foncteur libre.

# Adjonction $f^t \dashv u^t$ associée

L'unité $\eta$ de l'adjonction $f^t \dashv u^t$ est définie par l'unité de la monade $t$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \\ & A^t \arrow[ur, "u^t"'] & \end{tikzcd} \quad := \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "id"] \arrow[rr, bend right=80, "t"'] & \Downarrow\eta & A \end{tikzcd}$$

tandis que la counité $\varepsilon$ est définie comme l'unique 2-cellule

$$\varepsilon \quad : \quad f^t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad id \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A^t$$

satisfaisant l'égalité

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f^t"] & & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "t"] & \\ A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\tilde{u}"] & A \end{tikzcd}$$

# Egalités triangulaires (1)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule $\varepsilon$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & {} & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & {} & A
\end{tikzcd}
$$

et cette seconde égalité de la définition de $f^t$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & {} & A
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "id"'] & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mu"] & \\
& A^t \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & {} & A
\end{tikzcd}
$$

On en déduit que la 2-cellule considérée au départ vaut l'identité, et on conclut par propriété de relèvement (unique) sur la 2-cellule $u^t$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"'] & & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & \\
& A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] & {} & A^t
\end{tikzcd}
= \quad id
$$

# Egalités triangulaires (2)

On déduit l'égalité ci-dessous de la définition de la 2-cellule $\varepsilon$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[ur, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & {} & A \arrow[ur, "id"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] &
\end{tikzcd}
$$

On conclut que

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & A \\
A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[ur, "u^t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \eta"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad id
$$

par le fait que la 2-cellule

$$\tilde{u} \quad : \quad t \circ u^t \quad \Rightarrow \quad u^t \quad : \quad A^t \quad \longrightarrow \quad A$$

définit une algèbre de la monade $\mathcal{B}(A^t, t)$.

# Décomposition de la monade $t$

L'adjonction

$$f^t \dashv u^t$$

a la monade $t$ pour monade associée.

Démonstration: tout d'abord,

$$t \quad = \quad f^t \quad \circ \quad u^t$$

par définition de $f^t$. Ensuite, l'unité $\eta$ de l'adjonction coïncide par définition avec l'unité de la monade $t$. Pour finir, la multiplication

$$u^t \circ f^t \circ u^t \circ f^t \quad \Rightarrow \quad u^t \circ f^t$$

induite par l'adjonction s'écrit

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f^t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "id"'] & {} & A^t \arrow[r, "u^t"'] & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \tilde{u}"] & \\
A \arrow[r, "f^t"'] & A^t \arrow[ur, "u^t"] \arrow[rr, "u^t"'] & {} & A
\end{tikzcd}$$

et coïncide bien avec la multiplication de la monade, par définition de $f^t$.

# 1-cellule entre monades

Une 1-cellule entre deux monades

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "s"'] \\ A \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "t"] \\ B \end{tikzcd}$$

est la donnée d'une 1-cellule

$$f \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad B$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

commute

# 1-cellule entre monades

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\eta \Rightarrow"] & B \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[d, bend right=60, "id"'] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\eta \Rightarrow"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd, "s"] & B \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[dr, "s"'] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "s"'] & & B \arrow[dl, "t"'] \arrow[dd, "t"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & B \arrow[dr, "t"] \arrow[r, phantom, "\mu \Rightarrow"] & \\
 & A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}
$$

Notion élémentaire de morphisme entre monade.

# 1-cellule entre adjonctions

Une 1-cellule entre deux adjonctions

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ Y \arrow[u, bend right, "r"'] \end{tikzcd} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ B \arrow[u, bend right, "u"'] \end{tikzcd}$$

est la donnée de deux 1-cellules

$$h_1 \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad A \qquad\qquad h_2 \quad : \quad Y \quad \longrightarrow \quad B$$

tels que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "l"'] & A \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h_2"'] & B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "l"'] & B \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "h_1"'] & A \end{tikzcd}$$

