Équivalence de statistiques sur les permutations

Arthur Nunge

Laboratoire IGM

Lundi 21 septembre 2015

UNIVERSITÉ
PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE

Base de Tevlin (2007)

Tevlin a défini la base L_I de l'algèbre des fonctions symétriques non commutatives dont les matrices de changement de base avec la base R_J sont :

$$M_3(R,L) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 2 & 1 & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4(R,L) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 3 & 2 & . & 1 & 1 & . & . \\ . & . & 2 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 3 & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Interprétation combinatoire de la base de Tevlin

GC \ Rec	3	21	12	111
3	123			
21		132 312	231	
12			213	
111				321

GC \ Rec	4	31	22	211	13	121	112	1111
4	1234							
31		1243, 1423 4123	1342 3412		2341	2413		
22			1324 3124		2314			
211			3142	1432, 4132 4312		2431 4231	3241	
13					2134			
121						2143 4213	3421	
112							3214	
1111								4321

Théorème (Hivert, Novelli, Tevlin, Thibon, 2009)

Soit φ l'application qui envoie toutes les permutations sur 1. Lorsque l'on applique φ aux tableaux ci-dessus, on obtient les matrices de changement de bases entre la base de Tevlin et la base des rubans.

Raffinement

Les nombres obtenus en sommant la matrice sur les lignes font sens au niveau des tableaux-permutations. La statistique du nombre de motifs 31-2 d'une permutation (que nous appellerons tot) fourni un q-analogues des tableaux permutations. Ainsi, J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon et L. K. Williams ont étudié les q-analogues de la base de Tevlin dont la matrice de changement de base est obtenue à partir des tableaux précédents en envoyant chaque permutation σ sur $q^{\mathrm{tot}(\sigma)}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1+q & 1 & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1+q+q^2 & 1+q & . & 1 & q & . & . \\ . & . & 1+q & . & 1 & . & . & . \\ . & . & q & 1+q+q^2 & . & 1+q & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1+q & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Raffinement

Les nombres obtenus en sommant la matrice sur les lignes font sens au niveau des tableaux-permutations. La statistique du nombre de motifs 31-2 d'une permutation (que nous appellerons tot) fourni un q-analogues des tableaux permutations. Ainsi, J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon et L. K. Williams ont étudié les q-analogues de la base de Tevlin dont la matrice de changement de base est obtenue à partir des tableaux précédents en envoyant chaque permutation σ sur $q^{\mathrm{tot}(\sigma)}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1+q & 1 & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1+q+q^2 & 1+q & . & 1 & q & . & . \\ . & . & 1+q & . & 1 & . & . & . \\ . & . & q & 1+q+q^2 & . & 1+q & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1+q & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Problème

La statistique tot ne fait pas sens du point de vue algébrique.

Permutations triées suivant deux couples de statistiques

GC \ Rec	4	31	22	211	13	121	112	1111
4	1234							
31		1243, 1423 4123	1342 3412		2341	2413		
22			1324 3124		2314			
211			3142	1432, 4132 4312		2431 4231	3241	
13					2134			
121						2143 4213	3421	
112							3214	
1111								4321

LC \ Rec	4	31	22	211	13	121	112	1111
4	1234							
31		1243, 1423 4123	1324 3124		2134	2143		
22			1342 3142		2314			
211			3412	1432, 4132 4312		2413 4213	3214	
13					2341			
121						2431 4231	3241	
112							3421	
1111								4321

Théorème (Novelli, Thibon, Williams, 2010)

Soit φ, l'application qui envoie toutes les permutations sur 1. Lorsque l'on applique φ aux tableaux ci-dessus, les images sont égales.

Conjecture

Le théorème précédent reste vrai en considérant cette fois deux applications φ_1 et φ_2 qui envoient respectivement chaque permutation sur $q^{\mathrm{tot}(\sigma)}$ et $q^{\mathrm{inv}(\sigma)-\mathrm{maj}(\overline{\mathsf{LC}(\sigma)})}$.

Plan de la preuve

Objets combinatoires impliqués

- permutations ;
- histoires de Laguerre ;
- histoires de Laguerre larges ;
- codes de Lehmer ;
- codes de Lehmer décroissants pondérés.

