TD1 – Monoïdes

Samuel Mimram

1er octobre 2009

1 Produit cartésien

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On rappelle qu'un *produit cartésien* de deux objets A et B est la donnée d'un objet noté $A \times B$, ainsi que de deux morphismes

$$\pi_1 : A \times B \to A \quad \text{et} \quad \pi_2 : A \times B \to B$$

tels que pour objet C pour lequel il existe deux morphismes $f : C \to A$ et $g : C \to B$, il existe un unique morphisme $h : C \to A \times B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& C \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[uul, "f"] \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

commute. Une catégorie est *cartésienne* lorsqu'elle a les produits finis, c'est-à-dire qu'elle admet un objet terminal (souvent noté 1) et que toute paire d'objet admet un produit.

1. Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On lui associe une catégorie dont les objets sont les éléments de E et telle qu'il existe un unique morphisme entre deux objets a et b si $a \leq b$. Qu'est-ce qu'un produit dans cette catégorie ?
2. Montrez que la catégorie **Ens** des ensembles et fonctions est cartésienne.
3. Montrez que le produit cartésien de deux objets A et B est défini à isomorphisme près.
4. Montrez que pour tout objet A d'un catégorie cartésienne, les objets $1 \times A$, A et $A \times 1$ sont canoniquement isomorphes.
5. Montrez que pour tous objets A, B et C d'une catégorie cartésienne, les objets $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ sont canoniquement isomorphes.
6. Montrez que pour tous objets A et B d'une catégorie cartésienne, les objets $A \times B$ et $B \times A$ sont canoniquement isomorphes.
7. Montrez que la catégorie **Rel** des ensembles et relations est cartésienne, ainsi que **Vect** et **Cat**.
8. Généralisez la notion de monoïde à une catégorie cartésienne quelconque de sorte qu'un objet monoïde dans **Ens** soit un monoïde au sens habituel.
9. Un *morphisme de monoïde* entre deux monoïdes (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) d'une catégorie cartésienne est un morphisme $f : A \to B$ compatible avec la structure des monoïdes. Écrivez les deux lois de compatibilité que doivent satisfaire ces morphismes.
10. Définissez la notion de *comonoïde* dans une catégorie cartésienne, qui est duale de celle de monoïde.

11. Montrez que tout objet d'une catégorie cartésienne est canoniquement muni d'une structure de comonoïde commutatif.
12. [Optionnel] Redéfinissez la notion de produit dans une catégorie cartésienne en utilisant la structure de comonoïde commutatif définie à la question précédente.

2 Actions de monoïdes et automates

1. Décrivez une catégorie $\mathcal{G}$ telle que les graphes (avec éventuellement plusieurs arêtes entre deux sommets) soient en bijection avec les foncteurs $\mathcal{G} \to \mathbf{Ens}$.
2. Qu'est-ce qu'une catégorie à un seul objet ?
3. Déduisez-en un foncteur $\Sigma : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Cat}$ de la catégorie **Mon** (des monoïdes dans **Ens**) dans **Cat**.
4. Montrez que ce foncteur Σ est plein et fidèle, c'est-à-dire que pour tous monoïdes M et N, $\mathbf{Mon}(M, N) \cong \mathbf{Cat}(\Sigma M, \Sigma N)$.
5. Une *action à gauche* d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ sur un ensemble E est une fonction $a : M \times E \to E$ qui est compatible avec la structure de monoïde sur M (on utilisera la notation $m \bullet e = a(m, e)$). Écrivez les deux équations de compatibilité.
6. Montrez qu'une action à gauche d'un monoïde M peut être vue comme un foncteur $\Sigma(M) \to \mathbf{Ens}$.
7. Expliquez comment un automate déterministe complet sur un alphabet A induit une action à gauche de A^* sur E (l'ensemble de ses états). Caractérisez le langage reconnu par l'automate à l'aide de l'action de monoïde.
8. À tout automate déterministe complet $\mathcal{A}$ sur un alphabet A, on peut donc associer un foncteur $\phi_{\mathcal{A}} : \Sigma(A^*) \to \mathbf{Ens}$. Comment peut-on de même voir de façon fonctorielle un automate non-déterministe complet ?
9. Soit A et A' sont deux ensembles d'alphabet et $s : A \to A'$ une fonction. Un réétiquetage selon s d'un automate $\mathcal{A}$ sur l'alphabet A est l'automate $\mathcal{A}'$ sur l'alphabet A' obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en remplaçant les transitions sur une lettre a par une transition sur $s(a)$. Montrez que $s : A \to A'$ induit un morphisme de monoïdes $s^* : A^* \to A'^*$ tel que $\phi_{\mathcal{A}'} \circ s = \phi_{\mathcal{A}}$.
10. Expliquez pourquoi un foncteur d'une catégorie quelconque (avec plusieurs objets) dans **Ens** peut être informellement vu comme un "automate multisorté".