# 1-cellule entre adjonctions

et les égalités suivantes sont satisfaites:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "id"'] & & A \arrow[dr, "f"] & \\
\arrow[r, phantom, "\eta \Rightarrow"] & Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"] & & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] & & A &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[dd, "id"'] & A \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "id"'] & \\
& \arrow[r, phantom, "\eta \Rightarrow"] & B \arrow[dl, "u"] \\
X \arrow[r, "h_1"] & A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] & & B \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "l"'] & & A \arrow[dr, "f"] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Rightarrow"] & \\
& Y \arrow[rr, "h_2"] & & B
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[dl, "r"'] \arrow[dd, "id"] & B \arrow[dd, "id"] \\
X \arrow[dr, "l"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon \Rightarrow"] & & \\
& Y \arrow[r, "h_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Toute 1-cellule d'adjonction induit une 1-cellule de monade.

# Propriété universelle de l'objet d'Eilenberg-Moore

Réciproquement, supposons donnée une adjonction

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, bend left, "l"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & Y \arrow[ll, bend left, "r"]
\end{tikzcd}
$$

Pour toute 1-cellule entre monades

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r \circ l"'] & A \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "h"] & A
\end{tikzcd}
$$

il existe une et une seule 1-cellule entre adjonctions

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & A \arrow[d, bend right, "f^t"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
Y \arrow[r, "h_2"] \arrow[u, bend right, "r"'] & A^t \arrow[u, bend right, "u^t"']
\end{tikzcd}
$$

telle que la 1-cellule $h_1$ coïncide avec la 1-cellule $h$.

# Extension de Kan à droite

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Cat} & \\ \mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f^t \dashv u^t"'] \end{tikzcd}$$

| | | |
|---|---|---|
| **Monades** | : | 2-catégorie théorie des monades |
| **Adjonctions** | : | 2-catégorie théorie des adjonctions |
| $t$ | : | 2-foncteur associé à la monade $t$ |
| $f^t \dashv u^t$ | : | 2-foncteur associé à l'adjonction $f^t \dashv u^t$ |

# Objet de Kleisli

Le 2-foncteur

$$\boxed{X \mapsto \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t,X)} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Cat}}$$

est 2-représentable par un objet $A_t$.

Autrement dit, il existe un isomorphisme de catégorie

$$\boxed{\psi_{A,X} : \mathcal{B}(A, X)^{\mathcal{B}(t,X)} \cong \mathcal{B}(A_t, X)}$$

2-naturel en $X$.

# Objet de Kleisli

L'isomorphisme $\psi_{A_t,A_t}$ associe à la 1-cellule identité

$$id_{A_t} \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad A_t$$

une 1-cellule

$$f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

munie d'une 2-cellule

$$\tilde{f} \quad : \quad f_t \circ t \quad \Rightarrow \quad f_t \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad A_t$$

définissant une structure d'algèbre pour la monade $\mathcal{B}(t, A_t)$, c'est-à-dire faisant commuter les diagrammes de 2-cellules suivants:

$$\begin{tikzcd} & f_t \circ t \arrow[dr, Rightarrow, "\tilde{f}"] & \\ f_t \arrow[ur, Rightarrow, "\eta"] \arrow[rr, Rightarrow, "id"'] & & f_t \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_t \circ t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f} \circ t"'] & f_t \circ t \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{f}"] \\ f_t \circ t \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{f}"'] & f_t \end{tikzcd}$$

Lorsque $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur libre $f_t$ et la transformation naturelle $\tilde{f}$ décrivent uniformément toutes les algèbres de la monade $t$.

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule $\tilde{g}$ munissant la 1-cellule $g$ d'une structure de $\mathcal{B}(t,X)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "g"] & & \\
& \Downarrow \tilde{g} & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[rru, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 1-cellule

$$\begin{tikzcd}
A_t \arrow[r, "\overline{g}"] & X
\end{tikzcd}$$

telle que $\tilde{g}$ se décompose en $\overline{g}$ suivi de la 2-cellule $\tilde{f}$ définie plus haut:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "g"] & & \\
& \Downarrow \tilde{g} & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[rru, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "f_t"] & & & \\
& \Downarrow \tilde{f} & A_t \arrow[r, "\overline{g}"] & X \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[rru, bend right, "f_t"'] & & &
\end{tikzcd}$$

