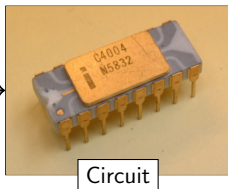
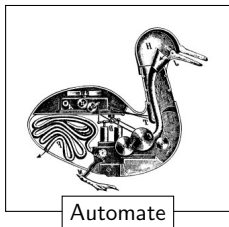


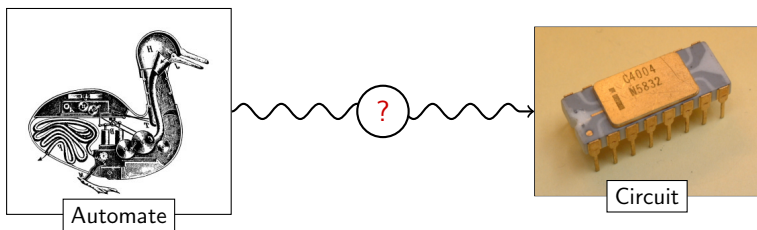
Circuits booléens, prédicats modulaires et langages réguliers

Charles Paperman

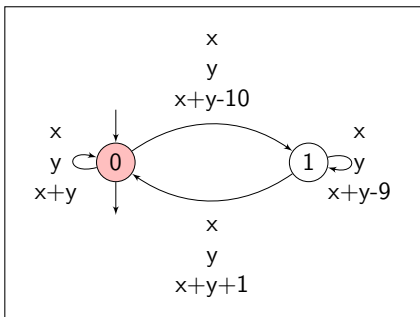
LIAFA, Université Paris Diderot

Soutenance de thèse, 2014





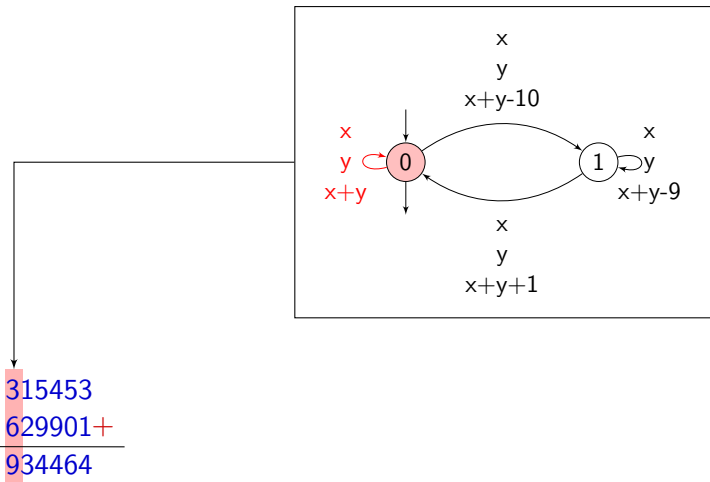
1. Présentation de la conjecture de Straubing
2. L'ajout des prédicats modulaires
3. Les circuits d'arité moyenne bornée
4. Les prédicats de degré fini et la logique à deux variables