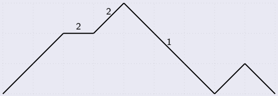
Découpage de la bijection

$$\mathrm{P} \overset{\phi_{FV}}{\longleftrightarrow} \mathrm{HL} \overset{\phi_1}{\longleftrightarrow} \mathrm{HLL} \overset{\psi_2}{\longleftrightarrow} \mathrm{CLDP} \overset{\psi_1}{\longleftrightarrow} \mathrm{CL} \longleftrightarrow \mathrm{P}$$

Histoire de Laguerre de taille n

Une *Histoire de Laguerre* de longueur n est un chemin de Motzkin pondéré de longueur n possédant deux types de pas horizontaux (un pas plein et un pas pointillé) tel que :

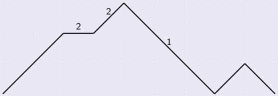
- Un pas $\nearrow$ ou $\longrightarrow$ partant de la hauteur h a un poids entre 0 et h.
- Un pas $\searrow$ ou $\dashrightarrow$ partant de la hauteur h a un poids entre 0 et $h-1$.



Histoire de Laguerre de taille n

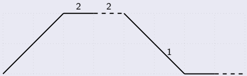
Une *Histoire de Laguerre* de longueur n est un chemin de Motzkin pondéré de longueur n possédant deux types de pas horizontaux (un pas plein et un pas pointillé) tel que :

- Un pas $\nearrow$ ou $\longrightarrow$ partant de la hauteur h a un poids entre 0 et h.
- Un pas $\searrow$ ou $\dashrightarrow$ partant de la hauteur h a un poids entre 0 et $h-1$.



Histoire de Laguerre large de taille $n-1$

Une *Histoire de Laguerre large* de longueur $n-1$ est un chemin de Motzkin pondéré de longueur $n-1$ possédant deux types de pas horizontaux (un pas plein et un pas pointillé) tel que le poids de tout pas partant de la hauteur h prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, h\}$.



Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$$\phi_{FV}(527136498) =$$

Bijection de Françon-Viennot (P $\rightarrow$ HL)

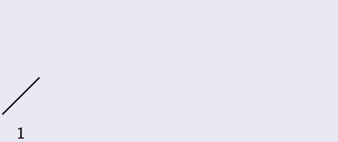
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$



Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

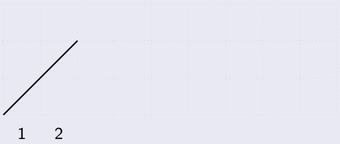
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$



Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$

Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

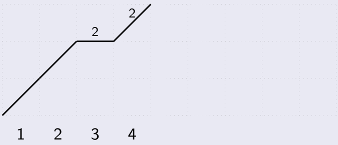
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente*, *i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$



Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

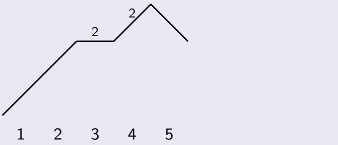
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée, i.e.,* $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic, i.e.,* $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée, i.e.,* $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente, i.e.,* $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.,* le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$



Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

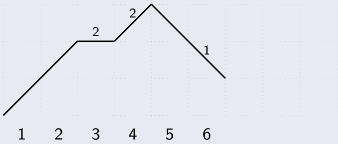
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^{e} pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^{e} pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$



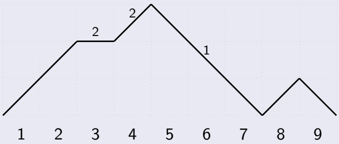
Bijection de Françon-Viennot (P $\to$ HL)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k = \sigma_j$. Alors le k^e pas de $\psi_{FV}(\sigma)$ est :

- un pas $\nearrow$ si k est une *vallée, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\searrow$ si k est un *pic, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j > \sigma_{j+1}$,
- un pas $\longrightarrow$ si k est une *double montée, i.e.*, $\sigma_{j-1} < \sigma_j < \sigma_{j+1}$,
- un pas $\dashrightarrow$ si k est une *double descente, i.e.*, $\sigma_{j-1} > \sigma_j > \sigma_{j+1}$.

