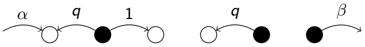
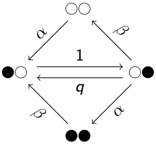
Combinatoire énumérative et algébrique autour du PASEP

Arthur Nunge

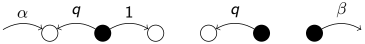
11 décembre 2018

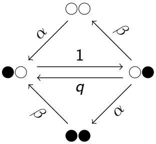
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)





Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

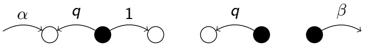


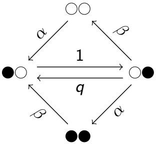


Combinatoire énumérative

abaab

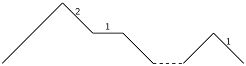
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)



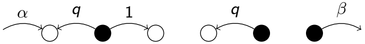


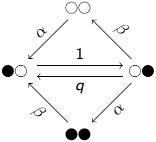
Combinatoire énumérative

abaab



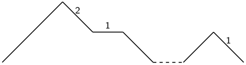
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

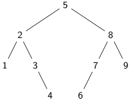




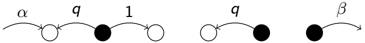
Combinatoire énumérative

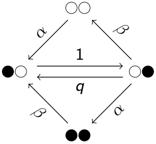
abaab





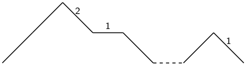
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

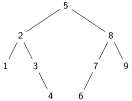




Combinatoire énumérative

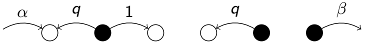
abaab

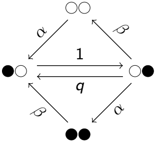




Combinatoire

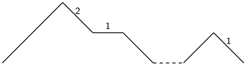
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

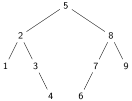




Combinatoire énumérative

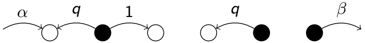
abaab

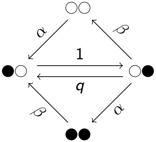




Combinatoire

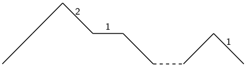
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

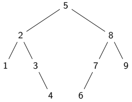




Combinatoire énumérative

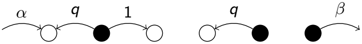
abaab

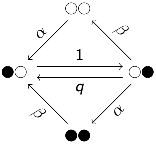




Combinatoire

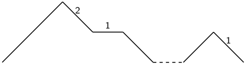
Processus d'Exclusion Partiellement Asymétriques (PASEP)

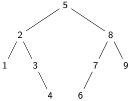




Combinatoire énumérative

abaab





Combinatoire algébrique

$$R_I = \sum_{\mathrm{Des}(\sigma)=I} \mathbb{G}_\sigma$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & q+1 & 1 & q+2 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & q^2+q+1 & q^2+2q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & q+1 & q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & q & q^2+2q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & q^3+2q^2+2q+1
\end{pmatrix}$$

Thèmes abordés durant la thèse

- Démonstration d'une conjecture d'équidistribution de statistiques sur les permutations.
- Description d'une interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP.
- Définition de nouvelles bases de l'algèbre **SCQSym**.
- Définition de descentes sur les permutations segmentés et de nouveaux polynômes eulériens.

Thèmes abordés durant la thèse

- Démonstration d'une conjecture d'équidistribution de statistiques sur les permutations.
- Description d'une interprétation combinatoire des probabilités du 2-PASEP.
- Définition de nouvelles bases de l'algèbre **SCQSym**.
- Définition de descentes sur les permutations segmentés et de nouveaux polynômes eulériens.

Combinatoire énumérative et algébrique autour du PASEP

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois.

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

$\mathfrak{S}_1$

- 1

1 permutation

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$
• 1	• 12 • 21
1 permutation	2 permutations

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	
• 1	• 12	• 123	• 231
	• 21	• 132	• 312
		• 213	• 321
1 permutation	2 permutations	6 permutations	

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_4$
• 1	• 12 • 21	• 123 • 231 • 132 • 312 • 213 • 321	• 1234 • 1243 • $\vdots$ • 4321
1 permutation	2 permutations	6 permutations	24 permutations

Permutations

Une permutation est un mot de longueur n sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ où chaque lettre apparaît une et une seule fois. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de longueur n.

$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_4$
• 1	• 12 • 21	• 123 • 231 • 132 • 312 • 213 • 321	• 1234 • 1243 • $\vdots$ • 4321
1 permutation	2 permutations	6 permutations	24 permutations

Il y a $n! = n * (n-1) \cdots 2 * 1$ permutations de longueur n.

Les permutations un objet central en combinatoire

- Permet d'encoder de nombreuses familles d'objets combinatoires

- Objet pratique pour l'expérimentation informatique :
  - simple à implémenter ;
  - facile à manipuler ;
  - algorithmes simples et rapides en complexité.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 2578364\,1$, les reculs sont $\{1$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 2578364 1$, les reculs sont $\{1, 4$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté $\mathrm{GDes}(\sigma)$) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté GDes(σ)) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, GDes$(\sigma) = \{$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté GDes(σ)) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté $\mathrm{GDes}(\sigma)$) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{3$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté GDes(σ)) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, GDes$(\sigma) = \{3$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté $\mathrm{GDes}(\sigma)$) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{3, 5$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté $\mathrm{GDes}(\sigma)$) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{3, 5$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté GDes(σ)) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{3, 5, 7$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Reculs d'une permutation

Les reculs de σ sont les valeurs k telles que $k+1$ est à sa gauche.
Pour $\sigma = 25783641$, les reculs sont $\{1, 4, 6\}$.