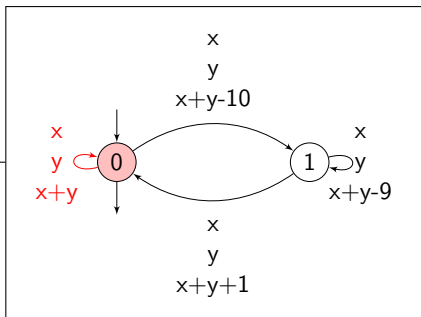


315453

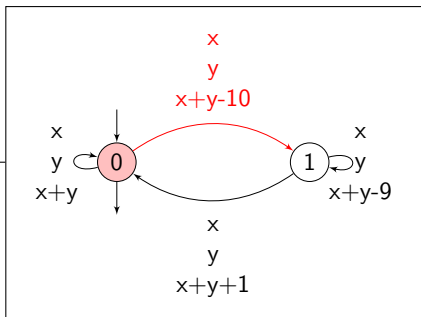
629901+

934464

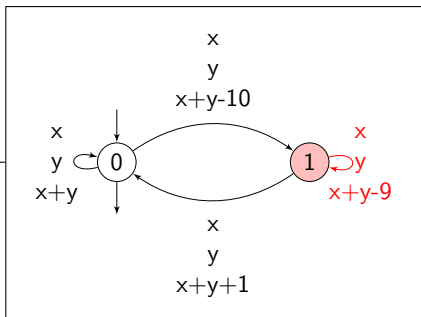


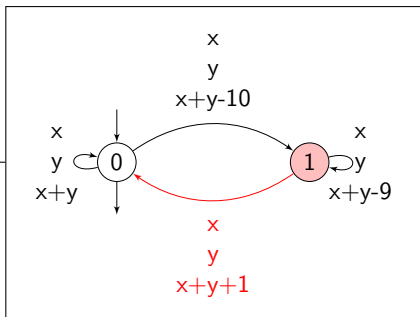
$$\begin{array}{r}
 315453 \\
 629901+ \\
 \hline
 934464
 \end{array}$$


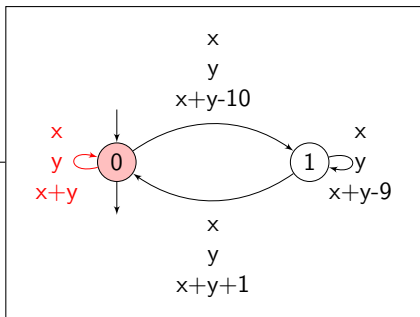
$$\begin{array}{r}
 315453 \\
 629901+ \\
 \hline
 934464
 \end{array}$$

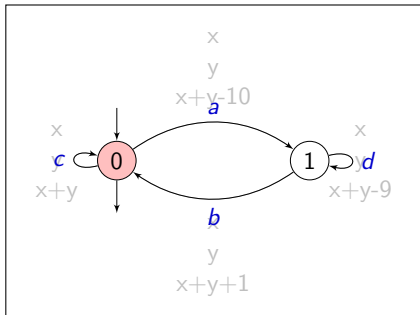


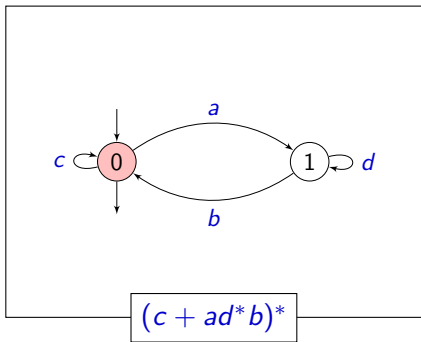
$$\begin{array}{r}
 315453 \\
 629901+ \\
 \hline
 934464
 \end{array}$$



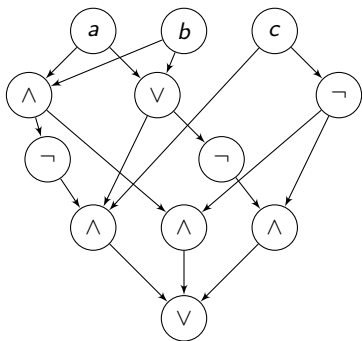
$$\begin{array}{r}
 315453 \\
 629901+ \\
 \hline
 934464
 \end{array}$$