# Propriété de relèvement

Pour toute 2-cellule

$$\theta \quad : \quad g_1 \quad \Rightarrow \quad g_2 \quad : \quad A \quad \longrightarrow \quad X$$

définissant une 2-cellule de $\mathcal{B}(X, t)$-algèbre entre $(g_1, \tilde{g}_1)$ et $(g_2, \tilde{g}_2)$, c-à-d telle que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\tilde{g}_2"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g_1"] & X \arrow[d, dash, "id"] \\
A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\tilde{g}_1"] & X
\end{tikzcd}$$

il existe une et une seule 2-cellule

$$\overline{\theta} \quad : \quad \overline{g}_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{g}_2 \quad : \quad A_t \quad \longrightarrow \quad X$$

telle que $\theta$ se décompose en la 1-cellule $u^t$ suivie de $\overline{\theta}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "\overline{g_1}"] \arrow[r, bend right, "\overline{g_2}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & X
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_t"] & A_t \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\overline{\theta}"] & X
\end{tikzcd}$$

# Caractérisation

Ces deux propriétés de relèvement induites par la $\mathcal{B}(t, A_t)$-algèbre

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, bend left, "f_t"] & \\
 & A_t \\
A \arrow[uu, "t"] \arrow[ur, bend right, "f_t"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

la caractérisent comme objet de Kleisli associé à la monade $t$.

Reformulation de la définition par représentation 2-dimensionnelle

Ici encore, noter que la 2-cellule $\tilde{f}$ fait partie de la définition d'objet de Kleisli.

# Construction: le foncteur d'oubli

La multiplication de la monade $t$ définit une structure de $\mathcal{B}(t, A)$-algèbre

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, bend left, "t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mu" near start] & \\ A \arrow[r, bend right, "t"'] & A \end{tikzcd}$$

Par propriété de relèvement, il existe donc une $1$-cellule unique

$$A_t \xrightarrow{u_t} A$$

telle que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, bend left, "t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \mu" near start] & \\ A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend right, "t"'] & A \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, bend left, "f_t"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \tilde{f}" near start] & & \\ A \arrow[u, "t"] \arrow[r, bend right, "f_t"'] & A_t \arrow[r, "u_t"] & A \end{tikzcd}$$

Dans le cas de $\mathcal{B} = \mathbf{Cat}$, le foncteur $u_t$ coïncide avec le foncteur d'oubli.

# Extension de Kan à gauche

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Cat} & \\ \mathbf{Monades} \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "inj"'] & & \mathbf{Adjonctions} \arrow[ul, "f_t \dashv u_t"'] \end{tikzcd}$$

| | | |
|---|---|---|
| **Monades** | : | 2-catégorie théorie des monades |
| **Adjonctions** | : | 2-catégorie théorie des adjonctions |
| $t$ | : | 2-foncteur associé à la monade $t$ |
| $f_t \dashv u_t$ | : | 2-foncteur associé à l'adjonction $f_t \dashv u_t$ |

# Deuxième partie

# Lambda-calcul avec effets

Un langage avec effets de bord

# Lambda-calcul avec effets

Une notion de type étendue:

$$A, B ::= \alpha \mid A \rightharpoonup B \mid A \times B \mid T(A).$$

Deux nouvelles formes de séquents:

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : \; A$$

qui signifie que $P$ et $Q$ sont égaux et de type $A$, et

$$\Gamma \vdash P \downarrow \; A$$

qui signifie que $P$ est sans effet de bord et de type $A$.

# Conditions de bonne formation

A noter les conditions de bonne formation suivantes:

1. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \equiv Q : A$$

ne peut être valide que si les séquents

$$\Gamma \vdash P : A \qquad \text{et} \qquad \Gamma \vdash Q : A$$

sont valides.

2. Le séquent

$$\Gamma \vdash P \downarrow A$$

ne peut être valide que si le séquent

$$\Gamma \vdash P : A$$

est valide.