Descentes de Genocchi

L'ensemble des descentes de Genocchi de σ (noté $\mathrm{GDes}(\sigma)$) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1 = \sigma_i$ et $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.
Pour $\sigma = 25783641$, $\mathrm{GDes}(\sigma) = \{3, 5, 7\}$.

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1, 3, 2, 2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1, 3, 2, 2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Bijection avec les sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, n-1\}$

Soit $S = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, on construit $I = (i_1, i_2 - i_1, \dots, i_k - i_{k-1}, n - i_k)$.

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1, 3, 2, 2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Bijection avec les sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$

Soit $S = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, on construit $I = (i_1, i_2 - i_1, \ldots, i_k - i_{k-1}, n - i_k)$. Par exemple, pour $n = 8$,

$$\{1, 4, 6\} \longleftrightarrow (1, 3, 2, 2)$$

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1, 3, 2, 2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Bijection avec les sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$

Soit $S = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, on construit $I = (i_1, i_2 - i_1, \ldots, i_k - i_{k-1}, n - i_k)$. Par exemple, pour $n = 8$,

$$\{1, 4, 6\} \longleftrightarrow (1, 3, 2, 2)$$

Statistiques sous forme de compositions

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1, 3, 2, 2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Bijection avec les sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$

Soit $S = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, on construit $I = (i_1, i_2 - i_1, \ldots, i_k - i_{k-1}, n - i_k)$. Par exemple, pour $n = 8$,

$$\{1, 4, 6\} \longleftrightarrow (1, 3, 2, 2)$$

Statistiques sous forme de compositions

- La composition des reculs : $\mathrm{Rec}(25783641) = (1, 3, 2, 2)$,

Compositions

Une composition de n est une suite d'entiers de somme n. Par exemple, $(1,3,2,2)$ est une composition de 8.
Il y a 2^{n-1} compositions de n.

Bijection avec les sous-ensembles de $\{1,2,\dots,n-1\}$

Soit $S=\{i_1<\cdots<i_k\}$, on construit $I=(i_1,i_2-i_1,\dots,i_k-i_{k-1},n-i_k)$. Par exemple, pour $n=8$,

$$\{1,4,6\} \longleftrightarrow (1,3,2,2)$$

Statistiques sous forme de compositions

- La composition des reculs : $\mathrm{Rec}(25783641)=(1,3,2,2)$,
- La composition des descentes de Genocchi : $\mathrm{GC}(25783641)=(3,2,2,1)$.

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :
$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$
Par exemple, $S^{212}S^{13} = S^{21213}$.

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :
$$S^I S^J = S^{I \cdot J}.$$
Par exemple, $S^{212} S^{13} = S^{21213}$.
- Base des rubans :
$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :

$$S^I S^J = S^{I \cdot J}.$$

  Par exemple, $S^{212} S^{13} = S^{21213}$.

- Base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I) - \ell(J)} S^J$$

  Par exemple,

$$R_{21} R_{13} \quad = \quad (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4)$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :
$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$
Par exemple, $S^{212}S^{13} = S^{21213}$.
- Base des rubans :
$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} R_{21}R_{13} &= (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4) \\ &= S^{2113} - S^{313} - S^{214} + S^{34} \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :

$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$

  Par exemple, $S^{212} S^{13} = S^{21213}$.

- Base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

  Par exemple,

$$\begin{aligned} R_{21} R_{13} &= (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4) \\ &= S^{2113} - S^{313} - S^{214} + S^{34} \\ &= R_{2113} + S^{223} - S^{43} - S^{25} + S_7 \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :

$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$

  Par exemple, $S^{212}S^{13} = S^{21213}$.

- Base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

  Par exemple,

$$\begin{aligned} R_{21}R_{13} &= (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4) \\ &= S^{2113} - S^{313} - S^{214} + S^{34} \\ &= R_{2113} + S^{223} - S^{43} - S^{25} + S_7 \\ &= R_{2113} + R_{223} \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :
$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$
Par exemple, $S^{212}S^{13} = S^{21213}$.
- Base des rubans :
$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} R_{21}R_{13} &= (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4) \\ &= R_{2113} + R_{223} \end{aligned}$$

Algèbre des fonctions symétriques non-commutatives

L'algèbre **Sym** est l'algèbre libre indexée par les compositions.

Bases principales

- Base complète :

$$S^I S^J = S^{I\cdot J}.$$

  Par exemple, $S^{212}S^{13} = S^{21213}$.

- Base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} S^J$$

  Par exemple,

$$\begin{aligned} R_{21}R_{13} &= (S^{21} - S_3)(S^{13} - S_4) \\ &= R_{2113} + R_{223} \end{aligned}$$

  En général,

$$R_I R_J = R_{I\cdot J} + R_{I \triangleright J}.$$

Les bases de Tevlin

En 2007, Tevlin définit deux nouvelles bases de **Sym** :

- une base monomiale : M_I ;
- une base fondamentale : L_I.

