Axiomes de continuité : une étude mécanisée en Coq

Charly Gries, Julien Narboux et Pierre Boutry

Séminaire Marelle, INRIA Sophia-Antipolis , France

Octobre 2019

Les Éléments d'Euclide

A servi de référence pour la géométrie pendant plus de 2000 ans

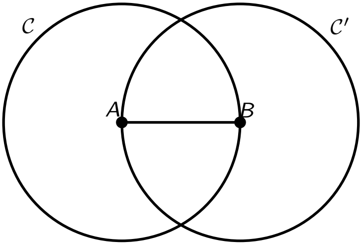
Euclide
(325 av. J.-C. - 265 av. J.-C.)

Livre I, Proposition I

« Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral. »

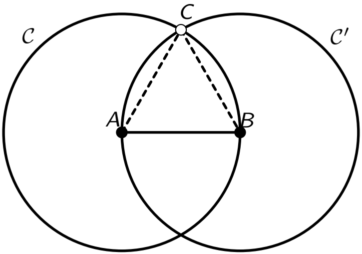
Livre I, Proposition I

« Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral. »



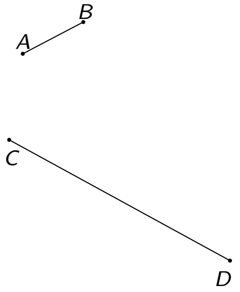
Livre I, Proposition I

« Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral. »



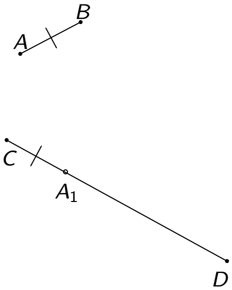
Livre V, Définition IV

« Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »



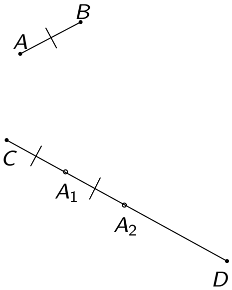
Livre V, Définition IV

« Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »



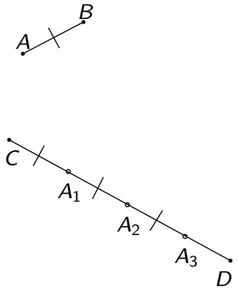
Livre V, Définition IV

« Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »



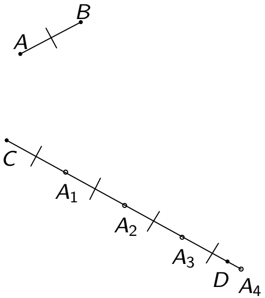
Livre V, Définition IV

« Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »



Livre V, Définition IV

« Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement. »



Problématique

Quels liens entre les différentes notions de continuité ?

Théorie

Géométrie de Tarski

- Un type primitif : les points
- Deux prédicats : Cong et Bet
- Une théorie modulaire : choix de la dimension, caractère euclidien ou non, avec ou sans continuité

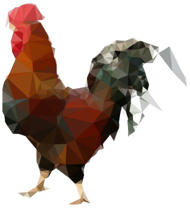
Alfred Tarski
(1901 - 1983)

Wanda Szmielew
(1918 - 1976)

Formalisation

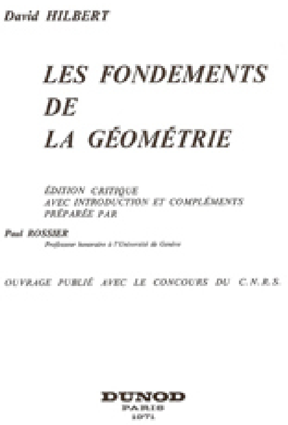
GeoCoq

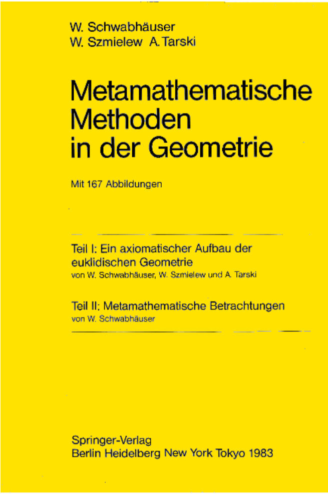
- Les axiomatiques de Tarski, Hilbert et Euclide dans des *type classes*
- L'arithmétisation
- Auteurs principaux : Gabriel Braun, Pierre Boutry, Charly Gries, Julien Narboux