# Lambda-calcul avec effets

| | |
|---|---|
| Variable | $\dfrac{}{x : A \vdash x : A}$ |
| Abstraction | $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightharpoonup B}$ |
| Application | $\dfrac{\Gamma \vdash P : A \rightharpoonup B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$ |
| Affaiblissement | $\dfrac{\Gamma \vdash P : B}{\Gamma, x : A \vdash P : B}$ |
| Contraction | $\dfrac{\Gamma, x : A, y : A \vdash P : B}{\Gamma, z : A \vdash P[x, y \leftarrow z] : B}$ |
| Permutation | $\dfrac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash P : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash P : C}$ |

# Lambda-calcul avec effets

Paire

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Gamma \vdash Q : B}{\Gamma \vdash \langle P, Q \rangle : A \times B}$$

Projection gauche

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1\ P : A}$$

Projection droite

$$\frac{\Gamma \vdash P : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_2\ P : B}$$

Unité

$$\frac{}{\Gamma \vdash * : 1}$$

# Lambda-calcul avec effets

Let $$\frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash let\ x = P\ in\ Q : B}$$

[−] $$\frac{\Gamma \vdash P : A}{\Gamma \vdash [P] : TA}$$

$\mu$ $$\frac{\Gamma \vdash P : TA}{\Gamma \vdash \mu(P) : A}$$

# Règles générales

$$\frac{}{x :\ A \vdash x \downarrow A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P : B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P \downarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash P[x := Q] \downarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash Q \downarrow A \qquad \Delta, x : A \vdash P_1 \equiv P_2\ B}{\Gamma, \Delta \vdash P_1[x := Q] \equiv P_2[x := Q]\ : B}$$

# Règles pour la substitution

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x = P\ in\ x \quad \equiv \quad P \quad : \quad A$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x_2 = (let\ x_1 = Q_1\ in\ Q_2)\ in\ P \quad \equiv \quad let\ x_1 = Q_1\ in\ (let\ x_2 = Q_2\ in\ P) \quad : \quad A$$

lorsque la variable $x_1$ n'est pas libre dans $P$.

$$\Gamma \quad \vdash \quad let\ x_1 = x_2\ in\ P \quad \equiv \quad P[x_1 := x_2] \quad : \quad A$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad P\vec{Q} \quad \equiv \quad let\ \vec{x} = \vec{Q}\ in\ P\vec{x} \quad : \quad A$$

# Règles pour les types calculatoires

$$\Gamma \quad \vdash \quad [P] \;\downarrow\; TA$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad \mu([P]) \;\equiv\; P \quad : \quad A$$

$$x : A \quad \vdash \quad [\mu(x)] \;\equiv\; x \quad : \quad TA$$

## Règles pour l'unité

$$\vdash \quad * \downarrow 1$$

$$x : 1 \quad \vdash \quad * \equiv x \quad : \quad 1$$

# Règles pour le produit cartésien

$$x : A, y : B \quad \vdash \quad \langle x, y \rangle \;\downarrow\; A \times B$$

$$\Gamma \quad \vdash \quad \langle P, Q \rangle \;\equiv\; let\ x, y = P, Q\ in\ \langle x, y \rangle \quad : \quad A \times B$$

$$x : A_1 \times A_2 \quad \vdash \quad \pi_i(x) \;\downarrow\; A_i$$

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2 \quad \vdash \quad \pi_i(\langle x_1, x_2 \rangle) \;\equiv\; x_i \quad : \quad A_i$$

$$x : A \times B \quad \vdash \quad \langle \pi_1(x), \pi_2(x) \rangle \;\equiv\; x \quad : \quad A \times B$$

# Règles pour le $\lambda$-calcul

$$\Gamma \quad \vdash \quad (\lambda x.P) \quad \downarrow \quad A \rightharpoonup B$$

$$\Gamma, x : A \quad \vdash \quad (\lambda x.P)x \quad \equiv \quad P \quad : \quad B$$

$$x : A \rightharpoonup B \quad \vdash \quad \lambda y.xy \quad \equiv \quad x \quad : \quad A \rightharpoonup B$$