De plus, le poids du k^e pas est égal au nombre d'indices $i \in \{1, \ldots, j-2\}$ tels que $\sigma_i > \sigma_j > \sigma_{i+1}$ (*i.e.*, le nombre de motifs 31-2 tels que j corresponde au 2).

Exemple

$\phi_{FV}(527136498) =$ 

Définition de ϕ_1 (HL $\rightarrow$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

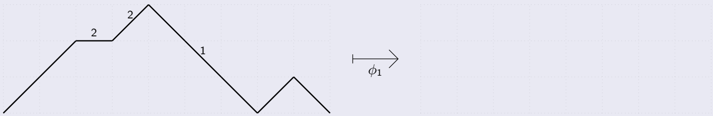
- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

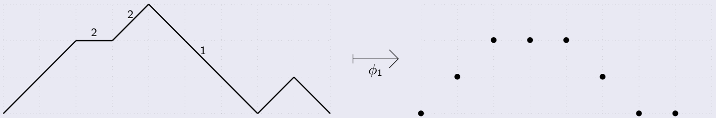


Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

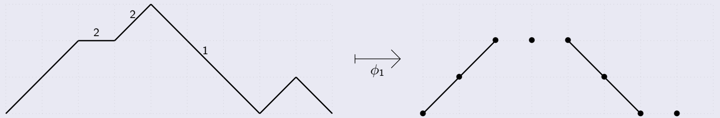


Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

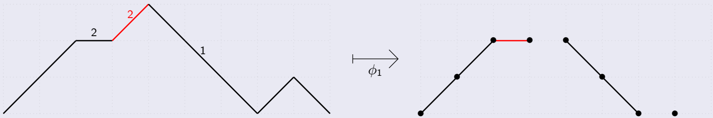


Définition de ϕ_1 (HL $\rightarrow$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

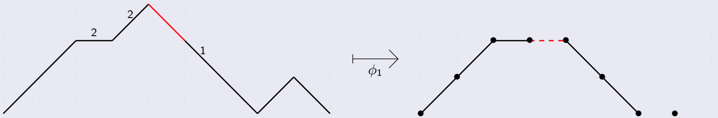


Définition de ϕ_1 (HL $\rightarrow$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

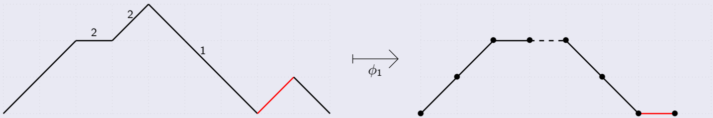


Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

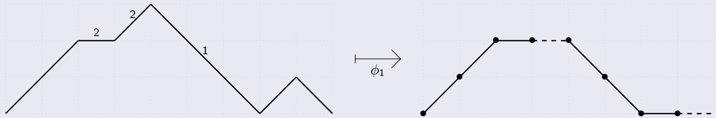


Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple

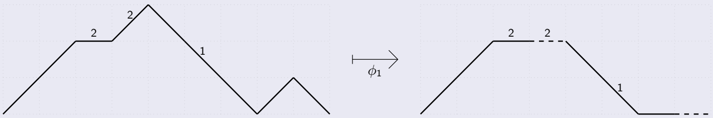


Définition de ϕ_1 (HL $\to$ HLL)

Soit H une histoire de Laguerre de taille n.

- La hauteur de départ du k^{e} pas de $\phi_1(H)$ est le poids maximum du k^{e} pas de H ;
- Si le k^{e} de $\phi_1(H)$ est horizontal, c'est un pas $\longrightarrow$ si le $(k+1)^{\text{e}}$ pas de H est $\longrightarrow$ ou $\nearrow$ et est $\dashrightarrow$ sinon.