$$\begin{array}{r}
 315453 \\
 629901 + \\
 \hline
 934464
 \end{array}$$


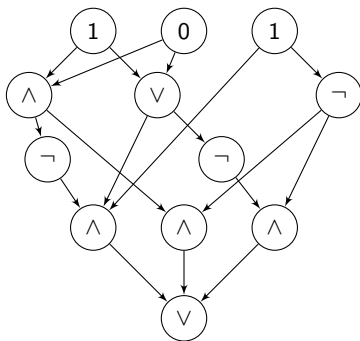




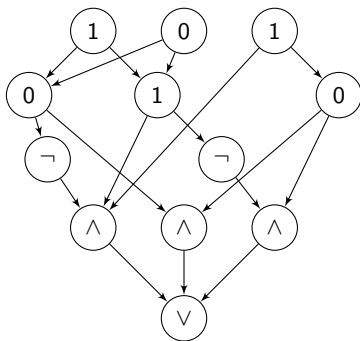
Un exemple de circuit



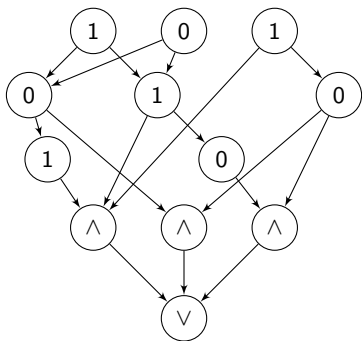
Un exemple de circuit



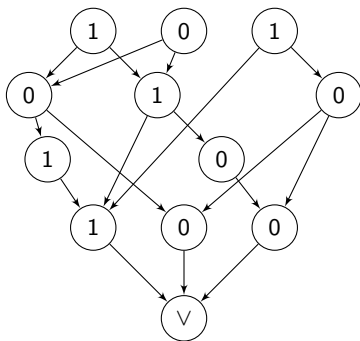
Un exemple de circuit



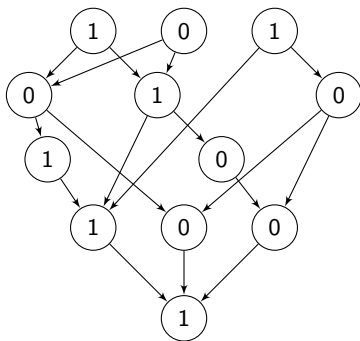
Un exemple de circuit



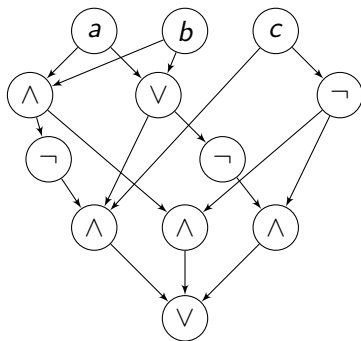
Un exemple de circuit



Un exemple de circuit

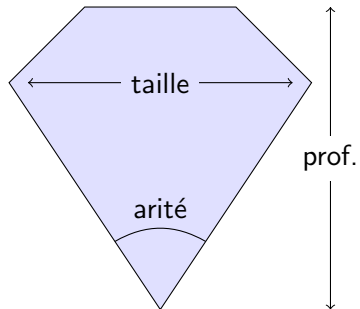
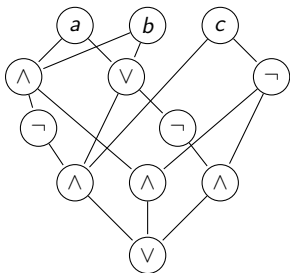


Un exemple de circuit

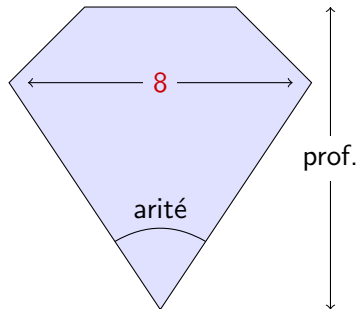
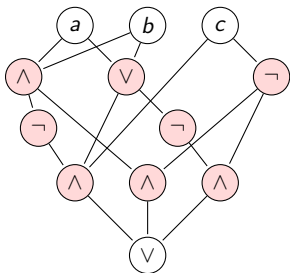


Mots acceptés : abc de $\{0, 1\}^3$ tels que $a \oplus b = c$.

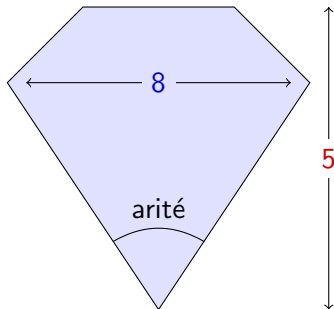
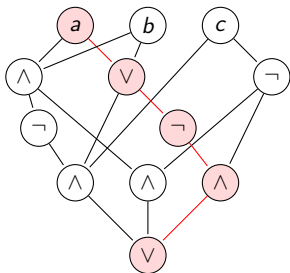
Paramètres de complexité



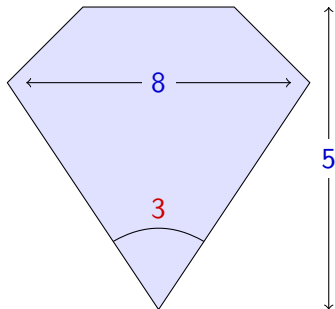
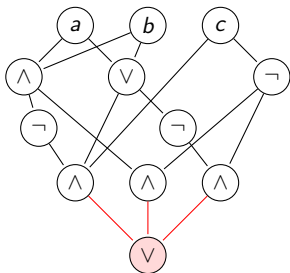
Paramètres de complexité