Les bases de Tevlin

En 2007, Tevlin définit deux nouvelles bases de **Sym** :

- une base monomiale : M_I ;
- une base fondamentale : L_I.

Ces bases vérifient la relation suivante :

$$L_I = \sum_{J \succeq I} M_J.$$

Par exemple, $L_{212} = M_{212} + M_{1112} + M_{2111} + M_{11111}$.

Les bases de Tevlin

En 2007, Tevlin définit deux nouvelles bases de **Sym** :

- une base monomiale : M_I ;
- une base fondamentale : L_I.

Ces bases vérifient la relation suivante :

$$L_I = \sum_{J \succeq I} M_J.$$

Par exemple, $L_{212} = M_{212} + M_{1112} + M_{2111} + M_{11111}$.

Conjecture (Tevlin '07)

Pour toutes compositions I et J, les coefficients du développement de la base R_J sur les bases L_I et M_I sont des entiers positifs.

Théorème (Hivert, Novelli, Tevlin, Thibon '09)

Soient I et J deux compositions d'un entier n. Soit F_I^J tel que

$$R_J = \sum_{I \models n} F_I^J L_I,$$

alors on a

$$F_I^J = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathsf{GC}(\sigma) = I;\ \mathrm{Rec}(\sigma) = J\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 3 & 2 & . & 1 & 1 & . & . \\ . & . & 2 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & 3 & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 2 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

GC \ Rec	4	31	22	211	13	121	112	1111
4	1234							
31		1243, 1423 4123	1342 3412		2341	2413		
22			1324 3124		2314			
211			3142	1432, 4132 4312		2431 4231	3241	
13					2134			
121						2143 4213	3421	
112							3214	
1111								4321

PASEP

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule.

PASEP

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule. Le processus d'exclusion partiellement asymétrique (PASEP) est un modèle physique d'interaction de particules où les particules peuvent se déplacer à gauche ou à droite dans la chaîne selon les règles :

PASEP

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule. Le processus d'exclusion partiellement asymétrique (PASEP) est un modèle physique d'interaction de particules où les particules peuvent se déplacer à gauche ou à droite dans la chaîne selon les règles :

$$U \bullet \circ V \quad \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ \bullet V$$

PASEP

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule. Le processus d'exclusion partiellement asymétrique (PASEP) est un modèle physique d'interaction de particules où les particules peuvent se déplacer à gauche ou à droite dans la chaîne selon les règles :

$$\begin{array}{ccc} U \bullet \circ V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U \circ \bullet V \\ \circ\, U & \xrightarrow{\alpha} & \bullet U \end{array}$$

PASEP

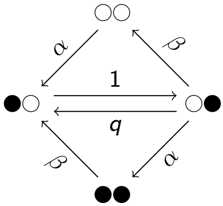
Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule. Le processus d'exclusion partiellement asymétrique (PASEP) est un modèle physique d'interaction de particules où les particules peuvent se déplacer à gauche ou à droite dans la chaîne selon les règles :

$$\begin{array}{ccc} U \bullet \circ V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U \circ \bullet V \\ \circ\, U & \xrightarrow{\alpha} & \bullet U \\ U \bullet & \xrightarrow{\beta} & U \circ \end{array}$$

PASEP

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$ représentant une chaîne finie d'emplacements occupés ou non par une particule. Le processus d'exclusion partiellement asymétrique (PASEP) est un modèle physique d'interaction de particules où les particules peuvent se déplacer à gauche ou à droite dans la chaîne selon les règles :

$$
\begin{array}{ccc}
U \bullet \circ V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U \circ \bullet V \\
\circ\, U & \xrightarrow{\alpha} & \bullet U \\
U \bullet & \xrightarrow{\beta} & U \circ
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{P}(\circ\circ) & \sim & \beta^2 \ ; \\
\mathbb{P}(\bullet\circ) & \sim & \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha\beta q \ ; \\
\mathbb{P}(\circ\bullet) & \sim & \alpha\beta \ ; \\
\mathbb{P}(\bullet\bullet) & \sim & \alpha^2.
\end{array}
$$

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);
- permutations :
  - excédences (α, β, q);

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);
- permutations :
    - excédences (α, β, q);
    - valeurs de descentes (α, q);

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);
- permutations :
  - excédences (α, β, q);
  - valeurs de descentes (α, q);
- histoires de Laguerre (larges) (q);

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);
- permutations :
  - excédences (α, β, q);
  - valeurs de descentes (α, q);
- histoires de Laguerre (larges) (q);
- ...

Interprétations combinatoires

Il existe de nombreuses interprétations combinatoires de ces probabilités :

- tableaux de permutations (α, β, q);
- permutations :
  - excédences (α, β, q);
  - valeurs de descentes (α, q);
- histoires de Laguerre (larges) (q);
- ...

Soit w un état du PASEP de longueur N. On note $\mathrm{C}(w)$ la composition de $N+1$ associée à l'ensemble des positions des $\circ$.
Par exemple, pour $w = \bullet \circ \circ \bullet \bullet \circ \bullet$, on a $\mathrm{C}(w) = (2, 1, 3, 2)$.

Soit w un état du PASEP de longueur N. On note $\mathrm{C}(w)$ la composition de $N+1$ associée à l'ensemble des positions des $\circ$.
Par exemple, pour $w = \bullet\circ\circ\bullet\bullet\circ\bullet$, on a $\mathrm{C}(w) = (2,1,3,2)$.

