EXPOSÉ DU 18-10-2019 : COLIMITES HOMOTOPIQUES ET TRANCHES

LÉONARD GUETTA

Résumé. Le foncteur nerf

$$N : \mathbf{Cat} \to \widehat{\Delta}$$

permet d'associer à toute petite catégorie un ensemble simplicial et donc un CW-complexe via le foncteur de réalisation géométrique des ensembles simpliciaux vers les espaces topologiques. Cela permet de définir une notion d'équivalence faible de la manière suivante : un foncteur

$$u : A \to B$$

entre petites catégories est une équivalence faible (dite de *Thomason*) s'il induit une équivalence d'homotopie entre les CW-complexes associés.

Un théorème fondamental concernant ces équivalences faibles est le théorème A de Quillen qui dit que si on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans **Cat** et si on suppose que pour tout objet c de C, la flèche

$$u/c : A/c \to B/c$$

est une équivalence faible de Thomason, alors u l'est aussi.

Ce théorème se reformule plus ou moins en disant que pour toute petite catégorie A, la flèche canonique dans la catégorie localisée de **Cat** par rapport aux équivalences faibles Thomason

$$\operatorname*{hocolim}_{a \in A} A/a \to \operatorname*{colim}_{a \in A} A/a = A$$

est un isomorphisme et le reste après tout changement de base.

Le but de cet exposé est de montrer que cette dernière affirmation est aussi vraie pour les équivalences faibles Folk (quitte à plonger **Cat** dans la catégories des ω-catégories).

Une fois ce résultat démontré, j'en profiterai pour en déduire une démonstration "éclair" que les groupes d'homologie du nerf d'une petite catégorie peuvent se calculer via des résolutions polygraphiques. Enfin, si le temps me le permet, je déduirai également du même résultat un théorème A pour les équivalences faibles Folk et discuterai des implications sur la théorie de l'homotopie Folk que cela laisse entrevoir.