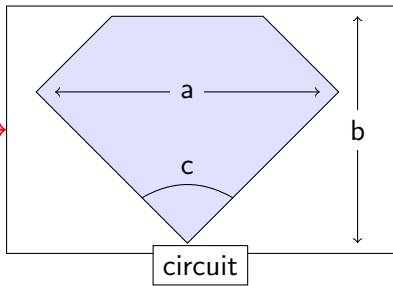
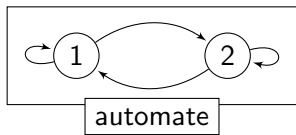


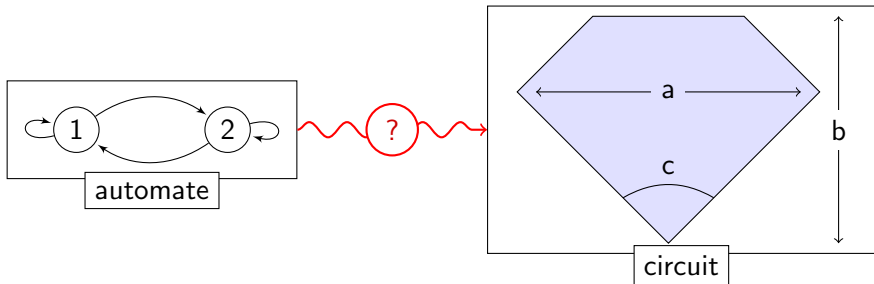
Paramètres de complexité



Paramètres de complexité

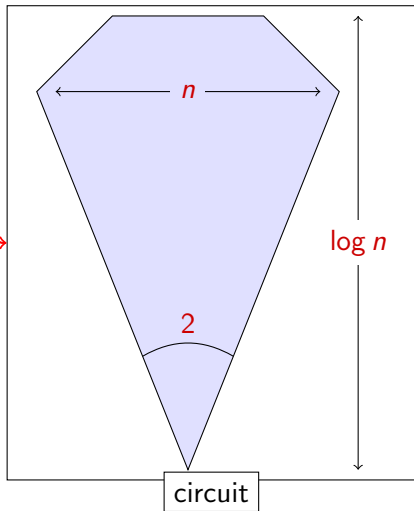
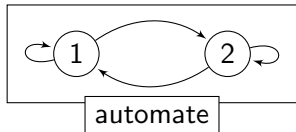






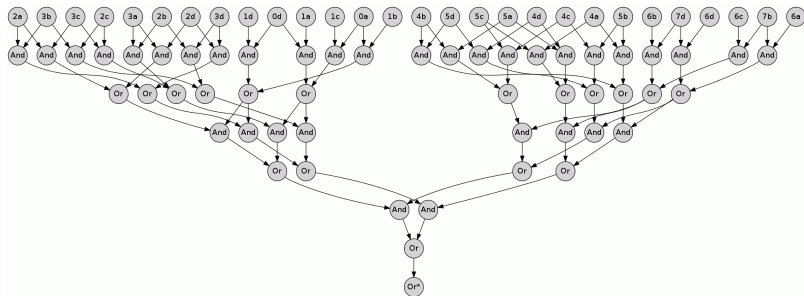
Proposition (folklore)

Tous les langages réguliers sont calculés par des circuits de profondeur **logarithmique**, de taille **linéaire** et d'arité **bornée**.



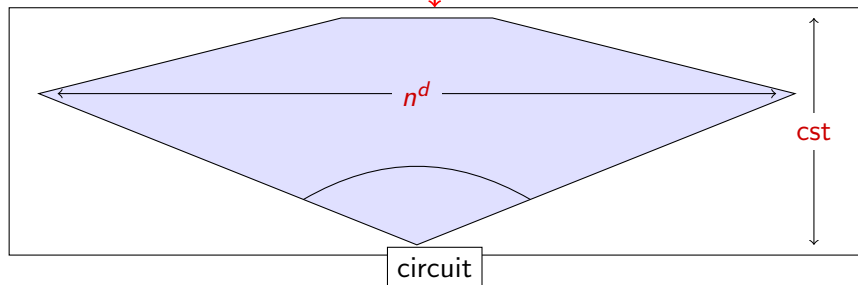
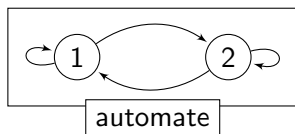
Retour à la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

La relation d'addition sur 8 entrées, taille: 80, profondeur: 7.