Théorème (Steingrímsson, Williams '07)

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$. Pour $\alpha = \beta = 1$, on a

$$\mathbb{P}(w) = \frac{1}{Z_N(q)} \sum_{\mathrm{GC}(\sigma)=\mathrm{C}(w)} q^{\mathrm{tot}(\sigma)}$$

où $\mathrm{tot}(\sigma)$ compte le nombre de motifs 31-2 de σ.

Soit w un état du PASEP de longueur N. On note $\mathsf{C}(w)$ la composition de $N+1$ associée à l'ensemble des positions des $\circ$.
Par exemple, pour $w = \bullet \circ \circ \bullet \bullet \circ \bullet$, on a $\mathsf{C}(w) = (2,1,3,2)$.

Théorème (Steingrímsson, Williams '07)

Soit $w \in \{\circ, \bullet\}^N$. Pour $\alpha = \beta = 1$, on a

$$\mathbb{P}(w) = \frac{1}{Z_N(q)} \sum_{\mathsf{GC}(\sigma)=\mathsf{C}(w)} q^{\mathrm{tot}(\sigma)}$$

où $\mathrm{tot}(\sigma)$ compte le nombre de motifs 31-2 de σ.

Par exemple,

$$\mathbb{P}(\bullet\circ) \sim \sum_{\sigma \in \{132,231,312\}} q^{\mathrm{tot}(\sigma)} = 2 + q.$$

q-analogues

En 2010, Novelli, Thibon et Williams définissent un q-analogue de **Sym**.

q-analogues

En 2010, Novelli, Thibon et Williams définissent un q-analogue de **Sym**.

Théorème (Novelli, Thibon, Williams '10)

Soient I et J deux compositions d'un entier n. Le coefficient $E_I^J(q)$ de $L_I(q)$ dans $R_J(q)$ est donné par

$$E_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{LC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathsf{inv}(\sigma)-\nu(I)}.$$

De plus, soit $w \in \{\circ, \bullet\}^{n-1}$. Alors

$$\mathbb{P}(w) \sim \sum_J E_I^J(q).$$

Conjecture (Novelli, Thibon, Williams '10)

$$E_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{GC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathrm{tot}(\sigma)}.$$

q-analogues

En 2010, Novelli, Thibon et Williams définissent un q-analogue de **Sym**.

Théorème (Novelli, Thibon, Williams '10)

Soient I et J deux compositions d'un entier n. Le coefficient $E_I^J(q)$ de $L_I(q)$ dans $R_J(q)$ est donné par

$$E_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{LC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathsf{inv}(\sigma)-\nu(I)}.$$

De plus, soit $w \in \{\circ, \bullet\}^{n-1}$. Alors

$$\mathbb{P}(w) \sim \sum_J E_I^J(q).$$

Théorème (N. '18)

$$E_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{GC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathrm{tot}(\sigma)}.$$

2-PASEP

2-PASEP

Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

2-PASEP

Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

$$U \bullet \circ V \quad \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ \bullet V$$

2-PASEP

Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

$$U \bullet \circ V \quad \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ \bullet V$$

$$U {\color{gray}\bullet} \circ V \quad \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ {\color{gray}\bullet} V$$

2-PASEP

Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

$$
\begin{aligned}
U \bullet \circ V \quad &\underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ \bullet V \\
U {\color{gray}\bullet} \circ V \quad &\underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U \circ {\color{gray}\bullet} V \\
U \bullet {\color{gray}\bullet} V \quad &\underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad U {\color{gray}\bullet} \bullet V
\end{aligned}
$$

2-PASEP

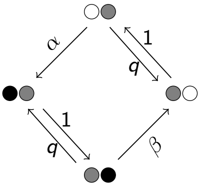
Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

$$
\begin{array}{ccc}
U \bullet \circ V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U \circ \bullet V \\
U {\color{gray}\bullet} \circ V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U \circ {\color{gray}\bullet} V \\
U \bullet {\color{gray}\bullet} V & \underset{q}{\overset{1}{\rightleftarrows}} & U {\color{gray}\bullet} \bullet V \\
\circ U & \xrightarrow{\alpha} & \bullet U \\
U \bullet & \xrightarrow{\beta} & U \circ
\end{array}
$$

2-PASEP

Le 2-PASEP est une généralisation du PASEP avec deux types de particules.

$$
\begin{array}{ccc}
U \bullet \circ V & \overset{1}{\underset{q}{\rightleftarrows}} & U \circ \bullet V \\
U {\color{gray}\bullet} \circ V & \overset{1}{\underset{q}{\rightleftarrows}} & U \circ {\color{gray}\bullet} V \\
U \bullet {\color{gray}\bullet} V & \overset{1}{\underset{q}{\rightleftarrows}} & U {\color{gray}\bullet} \bullet V \\
\circ\, U & \xrightarrow{\alpha} & \bullet U \\
U \bullet & \xrightarrow{\beta} & U \circ
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{P}(\circ {\color{gray}\bullet}) & \sim & \beta; \\
\mathbb{P}(\bullet {\color{gray}\bullet}) & \sim & \alpha\beta + \alpha q \\
\mathbb{P}({\color{gray}\bullet} \circ) & \sim & \beta\alpha + \beta q; \\
\mathbb{P}({\color{gray}\bullet} \bullet) & \sim & \alpha.
\end{array}
$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.

Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2,2,1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccl} D & = & \{ \\ S & = & \{ \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2,2,1) \longrightarrow \begin{array}{ccl} D & = & \{ \\ S & = & \{1 \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2{,}2{,}1) \longrightarrow \begin{array}{rcl} D & = & \{ \\ S & = & \{1, 3 \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2,2,1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} D & = & \{5 \\ S & = & \{1,3 \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2,{\color{red}2,}1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccl} D & = & \{5, {\color{red}7} \\ S & = & \{1, 3 \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

$$(1|2|2{,}2{,}1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} D & = & \{5,7\} \\ S & = & \{1,3\} \end{array}$$

Compositions segmentées

Une composition segmentée de n est une suite d'entiers de somme n séparés par des virgules ou des barres. Par exemple, $(1|2|2,2,1)$ est une composition segmentée de 8.
Il y a 3^{n-1} compositions segmentées de n.

Bijection avec les paires disjointes de sous-ensembles

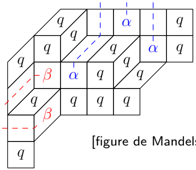
$$(1|2|2{,}2{,}1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} D & = & \{5,7\} \\ S & = & \{1,3\} \end{array}$$

Soit $w \in \{\circ, \bullet, {\color{lightgray}\bullet}\}$. Soit $\mathrm{C}(w)$ la composition segmentée dont les sous-ensembles correspondent aux positions des $\circ$ et des ${\color{lightgray}\bullet}$:

$${\color{lightgray}\bullet} \bullet {\color{lightgray}\bullet} \bullet \circ \bullet \circ \longleftrightarrow (1|2|2,2,1)$$

Interprétation combinatoire du 2-ASEP

[Mandelshtam, Viennot]



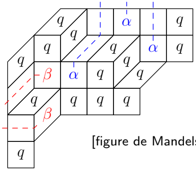
[figure de Mandelshtam-Viennot]

$\longleftrightarrow$ $[2, 10, 12, 7][5, 9, 1, 8, 6][3, 11, 4]$

Tableaux rhombiques alternants (α, β, q) Assemblées de permutations (α, β)

Interprétation combinatoire du 2-ASEP

[Mandelshtam, Viennot]

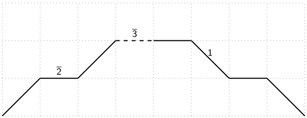


[figure de Mandelshtam-Viennot]

$\longleftrightarrow$ $[2, 10, 12, 7][5, 9, 1, 8, 6][3, 11, 4]$

Tableaux rhombiques alternants (α, β, q) Assemblées de permutations (α, β)

[Corteel, N.]



$\longleftrightarrow$ $\bar{2}57836\bar{4}1$

Histoires de Laguerre larges marquées (q) Permutations patiellement signées (q)

Permutations partiellement signées

Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 peuvent être signées. Par exemple, $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$.

Permutations partiellement signées

Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 peuvent être signées. Par exemple, $\sigma = \overline{2}57836\overline{4}1$.

Statistiques

Soit σ une permutation partiellement signée de longueur n.

Permutations partiellement signées

Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 peuvent être signées. Par exemple, $\sigma = \overline{2}57836\overline{4}1$.

Statistiques

Soit σ une permutation partiellement signée de longueur n.

- $\mathrm{Sign}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est négative dans σ. Par exemple, $\mathrm{Sign}(\overline{2}57836\overline{4}1) = \{1, 3\}$.

Permutations partiellement signées

Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 peuvent être signées. Par exemple, $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$.

Statistiques

Soit σ une permutation partiellement signée de longueur n.

- $\mathrm{Sign}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est négative dans σ. Par exemple, $\mathrm{Sign}(\bar{2}57836\bar{4}1) = \{1, 3\}$.
- $\mathrm{GDes}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positive et est plus grande que son voisin de droite. Par exemple, $\mathrm{GDes}(\bar{2}57836\bar{4}1) = \{5, 7\}$.

Permutations partiellement signées

Une permutation partiellement signée est une permutation où toutes les valeurs sauf 1 peuvent être signées. Par exemple, $\sigma = \bar{2}57836\bar{4}1$.

Statistiques

Soit σ une permutation partiellement signée de longueur n.

- $\mathrm{Sign}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est négative dans σ. Par exemple, $\mathrm{Sign}(\bar{2}57836\bar{4}1) = \{1, 3\}$.
- $\mathrm{GDes}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positive et est plus grande que son voisin de droite. Par exemple, $\mathrm{GDes}(\bar{2}57836\bar{4}1) = \{5, 7\}$.

Soit $\mathrm{GC}(\sigma)$ la composition segmentée dont les ensembles associés sont $\mathrm{GDes}(\sigma)$ et $\mathrm{Sign}(\sigma)$.
Par exemple, $\mathrm{GC}(\bar{2}57836\bar{4}1) = (1|2|2, 2, 1)$.

