Examen partiel 2009-2010

Modèles des langages de programmation
Master Parisien de Recherche en Informatique

Le 13 novembre 2009 de 16h15 à 19h15

Exercice 1. Soit l'arbre de dérivation du λ-calcul simplement typé

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash x : A}}{f : A \Rightarrow A, x : A \vdash x : A}\ \text{Affaiblissement}}{\dfrac{f : A \Rightarrow A \vdash \lambda x.x : A \Rightarrow A}{\vdash \lambda f.\lambda x.x : (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}}\ \text{Abstraction}$$

dans le système de typage étudié en cours.
(1a.) Donner un autre arbre de dérivation aboutissant au même séquent

$$\vdash \quad \lambda f.\lambda x.x \quad : \quad (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

(1b.) Expliquer pourquoi l'interprétation des deux arbres de dérivation est la même dans toute catégorie cartésienne fermée.
(1c.) Refaire le même exercice pour l'arbre de dérivation suivant:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{g : A \Rightarrow A \vdash g : A \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{h : A \Rightarrow A \vdash h : A \Rightarrow A} \qquad \dfrac{}{x : A \vdash x : A}}{h : A \Rightarrow A, x : A \vdash h(x) : A}}{g : A \Rightarrow A, h : A \Rightarrow A, x : A \vdash g(h(x)) : A}}{f : A \Rightarrow A, x : A \vdash f(f(x)) : A}\ \text{Contraction}}{f : A \Rightarrow A \vdash \lambda x.f(f(x)) : A \Rightarrow A}\ \text{Abstraction}}{\vdash \lambda f.\lambda x.f(f(x)) : (A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}$$

Exercice 2. Toute catégorie $\mathcal{C}$ est équippé d'un foncteur unique

$$L \quad : \quad \mathcal{C} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

vers la catégorie $\mathbf{1}$ qui contient un seul objet $*$ et un seul morphisme: l'identité sur $*$. Montrer que la catégorie $\mathcal{C}$ admet un objet terminal si et seulement si le foncteur L a un adjoint à droite

$$R \quad : \quad \mathbf{1} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{C}.$$

Problème. Ce problème a pour objectif de décrire les espaces de cohérence comme les objets réflexifs (c'est-à-dire isomorphes à leur double négation) dans une catégorie plus large d'espaces de configuration. On verra ainsi comment déduire les constructions étudiées en cours sur les espaces de cohérence (dualité classique, produit tensoriel, somme, exponentielle) de constructions plus primitives sur les espaces de configuration. Un espace de configuration est défini ici comme une paire

$$X \quad = \quad (|X|, \mathrm{Config}(X))$$

constituée d'un ensemble dénombrable $|X|$ appelé la trame de X et d'un ensemble

$$\mathrm{Config}(X) \quad \subseteq \quad \wp(|X|)$$

de sous-ensembles de $|X|$. On demande aussi que tout élément $x \in |X|$ de la trame soit élément d'un certaine configuration $u \in \mathrm{Config}(X)$:

$$\forall x \in |X|, \quad \exists u \in \mathrm{Config}(X), \qquad x \in u.$$

Les éléments de $\mathrm{Config}(X)$ sont appelés les configurations de X.

On remarque immédiatement que tout espace de cohérence A définit un espace de configuration $R(A)$ de même trame:

$$|R(A)| \quad = \quad |A|$$

et dont les configurations sont les cliques de A.

On définit maintenant la négation d'un espace de configuration X comme l'espace de configuration $\sim X$ de même trame

$$|\sim X| \quad = \quad |X|$$

dont les configurations sont définies comme suit:

$$\mathrm{Config}(\sim X) \quad = \quad \{ \quad u \subseteq |X| \quad | \quad \forall v \in \mathrm{Config}(X), \quad u \perp v \quad \}$$

où

$$u \perp v$$

signifie que l'intersection $u \cap v$ contient au plus un élément.

(3a.) Montrer que

$$\mathrm{Config}(X) \quad \subseteq \quad \mathrm{Config}(\sim\sim X)$$

pour tout espace de configuration X.

(3b.) Montrer que

$$\sim\sim\sim X \quad = \quad \sim X$$

pour tout espace de configuration X.