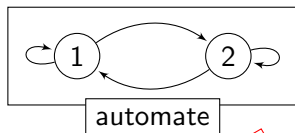


Peut-on faire mieux?

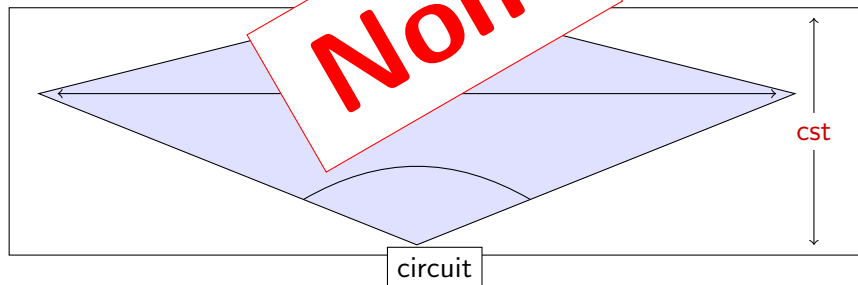
Peut-on faire mieux?



Peut-on faire mieux?



Non!



Un peu de complexité

Théorème (Furst, Saxe et Sipser, 84)

Il n'est pas possible de calculer le langage **parité** avec des circuits de profondeur **constante** et de taille **polynomiale**.

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Théorème (BCST¹, 92)

On peut décider si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur **constante** et de taille **polynomiale** (**AC⁰**).

¹Barrington, Compton, Straubing et Thérien

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

Théorème (BCST¹, 92)

On peut décider effectivement si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur **constante** et de taille **polynomiale** (**AC⁰**).

¹Barrington, Compton, Straubing et Thérien

Peux-t-on faire mieux dans certains cas ?

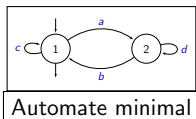
Théorème (BCST¹, 92)

On peut décider effectivement si un langage régulier peut être calculé par un circuit de profondeur **constante** et de taille **polynomiale** (**AC⁰**).

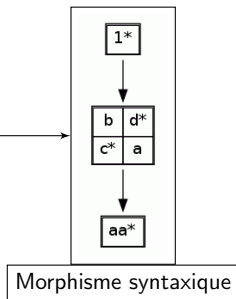
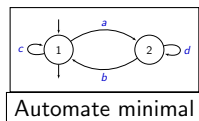
→ Il s'agit d'un résultat **algébrique**.

¹Barrington, Compton, Straubing et Thérien

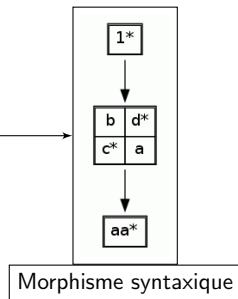
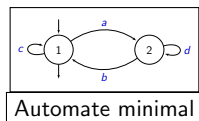
Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$



Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$



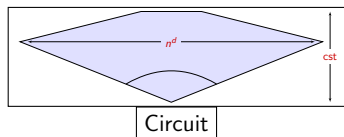
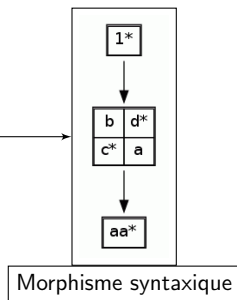
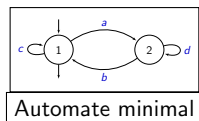
Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$



1. Entre a et b successifs que des d
2. Entre b et a successifs que des c
3. Première lettre non c est un a .
4. Dernière lettre non c est un b .

Description logique

Retour sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

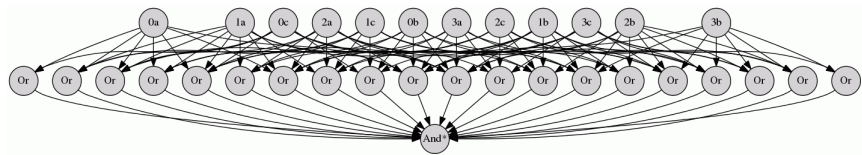


1. Entre a et b successifs que des d
2. Entre b et a successifs que des c
3. Première lettre non c est un a .
4. Dernière lettre non c est un b .

Description logique

Résultat sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

Sur 4 entrées, taille: 33, profondeur: 3.