Théorème (Corteel, N. '18+)

Soit $w \in \{\circ, \bullet, \bullet\}^N$ *avec* r *particules* $\bullet$. *Pour* $\alpha = \beta = 1$, *on a*

$$\mathbb{P}(w) := \frac{P_w(q)}{Z_{N,r}(q)} = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\mathrm{GC}(\sigma)=\mathrm{C}(w)} q^{\mathrm{tw}(\sigma)}.$$

Théorème (Corteel, N. '18+)

Soit $w \in \{\circ, \bullet, {\color{gray}\bullet}\}^N$ avec r particules ${\color{gray}\bullet}$. Pour $\alpha = \beta = 1$, on a

$$\mathbb{P}(w) := \frac{P_w(q)}{Z_{N,r}(q)} = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\mathrm{GC}(\sigma)=\mathrm{C}(w)} q^{\mathrm{tw}(\sigma)}.$$

Exemple

Soit $w = \bullet{\color{gray}\bullet}$. Les permutations associées sont :

$$\{12\overline{3}, 1\overline{3}2, 2\overline{3}1, \overline{3}12\}$$

Théorème (Corteel, N. '18+)

Soit $w \in \{\circ, \bullet, {\color{gray}\bullet}\}^N$ avec r particules ${\color{gray}\bullet}$. Pour $\alpha = \beta = 1$, on a

$$\mathbb{P}(w) := \frac{P_w(q)}{Z_{N,r}(q)} = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{\mathrm{GC}(\sigma)=\mathrm{C}(w)} q^{\mathrm{tw}(\sigma)}.$$

Exemple

Soit $w = \bullet{\color{gray}\bullet}$. Les permutations associées sont :

$$\{12\bar{3}, 1\bar{3}2, 2\bar{3}1, \bar{3}12\}$$

et la somme correspondante est :

$$1 + 2q + q^2 = (1+q)^2$$

Proposition (N. '18+)

Soit $w \in \{\circ, \bullet, \textcolor{gray}{\bullet}\}^N$ ayant r particules $\textcolor{gray}{\bullet}$. On a

$$P_w(q) = [r+1]_q! R_w(q)$$

où $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ et $R_w(q) \in \mathbb{N}[q]$.

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \ldots$$

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \ldots$$

Soient $\sigma \sim \tau$ et r le nombre de valeurs négatives de σ.

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \ldots$$

Soient $\sigma \sim \tau$ et r le nombre de valeurs négatives de σ.

- $\mathrm{Sign}(\sigma) = \mathrm{Sign}(\tau)$;

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \dots$$

Soient $\sigma \sim \tau$ et r le nombre de valeurs négatives de σ.

- $\mathrm{Sign}(\sigma) = \mathrm{Sign}(\tau)$;
- $\mathrm{GDes}(\sigma) = \mathrm{GDes}(\tau)$;

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \dots$$

Soient $\sigma \sim \tau$ et r le nombre de valeurs négatives de σ.

- $\mathrm{Sign}(\sigma) = \mathrm{Sign}(\tau)$;
- $\mathrm{GDes}(\sigma) = \mathrm{GDes}(\tau)$;
- Il y a $(r+1)!$ permutations dans la classe de σ.

Démonstration à $q = 1$

On définit une relation d'équivalence sur les permutations partiellement signées :

$$5\bar{2}786\bar{4}31 \sim 31786\bar{4}5\bar{2} \sim 786\bar{4}315\bar{2} \sim \dots$$

Soient $\sigma \sim \tau$ et r le nombre de valeurs négatives de σ.

- $\mathrm{Sign}(\sigma) = \mathrm{Sign}(\tau)$;
- $\mathrm{GDes}(\sigma) = \mathrm{GDes}(\tau)$;
- Il y a $(r+1)!$ permutations dans la classe de σ.

Cette démonstration ne permet pas de démontrer le cas général.

Proposition (N. '18+)

Soit $w \in \{\circ, \bullet, {\color{gray}\bullet}\}^N$ avec k particules ${\color{gray}\bullet}$ ou $\circ$. On a

$$\begin{cases} P_{{\color{gray}\bullet}^s \bullet w}(q) & = & [k+1]_q P_{{\color{gray}\bullet}^s w}(q) + \displaystyle\sum_{w = u \circ v} q^{\kappa(u)} P_{{\color{gray}\bullet}^s u \bullet v}(q) \\ P_{{\color{gray}\bullet}^s \circ w}(q) & = & [s+1]_q P_{{\color{gray}\bullet}^s w}(q) \\ P_{{\color{gray}\bullet}^s}(q) & = & [s+1]_q!. \end{cases}$$

SCQSym

SCQSym

SCQSym est l'algèbre libre indexée par les compositions segmentées.
En 2007, Novelli et Thibon définissent deux bases pour cette algèbre :

SCQSym

SCQSym est l'algèbre libre indexée par les compositions segmentées.
En 2007, Novelli et Thibon définissent deux bases pour cette algèbre :

- Une base P :
$$P_I P_J = P_{I.J} + P_{I|J}.$$
Par exemple, $P_{21|2}P_{13} = P_{21|213} + P_{21|2|13}$.

SCQSym

SCQSym est l'algèbre libre indexée par les compositions segmentées.
En 2007, Novelli et Thibon définissent deux bases pour cette algèbre :

- Une base P :

$$P_I P_J = P_{I \cdot J} + P_{I|J}.$$

  Par exemple, $P_{21|2} P_{13} = P_{21|213} + P_{21|2|13}$.

- Une base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I) - \ell(J)} P_J.$$

  Par exemple, $R_{212|2} = P_{212|2} - P_{32|2} - P_{23|2} + P_{5|2}$.

