

Les assistants de preuve pour l'enseignement

Table ronde - JNIM 2024

Julien Narboux

Mars 2024

M2 Info : Sémantique, Logique de Hoare pour IMP, formalisée en Coq.

M1 Info : Formalisation des preuves en géométrie et preuve automatique en géométrie.

M1 Info : Cours de preuve formelle. Avec et à propos de Coq.

L2 Info : Cours de Logique, Edukera en mode Logique (déduction naturelle)

L1 Maths et L1 Info : Cours d'introduction à la démonstration

M2 Info : Sémantique, Logique de Hoare pour IMP, formalisée en Coq.

M1 Info : **Formalisation des preuves en géométrie** et preuve automatique en géométrie.

M1 Info : Cours de preuve formelle. Avec et à propos de Coq.

L2 Info : Cours de Logique, Edukera en mode Logique (déduction naturelle)

L1 Maths et L1 Info : **Cours d'introduction à la démonstration**

Déduction naturelle avec Edukera

Disjunction		
\vee_+	Left introduction ($\vee I$)	q
\vee_+	Right introduction ($\vee I$)	q
\vee_*	Elimination ($\vee E$)	q

Negation		
\neg_+	Introduction ($\neg I$)	
\neg_*	Elimination ($\neg E$)	

False		
\perp_*	Elimination ($\perp E$)	

Prove that $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ (1)
($\Rightarrow I$)

Assume $A \vee B$ (h1)

Prove that $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ (2)
($\Rightarrow I$)

Assume $A \Rightarrow B$ (h2)

Prove that B (3)
($\vee E$)

Prove that $A \vee B$ (4)
according to (h1)

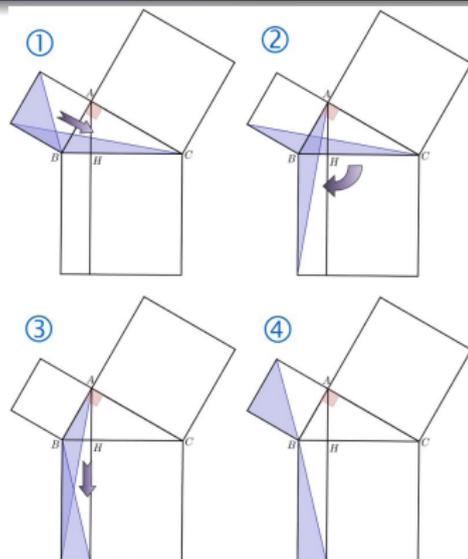
$$\frac{\frac{\frac{A \vee B, A \Rightarrow B \vdash A \vee B}{A \vee B, A \Rightarrow B, A \vdash B} \quad \frac{A \vee B, A \Rightarrow B, B \vdash B}{A \vee B, A \Rightarrow B \vdash B} (\vee E)}{A \vee B \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B} (\Rightarrow I)}{\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)} (\Rightarrow I)$$

J'ai proposé deux activités :

- 1 Exercices de type collège/lycée dans un micro-monde donné : les axiomes et théorèmes de la bibliothèque GeoCoq
- 2 Choisir une des nombreuses preuves du théorème de Pythagore et proposer une formalisation (partielle).

Discussions :

- le nature des énoncés
- validité des preuves
- la valeur explicative des preuves
- simplicité



- validité des preuves visuelles
- circularité des preuves
- généralité de la preuve (preuve dans un modèles, vs preuve dans tous les modèles)

- L1 Maths et L1 Info, mix filière sélective et non sélective.
- 7 groupes de TD.
- Équipe pédagogique avec des profils variés : enseignants secondaire, doctorants, EC non-spécialistes en preuve formelle.
- Contenu : vocabulaire et structure d'un document mathématique. Règles de raisonnement. Ensembles, Fonctions (image directe et réciproque, injective, surjective), Relations, Récurrence.