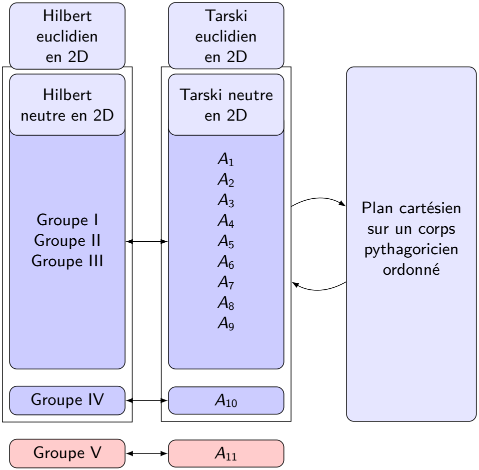
geocoq.github.io/GeoCoq/

Contenu de GeoCoq





Plusieurs axiomatiques pour la géométrie



Continuité

Axiome de Dedekind du second-ordre A_{11}^{*}

$$\forall \alpha\beta\, (\exists a\, \forall xy\, (x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow \mathrm{Bet}\ a\, x\, y)) \rightarrow$$

$$(\exists b\, \forall xy\, (x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow \mathrm{Bet}\ x\, b\, y))$$

Schema d'axiomes de Dedekind A_{11}

$$(\exists a\, \forall xy\, (\alpha(x) \wedge \beta(y) \rightarrow \mathrm{Bet}\ a\, x\, y)) \rightarrow$$

$$(\exists b\, \forall xy\, (\alpha(x) \wedge \beta(y) \rightarrow \mathrm{Bet}\ x\, b\, y))$$

where $\alpha(x)$ and $\beta(y)$ stand for any first-order formulae in the language of Tarski's axiom system which does not contain any free occurrence of a, b, y in α and a, b, x in β.

Du premier ordre

```
Inductive FOF : Prop -> Prop :=
| eq_fof : forall A B:Tpoint, FOF (A = B)
| bet_fof : forall A B C, FOF (Bet A B C)
| cong_fof : forall A B C D, FOF (Cong A B C D)
| not_fof : forall P, FOF P -> FOF (~ P)
| and_fof : forall P Q, FOF P -> FOF Q -> FOF (P /\ Q)
| or_fof : forall P Q, FOF P -> FOF Q -> FOF (P \/ Q)
| implies_fof : forall P Q, FOF P -> FOF Q -> FOF (P -> Q)
| forall_fof : forall P, (forall (A:Tpoint), FOF (P A)) ->
                                              FOF (forall A, P A)
| exists_fof : forall P, (forall (A:Tpoint), FOF (P A)) ->
                                              FOF (exists A, P A).
```

Plongement

```
Inductive tFOF :=
| eq_fof1 : Tpoint -> Tpoint -> tFOF
| bet_fof1 : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> tFOF
| cong_fof1 : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> tFOF
| not_fof1 : tFOF -> tFOF
| and_fof1 : tFOF -> tFOF -> tFOF
| or_fof1 : tFOF -> tFOF -> tFOF
| implies_fof1 : tFOF -> tFOF -> tFOF
| forall_fof1 : (Tpoint -> tFOF) -> tFOF
| exists_fof1 : (Tpoint -> tFOF) -> tFOF.
```

Les deux définitions coïncident

```
Lemma fof1__fof : forall F1:tFOF, FOF (fof1_prop F1).

Lemma fof__fof1 : FunctionalChoice_on Tpoint tFOF ->
  forall F:Prop, FOF F ->
  exists F1:tFOF,  F <-> fof1_prop F1.
```

Remarque

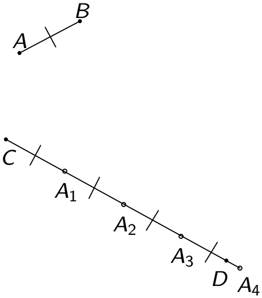
- Seulement des symboles de prédicats
- Pas de variables libres