SCQSym

SCQSym est l'algèbre libre indexée par les compositions segmentées.
En 2007, Novelli et Thibon définissent deux bases pour cette algèbre :

- Une base P :

$$P_I P_J = P_{I.J} + P_{I|J}.$$

  Par exemple, $P_{21|2} P_{13} = P_{21|213} + P_{21|2|13}$.

- Une base des rubans :

$$R_I = \sum_{J \preceq I} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} P_J.$$

  Par exemple, $R_{212|2} = P_{212|2} - P_{32|2} - P_{23|2} + P_{5|2}$.
  On a alors

$$R_I R_J = R_{I.J} + R_{I \triangleright J} + R_{I|J}.$$

  Par exemple, $R_{21|2} R_{13} = R_{21|213} + R_{21|33} + R_{21|2|13}$.

Analogue des bases de Tevlin

Reculs sur les permutations partiellement signées

$\mathrm{R}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positif et est à gauche dans σ. Par exemple, $\mathrm{R}(\bar{2}578364\bar{1}) = \{4, 6\}$.

Analogue des bases de Tevlin

Reculs sur les permutations partiellement signées

R(σ) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positif et est à gauche dans σ. Par exemple, R($\bar{2}57836\bar{4}1$) $= \{4, 6\}$.
Soit $\mathrm{Rec}(\sigma)$ la composition segmentée dont les ensembles associés sont R(σ) et Sign(σ). Par exemple, $\mathrm{Rec}(\bar{2}57836\bar{4}1) = (1|2|1, 2, 2)$.

Analogue des bases de Tevlin

Reculs sur les permutations partiellement signées

$\mathrm{R}(\sigma)$ est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positif et est à gauche dans σ. Par exemple, $\mathrm{R}(\bar{2}57836\bar{4}1) = \{4, 6\}$.
Soit $\mathrm{Rec}(\sigma)$ la composition segmentée dont les ensembles associés sont $\mathrm{R}(\sigma)$ et $\mathrm{Sign}(\sigma)$. Par exemple, $\mathrm{Rec}(\bar{2}57836\bar{4}1) = (1|2|1, 2, 2)$.

Base Fondamentale

Soit L_I la base de **SCQSym** définie via la relation suivante :

$$R_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{F}_I^J L_I,$$

où

$$\mathcal{F}_I^J = \#\{\sigma \mid \mathrm{GC}(\sigma) = I, \mathrm{Rec}(\sigma) = J\}.$$

Analogue des bases de Tevlin

Reculs sur les permutations partiellement signées

R(σ) est l'ensemble des valeurs k telles que $k+1$ est positif et est à gauche dans σ. Par exemple, R($\bar{2}5783 6\bar{4}1$) $= \{4,6\}$.
Soit $\mathrm{Rec}(\sigma)$ la composition segmentée dont les ensembles associés sont R(σ) et Sign(σ). Par exemple, $\mathrm{Rec}(\bar{2}57836\bar{4}1) = (1|2|1,2,2)$.

Base Fondamentale

Soit L_I la base de **SCQSym** définie via la relation suivante :

$$R_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{F}_I^J L_I,$$

où

$$\mathcal{F}_I^J = \#\{\sigma \mid \mathsf{GC}(\sigma) = I, \mathrm{Rec}(\sigma) = J\}.$$

Proposition (N. '18+)

La relation ci-dessus est bien définie et L_I est une base de **SCQSym**.

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Proposition (N. '18+)

Soit $\mathcal{C}_I^J$ tel que

$$P_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J M_I$$

Alors $\mathcal{C}_I^J$ est un produit de coefficients binomiaux.

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Proposition (N. '18+)

Soit $\mathcal{C}_I^J$ tel que

$$P_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J M_I$$

Alors $\mathcal{C}_I^J$ est un produit de coefficients binomiaux.

$$PM_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 2 & 4 & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 2 & 2 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 3 & 6 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & 4 & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & 6 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 2 & 2 & . \\ . & . & . & . & . & . & 3 & 6 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 6 \end{pmatrix}$$

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Proposition (N. '18+)

Soit $\mathcal{C}_I^J$ tel que

$$P_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J M_I$$

Alors $\mathcal{C}_I^J$ est un produit de coefficients binomiaux.

$$PM_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 2 & 4 & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 2 & 2 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 3 & 6 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & 4 & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & 6 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 2 & 2 & . \\ . & . & . & . & . & . & 3 & 6 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 6 \end{pmatrix}$$

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Proposition (N. '18+)

Soit $\mathcal{C}_I^J$ tel que

$$P_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J M_I$$

Alors $\mathcal{C}_I^J$ est un produit de coefficients binomiaux.

$$PM_3 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
1 & 3 & 2 & 4 & . & . & . & . & . \\
1 & 1 & {\color{red}2} & {\color{red}2} & . & . & . & . & . \\
1 & 3 & {\color{red}3} & {\color{red}6} & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 3 & 4 & . & . & . \\
. & . & . & . & 3 & 6 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & {\color{red}2} & {\color{red}2} & . \\
. & . & . & . & . & . & {\color{red}3} & {\color{red}6} & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 6
\end{pmatrix}$$

Base Monomiale

Soit M_I définie en utilisant le changement de base suivant :

$$M_J = \sum_{I \succeq J} (-1)^{\ell(I)-\ell(J)} L_I$$

Proposition (N. '18+)

Soit $\mathcal{C}_I^J$ tel que

$$P_J = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J M_I$$

Alors $\mathcal{C}_I^J$ est un produit de coefficients binomiaux.