(3c.) Montrer que pour tout espace de cohérence A, on a

$$\sim R(A) \quad = \quad R(A^{\perp})$$

où $A^{\perp}$ est l'espace de cohérence dual de A défini en cours.

(3d.) En déduire l'égalité suivante

$$R(A) \quad = \quad \sim\sim R(A)$$

pour tout espace de cohérence A.

(3e.) Réciproquement, montrer que pour tout espace de configuration X, l'espace de configuration

$$\sim X$$

est de la forme

$$\sim X \quad = \quad R(A)$$

pour un certain espace de cohérence A que l'on décrira.

(3f.) Déduire des questions précédentes une bijection entre les espaces de cohérence A et les espaces de configuration X tels que

$$X \quad = \quad \sim\sim X.$$

(3g.) Soit la catégorie **Configuration** dont les objets sont les espaces de configuration, et les morphismes

$$f \quad : \quad X \quad \longrightarrow \quad Y$$

sont les relations

$$f \quad \subseteq \quad |X| \times |Y|$$

telles que:

- la relation f transporte les configurations en avant:

$$\forall u \in \mathrm{Config}(X), \quad f(u) \quad \in \quad \mathrm{Config}(Y)$$

où l'on note

$$f(u) \quad = \quad \{ \quad y \in |Y| \quad | \quad \exists x \in u \text{ tel que } xfy \quad \}$$

- la relation f est localement injective au sens où pour toute configuration $u \in \mathrm{Config}(X)$, on a:

$$\forall x_1, x_2 \in u, \quad \big(\exists y \in |Y|, \quad x_1 f y \text{ et } x_2 f y \big) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

L'identité sur l'espace de configuration X est le morphisme défini comme suit:

$$\mathrm{id}_X \quad = \quad \{ \quad (x, x) \quad x \in |X| \quad \}.$$

Montrer que ces données définissent bien une catégorie [note: on pourra utiliser le fait que les relations entre ensembles définissent une catégorie].

(3h.) Montrer que la construction $R(-)$ définit un foncteur

$$R(-) \quad : \quad \textbf{Coherence} \quad \longrightarrow \quad \textbf{Configuration}$$

plein et fidèle. Rappel: on dit que le foncteur R est plein et fidèle lorsque la fonction

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Coherence}(A, B) & \rightarrow & \textbf{Configuration}(R(A), R(B)) \\ \\ f & \mapsto & R(f) \end{array}$$

est bijective pour toute paire d'espaces de cohérence A et B.

Cela permet de voir la catégorie **Coherence** comme la sous-catégorie pleine de la catégorie **Configuration**, sous-catégorie des espaces de configuration X tels que $X \ = \sim\sim X$.

(3i.) Montrer que la construction $\sim$ définit un foncteur

$$\sim \quad : \quad \textbf{Configuration} \quad \longrightarrow \quad \textbf{Configuration}^{\,op}$$

qui transporte un morphisme $f : X \to Y$ en le morphisme

$$\sim f \quad : \quad \sim Y \quad \longrightarrow \quad \sim X$$

défini par

$$y\ (\sim f)\ x \quad\Longleftrightarrow\quad x\ f\ y$$

pour $x \in |X|$ et $y \in |Y|$.

(3j.) Déduire des deux questions précédentes que $\sim\sim$ définit un foncteur

$$\sim\sim \quad : \quad \mathbf{Configuration} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{Coherence}.$$

On notera à partir de maintenant ce foncteur

$$L \quad : \quad \mathbf{Configuration} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{Coherence}.$$

(3k.) Décrire l'espace de cohérence $L(X)$ associé à un espace de configuration X.

(3l.) Soient X un espace de configuration et A un espace de cohérence. Montrer qu'une relation

$$f \quad\subseteq\quad |X| \times |A|$$

est élément de

$$\mathbf{Coherence}(L(X), A)$$

si et seulement si la relation f est élément de

$$\mathbf{Configuration}(X, R(A)).$$

(3m.) En déduire une bijection

$$\phi_{X,A} \quad : \quad \mathbf{Coherence}(L(X), A) \quad\cong\quad \mathbf{Configuration}(X, R(A))$$

et montrer qu'elle est naturelle en X et en A.