3 Une présentation de la catégorie simpliciale

Une présentation (G, R) d'un monoïde $(M, \cdot, 1)$ est la donnée d'un ensemble G de *générateurs* et d'un ensemble $R \subseteq G^* \times G^*$ de *relations* tels que le monoïde M soit isomorphe au monoïde libre G^* engendré par G quotienté par la plus petite congruence contenant les relations.

1. Proposez une présentation pour les monoïdes additifs suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}/2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times (\mathbb{N}/2\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$.
2. Comment peut-on prouver que ces présentations sont correctes (i.e. qu'on a bien l'isomorphisme requis) en orientant les relations de chacune des présentations en un système de réécriture normalisant (terminant et confluent) ?

L'objectif de cette partie est de construire une présentation de la *catégorie simpliciale* Δ (en généralisant la notion précédente de présentation d'un monoïde). Les objets de cette catégorie sont les ensembles finis $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$ à n éléments et les morphismes sont les fonctions croisssantes.

1. Montrez que l'objet $[1]$ est terminal dans cette catégorie.
2. On note respectivement les morphismes terminaux de $[2]$, $[1]$ et $[0]$ dans $[1]$ par

Comment représenter les morphismes $\delta_i^n : [n] \to [n+1]$ et $\varepsilon_i^n : [n+2] \to [n+1]$ (avec $0 \le i \le n$) définis par

$$\delta_i^m(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i^n = \begin{cases} k & \text{si } k \le i \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Utilisez cette représentation pour déterminer les relations de commutations entre ces morphismes, i.e. trouvez les membres droits des équations suivantes :

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n =? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \varepsilon_i^{n+2} =? \qquad \varepsilon_j^{n+1} \circ \delta_i^{n+1} =? \tag{1}$$

4. Montrez que tout morphisme de la catégorie Δ est égal à une composée des morphismes δ_i^n et ε_i^n.
5. Montrez que deux composées de δ_i^n et ε_i^n représentent le même morphisme si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en utilisant les équations (1).
6. Le *n-simplexe standard* Δ_n est le sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ dont les points sont

$$\Delta_n \quad = \quad \{\ (x_1, \ldots, x_n) \quad | \quad x_i \ge 0 \quad \text{et} \quad \sum_i x_i = 1\ \}$$

   Donnez une intuition géométrique des foncteur $\phi : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ (appelés *ensembles simpliciaux*) en voyant les éléments de $\phi([n])$ comme des n-simplexes standards et les morphismes $\phi(\varepsilon_i^n)$ comme des opérateurs décrivant les faces des simplexes. Quelle est l'interprétation géométrique des $\phi(\delta_i^n)$? Quelle est l'interprétation géométrique des équations (1) ? Formellement, cette intuition peut être décrite par un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux dans **Top** (la catégorie des espaces topologiques et fonctions continues).
7. Proposez des ensembles simpliciaux représentant un carré vide, un carré plein, un cube vide, un cube plein, un tore, un ruban de Möbius, etc.