$$PM_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 2 & 4 & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 2 & 2 & . & . & . & . & . \\ 1 & 3 & 3 & \color{red}{6} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & 4 & . & . & . \\ . & . & . & . & 3 & \color{red}{6} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 2 & 2 & . \\ . & . & . & . & . & . & 3 & \color{red}{6} & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \color{red}{6} \end{pmatrix}$$

Soit $P_J(q)$ tel que

$$P_J(q) = \sum_{I \Vdash n} \mathcal{C}_I^J(q) M_I,$$

où $\mathcal{C}_I^J(q)$ est le q-analogue naturel des $\mathcal{C}_I^J$.

$$PM_3(q) = \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] & . & . & . & . & . \\ [1] & [3] & [2] & [2][2] & . & . & . & . & . \\ [1] & [1] & [2] & [2] & . & . & . & . & . \\ [1] & [3] & [3] & [2][3] & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & [3] & [1] & . & . & . \\ . & . & . & . & [3] & [2][3] & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & [2] & [2] & . \\ . & . & . & . & . & . & [3] & [2][3] & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & [2][3] \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} P_J(q) \arrow[r, "\mathcal{C}_I^J(q)"] \arrow[d, "(-1)^{\ell(I)-\ell(J)}"'] & M_I \arrow[d, "\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(I)-\ell(J)} q^{-st'(I,J)}"] \\ R_J(q) \arrow[r, "\mathcal{F}_I^J(q)"'] & L_I(q) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_J(q) \arrow[r, "\mathcal{C}_I^J(q)"] \arrow[d, "(-1)^{\ell(I)-\ell(J)}"'] & M_I \arrow[d, "\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(I)-\ell(J)} q^{-st'(I,J)}"] \\ R_J(q) \arrow[r, "\mathcal{F}_I^J(q)"'] & L_I(q) \end{tikzcd}$$

Théorème (N. '18+)

Soit I une composition segmentée et w l'état du 2-PASEP tel que $\mathrm{C}(w) = I$. On a

$$\mathbb{P}(w) \sim \sum_J \mathcal{F}_I^J(q)$$

$$\begin{tikzcd} P_J(q) \arrow[r, "\mathcal{C}_I^J(q)"] \arrow[d, "(-1)^{\ell(I)-\ell(J)}"'] & M_I \arrow[d, "\left(\frac{-1}{q}\right)^{\ell(I)-\ell(J)} q^{-st'(I,J)}"] \\ R_J(q) \arrow[r, "\mathcal{F}_I^J(q)"'] & L_I(q) \end{tikzcd}$$

Théorème (N. '18+)

Soit I une composition segmentée et w l'état du 2-PASEP tel que $\mathrm{C}(w) = I$. On a

$$\mathbb{P}(w) \sim \sum_J \mathcal{F}_I^J(q)$$

Corollaire

Soit $w \in \{\circ, \bullet, \textcolor{gray}{\bullet}\}^N$ avec r particules $\textcolor{gray}{\bullet}$, et soit $I = \mathrm{C}(w)$.

$$\mathbb{P}(w) = \frac{1}{Z_{N,r}(q)} \sum_{K \preceq I} \left(\frac{(-1)}{q}\right)^{\ell(I)-\ell(K)} q^{-st(I,K)} c_K(q),$$

où

$$c_K(q) = [s]_q^{k_1} [s-1]_q^{k_2} \dots [1]_q^{k_s}.$$

Perspectives

- Décrire combinatoirement le terme $[r+1]_q!$ dans $\mathbb{P}(w)$.

Perspectives

- Décrire combinatoirement le terme $[r+1]_q!$ dans $\mathbb{P}(w)$.
- Interpréter combinatoirement les coefficients $\mathcal{F}_I^J(q)$:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & q+1 & 1 & q+2 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & q^2+q+1 & q^2+2q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & q+1 & q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & q & q^2+2q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & q^3+2q^2+2q+1
\end{pmatrix}$$

Perspectives

- Décrire combinatoirement le terme $[r+1]_q!$ dans $\mathbb{P}(w)$.
- Interpréter combinatoirement les coefficients $\mathcal{F}_I^J(q)$:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & q+1 & 1 & q+2 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & q^2+q+1 & q^2+2q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & q+1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & q+1 & q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & q & q^2+2q+1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & q^3+2q^2+2q+1
\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{GC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathrm{tw}(\sigma)}$$

Perspectives

- Décrire combinatoirement le terme $[r+1]_q!$ dans $\mathbb{P}(w)$.
- Interpréter combinatoirement les coefficients $\mathcal{F}_I^J(q)$:

$$\mathcal{F}_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{GC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathsf{tw}(\sigma)}$$

- Applications diverses des nouvelles bases de **SCQSym**.

Perspectives

- Décrire combinatoirement le terme $[r+1]_q!$ dans $\mathbb{P}(w)$.
- Interpréter combinatoirement les coefficients $\mathcal{F}_I^J(q)$:

$$\mathcal{F}_I^J(q) = \sum_{\substack{\mathsf{GC}(\sigma)=I \\ \mathrm{Rec}(\sigma)=J}} q^{\mathsf{tw}(\sigma)}$$

- Applications diverses des nouvelles bases de **SCQSym**.
- Définir de nouveaux polynômes eulériens et une algèbre sur les assemblées de permutations