Exemple



Récapitulatif des bijections

$$\mathsf{P} \xleftrightarrow{\phi_{FV}} \mathsf{HL} \xleftrightarrow{\phi_1} \mathsf{HLL} \xleftrightarrow{\psi_2} \mathsf{CLDP} \xleftrightarrow{\psi_1} \mathsf{CL} \longleftrightarrow \mathsf{P}$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) =$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) = 3$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) = 31$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) = 315$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) = 315503010$$

Code de Lehmer

Un code de Lehmer est un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que la $L_i \leq n - i$. Ils sont en bijection avec les permutations, le code de Lehmer L associé à l'inverse d'une permutation σ est construit de sorte que $L_i = \#\{j < i \mid \sigma_j > \sigma_i\}$. Par exemple,

$$\sigma = 527198634, \ \mathrm{Lh}(\sigma) = 315503010$$

Code de Lehmer décroissant

Un code de Lehmer est dit décroissant si le mot obtenu en retirant les 0 est strictement décroissant.
Exemple : $L = 540300010$.

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors *pivot* $= 5$;
- $L = 31\mathbf{4}503010$, $P = 000000000$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors *pivot* $= 5$;
- $L = 31\textbf{4}503010$, $P = 000000000$,
  $L = 31\textbf{54}03010$, $P = 000000000$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{4}503010$, $P = 000000000$,
  $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000000000$,
  $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $pivot = 4$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $\mathit{pivot} = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $\mathit{pivot} = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $\mathit{pivot} = 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$, alors $\mathit{pivot} = 4$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 5\mathbf{40}103010$, $P = 00\mathbf{2}200000$;

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 5\mathbf{40}103010$, $P = 00\mathbf{2}200000$, alors $pivot = 3$;

Description de ψ_1 (CL $\rightarrow$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors $pivot = 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors $pivot = 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$, alors $pivot = 4$;
- $L = 5\mathbf{40}103010$, $P = 00\mathbf{2}200000$, alors $pivot = 3$;
- $L = 540\mathbf{30}0010$, $P = 00220\mathbf{1}000$.

Description de ψ_1 (CL $\to$ CLDP)

- $L = 315503010$, $P = 000000000$, alors *pivot* $= 5$;
- $L = 31\mathbf{54}03010$, $P = 000\mathbf{1}00000$, alors *pivot* $= 5$;
- $L = \mathbf{5}1\mathbf{2}403010$, $P = 00\mathbf{1}100000$, alors *pivot* $= 4$;
- $L = 51\mathbf{41}03010$, $P = 001\mathbf{2}00000$, alors *pivot* $= 4$;
- $L = 5\mathbf{40}103010$, $P = 00\mathbf{2}200000$, alors *pivot* $= 3$;
- $L = 540\mathbf{30}0010$, $P = 00220\mathbf{1}000$ et l'algorithme s'arrête.

Description de ψ_2 (CLDP $\rightarrow$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$$\psi_2(540300010) =$$

$$S = \{\}$$

Description de ψ_2 (CLDP $\rightarrow$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$ 

$S = \{5\}$

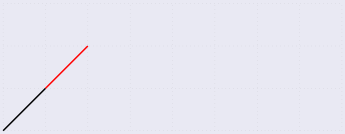
Description de ψ_2 (CLDP $\to$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



$S = \{4, 5\}$

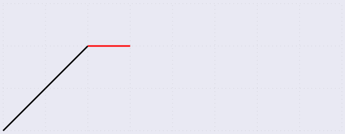
Description de ψ_2 (CLDP $\to$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



$S = \{4, 5\}$

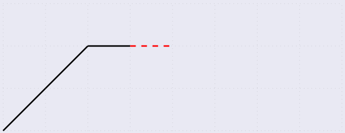
Description de ψ_2 (CLDP $\to$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



$S = \{3, 4, 5\}$

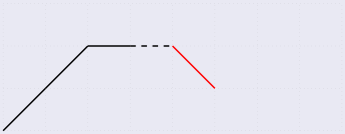
Description de ψ_2 (CLDP $\rightarrow$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



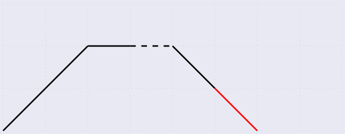
$S = \{3, 4, 5\}$

Description de ψ_2 (CLDP $\to$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$ 