Encodage du schema

```
Definition first_order_dedekind := forall Alpha Beta,
  (forall X, FOF (Alpha X)) ->
  (forall Y, FOF (Beta Y)) ->
  (exists A, forall X Y, Alpha X -> Beta Y -> Bet A X Y) ->
  (exists B, forall X Y, Alpha X -> Beta Y -> Bet X B Y).
```

Chez Hilbert

- Archimède (V-1)



Chez Hilbert

- Archimède (V-1)
- Intégrité

Chez Hilbert

- Archimède (V-1)
- Intégrité

« Les éléments de la géométrie (les points, les droites et les plans) constituent un ensemble qui n'est susceptible d'aucune extension si les axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède sont conservés. »

« An extension of a set of points on a line with its order and congruence relations that would preserve the relations existing among the original elements as well as the fundamental properties of lineorder and congruence that follows from Axioms I-III and from V-1 is impossible »

This is obviously not a geometric statement and not a statement formalizable in the language used previously, so what does it accomplish ? *Greenberg [**?**, p. 203].*

Hilbert's own completeness axiom, added in other editions as V.2, takes the somewhat awkward form of requiring that it be impossible to properly extend the sets and relations satisfying the other axioms so that the other axioms still holds.

George E. Martin

- D'après Eduardo Giovannini, Hilbert avait connaissance de l'axiome de Dedekind.
- Hilbert souhaitait avoir un axiome indépendant de celui d'Archimède.
- Hilbert ne souhaitait pas utiliser l'axiome des segments emboîtés de Cantor.

Axiome d'intégrité

```
Definition pres_bet {Tm:Tarski_neutral_dimensionless}
 (f : @Tpoint Tn -> @Tpoint Tm) := forall A B C, Bet A B C ->
 Bet (f A) (f B) (f C).

Definition pres_cong {Tm: Tarski_neutral_dimensionless}
 (f : @Tpoint Tn -> @Tpoint Tm) := forall A B C D, Cong A B C D ->
 Cong (f A) (f B) (f C) (f D).

Definition extension {Tm: Tarski_neutral_dimensionless}
 (f : @Tpoint Tn -> @Tpoint Tm) := inj f /\ pres_bet f /\ pres_cong f.

Definition completeness_for_planes := forall
 (Tm: Tarski_neutral_dimensionless)
 (Tm2 : Tarski_neutral_dimensionless_with_decidable_point_equality Tm)
 (M : Tarski_2D Tm2)
 (f : @Tpoint Tn -> @Tpoint Tm),
 @archimedes_axiom Tm ->
 extension f ->
 forall A, exists B, f B = A.
```

Chez Hilbert

- Archimède (V-1)
- Intégrité

« Les éléments de la géométrie (les points, les droites et les plans) constituent un ensemble qui n'est susceptible d'aucune extension si les axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence et l'axiome d'Archimède sont conservés. »

Chez Hilbert

- Archimède (V-1)
- Intégrité
- Intégrité linéaire (V-2) quand il se trompe pas !

« L'ensemble des points d'une droite, soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduites des axiomes I–III et de l'axiome V-1 (axiome d'Archimède). »

Formalisation de l'axiome d'Archimède

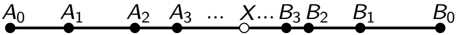
```
Inductive Grad : Tpoint -> Tpoint -> Tpoint -> Prop :=
  | grad_init : forall A B, Grad A B B
  | grad_stab : forall A B C C',
                  Grad A B C ->
                  Bet A C C' -> Cong A B C C' ->
                  Grad A B C'.

Definition Reach A B C D := exists B', Grad A B B' /\ Le C

Definition archimedes_axiom := forall A B C D, A <> B -> Re
```

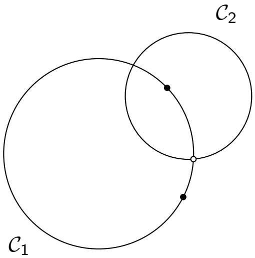
Autres axiomes

- Segments emboîtés



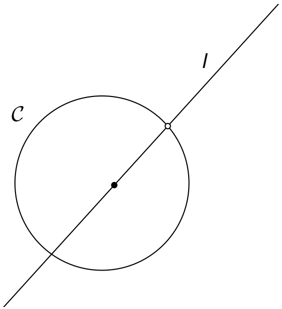
Autres axiomes

- Segments emboîtés
- Continuité du cercle :
    - Cercle-cercle



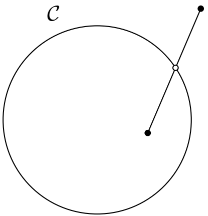
Autres axiomes

- Segments emboîtés
- Continuité du cercle :
    - Cercle-cercle
    - Cercle-droite