TP4_fonctions_inj_surj.lean 9+ TP3_fonctions.lean 9+, M X Lean Intview X

```

FCR > TP3_fonctions.lean > {} exercit
7 section exercit
124
125
126
127 --lemma exercise.image_reciproque_de_image_I :
128 --∀ A, A ⊆ f ⁻¹' (f '' A)
129
130 Exercice "exo4"
131   Données :
132   Hypothèses :
133   Conclusion : A ⊆ f ⁻¹' (f '' A)
134   Démonstration :
135     Soit x ∈ A
136     On réécrit via definition.image_reciproque
137     Montrons que f x ∈ f '' A
138     On applique exercise.image_directe
139     On conclut par (x_mem : x ∈ A)
140   QED
141
142 -- lemma exercise.image_reciproque_de_image_II :
143 -- ∀ A, f ⁻¹' (f '' A) ⊆ A
144
145 Exercice "exo5"
146   Données :
147   Hypothèses :
148   Conclusion : f ⁻¹' (f '' A) ⊆ A
149   Démonstration :
150     Soit x ∈ f ⁻¹' (f '' A)
151     On réécrit via definition.image_reciproque dans x_mem qui devient f x ∈ f '' A

```

▼ TP3_fonctions.lean:137:27

▼ Tactic state

1 goal

X Y Z : Type
A A' : Set X
f : X → Y
g : Y → Z
B B' : Set Y
x : X
x_mem : x ∈ A
⊢ f x ∈ f '' A

▼ Expected type

X Y Z : Type
A A' : Set X
f : X → Y
g : Y → Z
B B' : Set Y
x : X
x_mem : x ∈ A
⊢ Set X

~Repository\FCR-lean\TP3_fonctions.lean
fichier • Modifié le

► All Messages (19)

Motivations pour utiliser un assistant de preuve ?

- retour immédiat pour l'étudiant : interdit les énoncés qui n'ont pas de sens, empêche les raisonnements incorrects, détecte les erreurs de portée ou de fraîcheur,...
- clarifie le rôle et la nature des énoncés : axiome, lemme, hypothèse, prémisses, conclusion, but, ...
- clarifie le statut théorique¹ (conjecture, conséquence des hypothèses, condition suffisante pour arriver à la conclusion, ...) et opérationnel : prémisses/conclusion
- clarifie les règles logiques autorisées
- impartialité
- permet de lister clairement le micro-monde : définitions/théorèmes autorisés
- clarifie ce qu'est une démonstration en interdisant les autres formes d'argumentation
- *gamification*

1. Dans la terminologie de Duval

Nous avons étudié² un exercice en utilisant différents assistants de preuve (Coq, Deaduction, Edukera, Lean (Verbose), Lurch) et on donne une analyse *a priori* de l'impact de certaines fonctionnalités.

Exercice

Étant donnés trois ensembles A , B et C tels que $C \subseteq A$ et une fonction $f : A \rightarrow B$, montrer que si f est injective alors $f^{-1}(f(C)) = C$.



Des vidéos

dépliage automatique des définitions • fausse impression de réussite ? (\rightarrow Lean Verbose / Coq Waterproof)

- vrai succès puisqu'on a obtenu une preuve ?

mode d'interaction annuler/refaire, et application automatique des règles de raisonnement peut amener à une stratégie par essais/erreurs

Et la recherche en didactique ?

Très peu de résultats de recherche en didactique des mathématiques sur les assistants de preuve (Iannone, Hanna, Richard, Thoma).

Depuis 2024, ANR APPAM portée par Cécile Ouvrier-Bufferet :
didacticiens+mathématiciens+informaticiens

Étude des difficultés d'apprentissage de la démonstration et de l'impact des assistants de preuve.

- Objectif : apprentissage de la démonstration
- 3 groupes avec Deaduction de Frédéric Le Roux
- 3 groupes avec Lean-Verbose de Patrick Massot
- Évaluation sur papier.

Travaux en cours :

- Construction d'un corpus d'exercices (pas que des exercices de preuve, Vrai/Faux, formalisation).
- Suggestions d'améliorations, correction de bugs.
- Instrumentation des assistants pour collecter des données.

- Quelle compétences sont travaillées quand on utilise tel ou tel assistant de preuve ?
- L'utilisation d'un assistant de preuve permet-elle d'acquérir des automatismes ?
- Est-ce que la syntaxe est un obstacle ?
- Comment s'articulent la manipulation syntaxique des objets dans l'assistant avec la compréhension de leur sémantique ?
- Comment établir le lien avec la preuve papier ?

Le sujet vous intéresse ?

Une école thématique : PAT

PAT 2023 : première école thématique sur l'utilisation des assistants de preuve pour l'enseignement, 38 personnes réunies dans les Vosges.

PAT 2025 ? (soumission envoyée au CNRS)

Une série de workshops : ThEdu

ThEdu 2024, 2 Juillet, IJCAR, Nancy.

Des ressources bibliographiques

Un groupe Zotero :

www.zotero.org/groups/2621881/