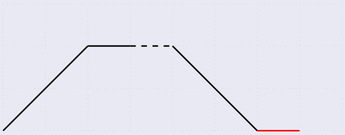
$S = \{3, 4, 5\}$

Description de ψ_2 (CLDP $\rightarrow$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$ 

$S = \{3, 4, 5\}$

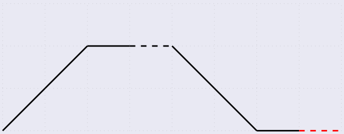
Description de ψ_2 (CLDP $\to$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



$S = \{3, 4, 5\}$

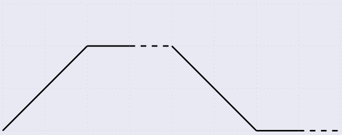
Description de ψ_2 (CLDP $\rightarrow$ HLL)

On lit les lettre du code de Lehmer L l'une après l'autre en s'arrêtant à l'avant dernière lettre. On initialise l'ensemble des lettre déjà vues S à l'ensemble vide. À l'étape i, on lit L_i :

- si $n - i \notin S$,
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \longrightarrow$;
  - si $L_i = n - i$, alors $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \nearrow$ et on ajoute L_i à S.
- sinon :
  - si $L_i = 0$, alors $\psi_2(L)_i = \searrow$;
  - sinon, $\psi_2(L)_i = \dashrightarrow$ et on ajoute L_i à S ;

Exemple

$\psi_2(540300010) =$



$S = \{3, 4, 5\}$

Récapitulatif des bijections

$$\mathrm{P} \xleftrightarrow{\phi_{FV}} \mathrm{HL} \xleftrightarrow{\phi_1} \mathrm{HLL} \xleftrightarrow{\psi_2} \mathrm{CLDP} \xleftrightarrow{\psi_1} \mathrm{CL} \longleftrightarrow \mathrm{P}$$

Description récursive des codes de Lehmer décroissants

Le découpage d'un code de Lehmer se fait comme pour une fonction de parking. Soit i la position la plus à gauche telle que $L_i = n - i$. Le membre droit est le mot constitué des lettres à droite de i et le membre gauche est le mot constitué des lettres à gauche de i auquel on a retiré $n - i$ aux valeurs non nulles :

$$Lh = \underbrace{600}_{100}\ {\color{red}5}\ 02100$$

Description récursive des codes de Lehmer décroissants

Le découpage d'un code de Lehmer se fait comme pour une fonction de parking. Soit i la position la plus à gauche telle que $L_i = n - i$. Le membre droit est le mot constitué des lettres à droite de i et le membre gauche est le mot constitué des lettres à gauche de i auquel on a retiré $n - i$ aux valeurs non nulles :

$$Lh = \underbrace{600}_{100}\ {\color{red}5}\ 02100$$

Description récursive des histoires de Laguerre larges

On coupe au premier pas $\dashrightarrow$ à hauteur 0. L'histoire droite est conservée et pour obtenir une histoire de Laguerre large à partir du chemin de gauche on applique l'application ϕ_1.

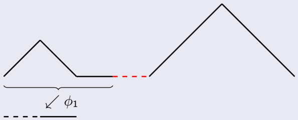
Description récursive des codes de Lehmer décroissants

Le découpage d'un code de Lehmer se fait comme pour une fonction de parking. Soit i la position la plus à gauche telle que $L_i = n - i$. Le membre droit est le mot constitué des lettres à droite de i et le membre gauche est le mot constitué des lettres à gauche de i auquel on a retiré $n - i$ aux valeurs non nulles :

$$Lh = \underbrace{600}_{100}\ 5\ 02100$$

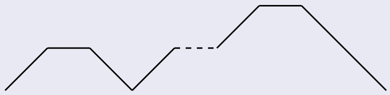
Description récursive des histoires de Laguerre larges

On coupe au premier pas $\dashrightarrow$ à hauteur 0. L'histoire droite est conservée et pour obtenir une histoire de Laguerre large à partir du chemin de gauche on applique l'application ϕ_1.