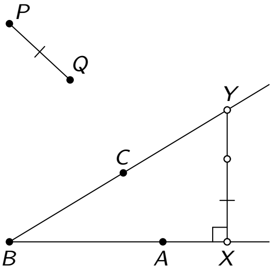
Autres axiomes

- Segments emboîtés
- Continuité du cercle :
  - Cercle-cercle
  - Cercle-droite
  - Cercle-segment



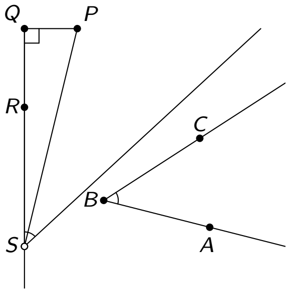
Autres axiomes

- Segments emboîtés
- Continuité du cercle :
  - Cercle-cercle
  - Cercle-droite
  - Cercle-segment
- Aristote



Autres axiomes

- Segments emboîtés
- Continuité du cercle :
  - Cercle-cercle
  - Cercle-droite
  - Cercle-segment
- Aristote
- Greenberg

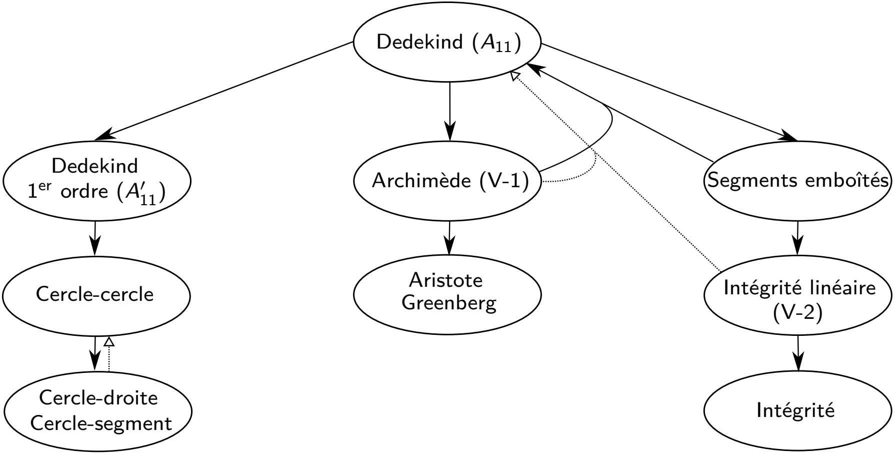


Cantor

```
Definition Nested (A B:nat -> Tpoint -> Prop) :=
  (forall n, exists An Bn, A n An /\ B n Bn) /\
  forall n An Am Bm Bn,
    A n An -> A (S n) Am -> B (S n) Bm -> B n Bn -> Bet An

Definition cantor_s_axiom := forall A B, Nested A B ->
  exists X, forall n An Bn, A n An -> B n Bn -> Bet An X Br
```

Hiérarchie


Dedekind (A_{11})
Dedekind
1er ordre (A'_{11})
Archimède (V-1)
Segments emboîtés
Cercle-cercle
Aristote
Greenberg
Intégrité linéaire
(V-2)
Cercle-droite
Cercle-segment
Intégrité

Correspondance avec les corps

Axiomatique	**Plan Cartésien**
Variante Gupta	Corps ordonné
$A_1 - A_{10}$	Corps ordonné Pythagoricien
$A_1 - A_{10}$ + Cercle-Cercle	Corps Euclidien
$A_1 - A_{11}$	Corps réel clos
$A_1 - A_{11}$	$\mathbb{R}$

:

Conclusion

Perspectives

- Ajout d'autres axiomes de continuité
- Correspondance avec les corps

Conclusion

Perspectives

- Ajout d'autres axiomes de continuité
- Correspondance avec les corps

Questions ?