# Troisième partie

# Monades fortes

Interprétation catégorique du lambda-calcul avec effets

# Monade forte

Une monade est forte lorsqu'elle est équippée d'une famille de morphismes

$$t_{A,B} \quad : \quad A \times TB \quad \longrightarrow \quad T(A \times B)$$

naturelle en $A$ et $B$, et telle que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \times TC \arrow[rr, "t_{A\times B,C}"] \arrow[dr, "A\times t_{B,C}"'] & & T(A \times B \times C) \\
& A \times T(B \times C) \arrow[ur, "t_{A,B\times C}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \times TA \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "t"'] & & TA \\
& T(1 \times A) \arrow[ur, "T\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

# Monade forte

$$
\begin{tikzcd}
A \times TTB \arrow[r, "t"] \arrow[d, "A\times\mu"'] & T(A \times TB) \arrow[r, "Tt"] & TT(A \times B) \arrow[d, "\mu"] \\
A \times TB \arrow[rr, "t"] & & T(A \times B)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "id"] \arrow[d, "A\times\eta"'] & A \times B \arrow[d, "\eta"] \\
A \times TB \arrow[r, "t"] & T(A \times B)
\end{tikzcd}
$$

# Modèle catégorique du $\lambda$-calcul avec effets

Une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$ munie d'une monade forte

$$(T, \mu, \eta, t)$$

avec une adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "A\times-"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C}_T \arrow[ll, bend left, "A\Rightarrow T(-)"] \end{tikzcd}$$

pour tout objet $A$, ceci induisant une bijection

$$\varphi_{A,B,C} \quad : \quad \mathcal{C}_T(A \times B, C) \quad \cong \quad \mathcal{C}(B, A \Rightarrow TC)$$

naturelle en $B$ et $C$.

## Interprétation des types du $\lambda$-calcul avec effets

$$[\![A \rightharpoonup B]\!] = [\![A]\!] \Rightarrow T\,[\![B]\!]$$

$$[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$$

$$[\![TA]\!] = T\,[\![A]\!]$$

# Interprétation des séquents

Tout séquent

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \quad \vdash \quad P \quad : \quad B$$

est interprété par un morphisme

$$[\![ A_1 \times \cdots \times A_n ]\!] \quad \longrightarrow \quad [\![ B ]\!]$$

de la catégorie de kleisli associée à la monade $T$, autrement dit,

$$[\![ A_1 \times \cdots \times A_n ]\!] \quad \longrightarrow \quad T\,[\![ B ]\!]$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

# Interprétation de l'abstraction

Abstraction $$\frac{\Gamma, x : A \vdash P : B}{\Gamma \vdash \lambda x.P : A \rightharpoonup B}$$

La règle transforme le morphisme

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$ en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{\varphi_{\Gamma,A,B}(f)} A \Rightarrow TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

# Interprétation de l'application

La règle

$$\text{Application} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : A \rightharpoonup B \qquad \Delta \vdash Q : A}{\Gamma, \Delta \vdash PQ : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} A \Rightarrow TB$$

et

$$\Delta \xrightarrow{g} TA$$

en le morphisme

$$\Gamma \xrightarrow{g \times f} TA \times (A \Rightarrow TB) \xrightarrow{t} T(A \times (A \Rightarrow TB)) \xrightarrow{T(eval)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

# Interprétation du let

La règle

$$\text{Let}\qquad \frac{\Gamma \vdash P : A \qquad \Delta, x : A \vdash Q : B}{\Gamma, \Delta \vdash let\ x = P\ in\ Q : B}$$

transforme les morphismes de la catégorie $\mathcal{C}$

$$\Gamma \xrightarrow{f} TA$$

et

$$A \times \Delta \xrightarrow{g} TB$$

en le morphisme

$$\Gamma \times \Delta \xrightarrow{f \times \Delta} TA \times \Delta \xrightarrow{t} T(A \times \Delta) \xrightarrow{T(g)} TT(B) \xrightarrow{\mu_B} TB$$

de la catégorie $\mathcal{C}$.

# Interprétation de la paire

On doit choisir une ordre d'implémentation pour la paire

$$\langle P, Q \rangle$$

On choisit typiquement l'ordre gauche-droite, induit par le morphisme

$$TA \times TB \longrightarrow T(A \times TB) \longrightarrow TT(A \times B) \xrightarrow{\mu} T(A \times B).$$