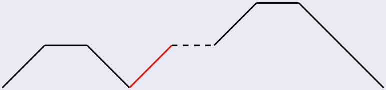
Description récursive des histoires de Laguerre

On cherche le premier pas de poids maximal nul tel que le pas suivant est une descente. On scinde l'histoire à cette position. On change le premier pas de l'histoire de Laguerre de droite pour obtenir un départ partant de la hauteur 0. Pour l'histoire de Laguerre de gauche, on rajoute un pas pour arriver à hauteur 0 (ou horizontal si on y est déjà) puis on applique ϕ_1 au résultat pour obtenir une histoire de Laguerre de taille plus petite.



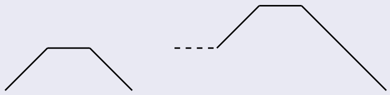
Description récursive des histoires de Laguerre

On cherche le premier pas de poids maximal nul tel que le pas suivant est une descente. On scinde l'histoire à cette position. On change le premier pas de l'histoire de Laguerre de droite pour obtenir un départ partant de la hauteur 0. Pour l'histoire de Laguerre de gauche, on rajoute un pas pour arriver à hauteur 0 (ou horizontal si on y est déjà) puis on applique ϕ_1 au résultat pour obtenir une histoire de Laguerre de taille plus petite.



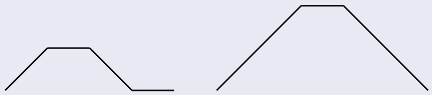
Description récursive des histoires de Laguerre

On cherche le premier pas de poids maximal nul tel que le pas suivant est une descente. On scinde l'histoire à cette position. On change le premier pas de l'histoire de Laguerre de droite pour obtenir un départ partant de la hauteur 0. Pour l'histoire de Laguerre de gauche, on rajoute un pas pour arriver à hauteur 0 (ou horizontal si on y est déjà) puis on applique ϕ_1 au résultat pour obtenir une histoire de Laguerre de taille plus petite.



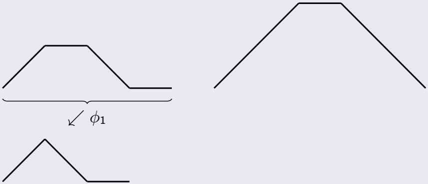
Description récursive des histoires de Laguerre

On cherche le premier pas de poids maximal nul tel que le pas suivant est une descente. On scinde l'histoire à cette position. On change le premier pas de l'histoire de Laguerre de droite pour obtenir un départ partant de la hauteur 0. Pour l'histoire de Laguerre de gauche, on rajoute un pas pour arriver à hauteur 0 (ou horizontal si on y est déjà) puis on applique ϕ_1 au résultat pour obtenir une histoire de Laguerre de taille plus petite.



Description récursive des histoires de Laguerre

On cherche le premier pas de poids maximal nul tel que le pas suivant est une descente. On scinde l'histoire à cette position. On change le premier pas de l'histoire de Laguerre de droite pour obtenir un départ partant de la hauteur 0. Pour l'histoire de Laguerre de gauche, on rajoute un pas pour arriver à hauteur 0 (ou horizontal si on y est déjà) puis on applique ϕ_1 au résultat pour obtenir une histoire de Laguerre de taille plus petite.



Conclusion et perspectives

Au moyen des bijections précédentes on prouve la conjecture. Ce qu'il reste à voir :

- Approche récursive de ϕ_1.
- Étude de la bijection des permutations aux permutations induite par ϕ_1 et la bijection de Françon-Viennot avec deux conventions différentes.

Merci de votre attention !

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 1$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 12$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 12222$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 1222244$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 12222445$$

Fonctions de parking croissantes

Une fonction de parking croissante de taille n est un mot FP sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $PF_i \leq i$ et $PF_i \leq PF_{i+1}$.
Exemple : 122224456

Bijection entre codes de Lehmer décroissants et fonctions de parkings

On commence par envoyer le 0 final de L sur le premier 1 de PF puis on lit L de la droite vers la gauche. Si $L_{n-i+1} = 0$, alors $PF_i = PF_i$ et sinon, $PF_i = L_{n-i+1} + 1$.

$$540300010 \rightarrow 122224456$$