(3n.) En déduire que le foncteur

$$L \quad : \quad \mathbf{Configuration} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{Coherence}$$

est adjoint à gauche au foncteur

$$R \quad : \quad \mathbf{Coherence} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{Configuration}$$

(3o.) Soient X et Y deux espaces de configuration. On définit l'espace de configuration $X \bullet Y$ comme suit:

$$|X \bullet Y| \quad = \quad |X| \times |Y|$$

$$\mathrm{Config}(X \bullet Y) \quad = \quad \{\ u \times v \quad | \quad u \in \mathrm{Config}(X) \text{ et } v \in \mathrm{Config}(Y) \quad \}$$

Nous admettrons que ce produit tensoriel définit une structure de catégorie symétrique monoidale sur la catégorie **Configuration**. Montrer que

$$L(X) \ \otimes \ L(Y) \quad = \quad L(X \bullet Y)$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel sur les espaces de cohérence défini en cours. Expliquer en quoi cette égalité permet de déduire le produit tensoriel $\otimes$ sur les espaces de cohérence du produit tensoriel sur les espaces de configuration. Expliquer en quoi la définition de $\bullet$ sur les espaces de configuration est plus satisfaisante du point de vue informatique que la définition de $\otimes$ sur les espaces de cohérence.

(3p.) Soient X et Y deux espaces de configuration. Montrer qu'une relation

$$f \quad \subseteq \quad |X| \times |Y|$$

est élément de

$$\mathbf{Configuration}(X, \sim Y)$$

si et seulement si

$$\forall (u, v) \in \mathrm{Config}(X) \times \mathrm{Config}(Y), \qquad f \quad \perp \quad u \times v.$$

[Note: on utilisera ici le fait que tout élément y de la trame de Y apparaît dans une certaine configuration v de l'espace de configuration Y.]

(3q.) En déduire une bijection

$$\mathbf{Configuration}(X, \sim Y) \quad \cong \quad \mathbf{Configuration}(X \bullet Y, \perp)$$

où $\perp$ est l'espace de configuration dont la trame est un singleton $\{*\}$ et dont les deux configurations sont l'ensemble vide et $\{*\}$.

(3r.) Soient X et Y deux espaces de configuration. On définit l'espace de configuration $X + Y$ comme suit:

$$|X + Y| \quad = \quad |X| + |Y|$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Config}(X+Y) & = & \{ \quad \mathtt{inl}(u) \quad | \quad u \in \mathrm{Config}(X) \quad \} \\ & \cup & \{ \quad \mathtt{inr}(v) \quad | \quad v \in \mathrm{Config}(Y) \quad \} \end{array}$$

Montrer que $X+Y$ définit une somme cartésienne de X et de Y dans la catégorie **Configuration**. [Note: on appelle somme cartésienne le dual du produit cartésien, autrement dit, un produit cartésien dans la catégorie opposée $\mathbf{Configuration}^{op}$.]

(3s.) Montrer que

$$L(X) \oplus L(Y) \quad = \quad L(X+Y).$$

Expliquer en quoi cette égalité permet de déduire la somme $\oplus$ sur les espaces de cohérence de la somme $+$ sur les espaces de configuration.

(3t.) Pour tout espace de configuration X, on définit l'espace de configuration TX dont la trame est l'ensemble des sous-configurations finies

$$|TX| \quad = \quad \{ \quad u \text{ fini} \quad | \quad \exists v \in \mathrm{Config}(X) \text{ tel que } u \subseteq v \quad \}$$

et dont les configurations $u^\dagger$ sont engendrées par les configurations de X au sens suivant:

$$\mathrm{Config}(TX) \quad = \quad \{ \quad u^\dagger \quad | \quad u \in \mathrm{Config}(X) \quad \}$$

où

$$u^\dagger \quad = \quad \text{l'ensemble des sous-ensembles finis de } u.$$

[Note: on appelle ici sous-configuration u tout ensemble d'éléments de la trame de X contenu par une certaine configuration v de l'espace de configuration X.] Montrer que pour tout espace de cohérence A, on a

$$!\,A \quad = \quad L\,T\,R\,A.$$

(3u.) Donner un exemple d'espace de configuration X pour lequel l'égalité

$$!\;L\,X \quad = \quad L\,T\,X$$

n'est pas vérifiée [note: il suffit de vérifier que les deux espaces de cohérence n'ont pas les mêmes trames.]