

Théorie de la dualité en logique et informatique

Mai Gehrke

La dualité de Stone montre que la catégorie des algèbres de Boole avec leurs homomorphismes est équivalente à l'opposée de celle des espaces compacts qui possèdent une base d'ouverts-fermés. Le fait que ce soit une équivalence entre une catégorie et l'opposée d'une autre signifie que les sous-objets d'un coté correspondent aux quotients de l'autre et que les produits d'un coté correspondent aux coproduits (ou sommes) de l'autre. Cela donne aux dualités leurs puissance toute particulière (voir <http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~mgehrke/oratie.pdf>, sections 2 et 3, pour une introduction non technique à la dualité).

La dualité de Stone et ses variantes et ses extensions donnent le lien entre l'approche syntaxique par la déduction et la sémantique en logique. En informatique théorique cette dualité est centrale car les deux cotés correspondent aux langages de spécification et aux espaces des états des systèmes calculatoires, respectivement. Plus récemment, il s'avère aussi que la dualité de Stone est le mécanisme sous-jacent de la théorie d'Eilenberg-Reiterman qui lie les classes de langages formels réguliers aux classes de sémi-groupes.

Table des matières

- I Préliminaires
 - Ensembles ordonnés, dcpos, et treillis;
 - Éléments de la topologie générale;
- II La dualité de Stone
 - La dualité de Stone/Priestley pour les algèbres de Boole et les treillis distributifs;
 - La dualité entre les espaces sobres et les cadres spatiaux;
 - Bases, treillis à proximités, et le lien entre les dualités ci-dessus;
 - Dualité pour les opérations algébriques
- III Application à la complétude
 - Complétude de la logique du premier ordre par la dualité et le théorème de Baire;
 - Complétude par rapport à la sémantique de Kripke de la logique propositionnelle intuitionniste (et modale) par la dualité d'Esakia;
- IV Applications à l'informatique
 - Modèles du lambda calcul et les solutions des équations de domaines;
 - La Théorie d'Eilenberg-Reiterman pour langages formels et automates.

Bibliographie

- Brian Davey et Hilary Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press 2002.
- Kazimierz Kuratowski, *Topologie I*, 1958 (voir <http://www.gabay-editeur.com/KURATOWSKI-Topologie-I-et-II-t-I-4e-ed-1958-et-t-II-3e-ed-1961>).
- Peter T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press (Cambridge Studies in Advanced Mathematics) 1986.
- Pierre-Louis Curien et Roberto M. Amadio, *Domains and Lambda-Calculi*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 2008.
- Jorge Almeida, *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1995.