

TD5 – Catégories monoidales

Samuel Mimram

29 octobre 2009

Attention : il n'y a pas cours ni TD la semaine prochaine !

1 Catégories monoidales

On rappelle qu'une *catégorie monoidale* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie \mathcal{C} munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et d'un objet $I \in \mathcal{C}$, ainsi que de trois transformations naturelles inversibles de composantes

$$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C) \qquad \lambda_A : I \otimes A \rightarrow A \qquad \rho_A : A \otimes I \rightarrow A$$

telles que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\ \alpha_{A \otimes B,C,D} \downarrow & & & & \downarrow A \otimes \alpha_{B,C,D} \\ (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\ \rho_{A \otimes B} \searrow & & \swarrow A \otimes \lambda_B \\ & A \otimes B & \end{array}$$

commutent.

Une *catégorie monoidale tressée* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ est une catégorie monoidale munie d'une transformation naturelle γ de composantes

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

telle que certains diagrammes commutent. Une *catégorie monoidale symétrique* est une catégorie monoidale tressée pour laquelle $\gamma_{B,A} \circ \gamma_{A,B} = \text{id}_{A \otimes B}$ pour tous objets A et B .

1. Expliquer comment munir toute cartésienne \mathcal{C} d'une structure de catégorie monoidale symétrique.
2. On note **Vect** la catégorie dont les objets sont les K -espaces vectoriels (où K est un corps fixé) et les morphismes sont les applications linéaires et on note **FdVect** la sous-catégorie pleine dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie. Montrez que **Vect** est cartésienne.
3. Étant données une base d'un espace vectoriel A et une base d'un espace vectoriel B , donnez une base de $A \times B$.
4. Montrez que le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Vect} \rightarrow \mathbf{Set}$ admet un adjoint à gauche $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}$.
5. Étant donnés trois espaces vectoriels A , B et C , on note $\text{Bilin}(A, B; C)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $A \times B$ dans C . Montrez qu'il existe un espace vectoriel, noté $A \otimes B$, tel que pour tous espaces vectoriels A , B et C , on ait une bijection (naturelle)

$$\text{Bilin}(A, B; C) \cong \mathbf{Vect}(A \otimes B; C)$$

On pourra décrire $U(A \otimes B)$ comme un quotient de l'ensemble $U(A) \times U(B)$.

6. Étant données une base de A et une base de B , décrivez une base de $A \otimes B$.
7. Montrez que l'opération \otimes permet de munir **Vect** (ainsi que **FdVect**) d'une structure de catégorie monoidale symétrique.

2 Catégories monoidales closes

Étant donnée une catégorie monoidale symétrique \mathcal{C} , un objet A admet un dual A^* lorsqu'il existe deux morphismes

$$\eta : I \rightarrow A \otimes A^* \quad \text{et} \quad \varepsilon : A^* \otimes A \rightarrow I$$

tels que les diagrammes

$$\begin{array}{c}
 I \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes A} (A \otimes A^*) \otimes A \xrightarrow{\alpha_{A, A^*, A}} A \otimes (A^* \otimes A) \xrightarrow{A \otimes \varepsilon} A \otimes I \\
 \lambda_A^{-1} \nearrow \quad \searrow \rho_A \\
 A \xrightarrow{\text{id}_A} A
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c}
 A^* \otimes I \xrightarrow{A^* \otimes \eta} A^* \otimes (A \otimes A^*) \xrightarrow{\alpha_{A^*, A, A^*}^{-1}} (A^* \otimes A) \otimes A^* \xrightarrow{\varepsilon \otimes A^*} I \otimes A^* \\
 \rho_{A^*}^{-1} \nearrow \quad \searrow \lambda_{A^*} \\
 A^* \xrightarrow{\text{id}_{A^*}} A^*
 \end{array}$$

commutent. Une catégorie monoidale symétrique est *compacte close* lorsque tout objet A admet un dual A^* .

1. Représentez les lois ci-dessus sous forme de diagrammes de corde.
2. [Factultatif] Montrez que $(A^*)^*$ est isomorphe à A .
3. Montrez que la catégories **FdVect** est compacte close.
4. Une catégorie monoidale est close lorsque pour tout objet B , le foncteur $- \otimes B$ admet un adjoint à droite $B \multimap -$. Montrez que toute catégorie compacte close est monoidal close.