Théorème (BCST, 92)

$$\mathbf{FO}[\mathcal{A}rb] \cap \mathbf{REG} = \mathbf{FO}[\mathcal{R}eg]$$

Théorème (BCST, 92)

$$\text{FO}[\mathcal{A}rb] \cap \text{REG} = \text{FO}[\mathcal{R}eg]$$

Formules logiques:

- ▶ $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- ▶ Prédicats de lettres
- ▶ Prédicats numériques
 - $x < y$
 - $x + y = z$
 - $xy = z, \dots$

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\text{FO}[\mathcal{A}rb] \cap \text{REG} = \text{FO}[\mathcal{R}eg]$$

Formules logiques:

- ▶ $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- ▶ Prédicats de lettres
- ▶ Prédicats numériques
 - $x < y$
 - $x + y = z$
 - $xy = z, \dots$

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\text{FO}[\mathcal{A}rb] \cap \text{REG} = \text{FO}[\mathcal{R}eg]$$

Formules logiques:

- ▶ $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- ▶ Prédicats de lettres
- ▶ Prédicats numériques
 $x < y$
 $x + y = z$
 $xy = z, \dots$

Formules logiques:

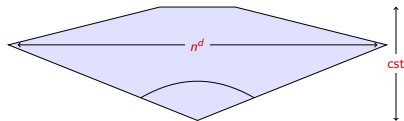
- ▶ $\wedge, \vee, \neg, \forall x, \exists x$
- ▶ Prédicats de lettres
- ▶ Prédicats réguliers
 $x < y$
 $x = y + k$ (*Loc*)
 $x \equiv r \pmod q$ (*Mod*)

Théorème (BCST, 92)

Les langages réguliers

$$\text{FO}[\text{Arb}] \cap \text{REG} = \text{FO}[\text{Reg}]$$

Classe de complexité **AC⁰**
(Immerman, 87)



Classe de langages réguliers **QA**:

- ▶ semigroupe stable aperiodique
- ▶ Décidable
- ▶ Effectif

Conjecture de Straubing (variante)

$$\mathcal{F}[\sigma, \text{Reg}] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\text{Reg}]$$

Conjecture de Straubing (variante)

$$\mathcal{F}[\sigma, \text{Reg}] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\text{Reg}]$$

Classe de langages:

- ▶ σ prédicats numériques
- ▶ classes de circuits
(uniformité)
- ▶ calcul de bornes inférieures

Conjecture de Straubing (variante)

Les langages réguliers

$$\mathcal{F}[\sigma, \text{Reg}] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\text{Reg}]$$

Classe de langages:

- ▶ σ prédicats numériques
- ▶ classes de circuits
(uniformité)
- ▶ calcul de bornes inférieures

Conjecture de Straubing (variante)

Les langages réguliers

$$\mathcal{F}[\sigma, \text{Reg}] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \mathcal{F}[\text{Reg}]$$

Classe de langages:

- ▶ σ prédicats numériques
- ▶ classes de circuits (uniformité)
- ▶ calcul de bornes inférieures

Classe de langages réguliers:

- ▶ Caractérisation algébrique ?
- ▶ Décidable ?
- ▶ Effective ?

Principales contributions

En logique:

- ▶ Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
→ $\mathcal{F}[\mathcal{A}rb_1, \mathcal{R}eg] \cap \mathcal{R}eg = \mathcal{F}[\mathcal{R}eg]$

Principales contributions

En logique:

- ▶ Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
→ $\mathcal{F}[\text{Arb}_1, \text{Reg}] \cap \text{Reg} = \mathcal{F}[\text{Reg}]$

En algèbre:

- ▶ Résultats de transfert $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}]$

Principales contributions

En logique:

- ▶ Le théorème de substitution (Fijalkow, P., 14):
 $\rightarrow \mathcal{F}[\text{Arb}_1, \text{Reg}] \cap \text{Reg} = \mathcal{F}[\text{Reg}]$

En algèbre:

- ▶ Résultats de transfert $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}]$

En complexité de circuits:

- ▶ Caractérisation **décidable** et **effective** des langages réguliers dans la classe des circuits de profondeur constante et d'**arité moyenne bornée**.
- ▶ Un théorème à la Crane-Beach pour **FO²** :
 $\rightarrow \mathbf{FO}^2[\text{Dfin}, \text{Reg}] \cap \text{Reg} = \mathbf{FO}^2[\text{Reg}]$.

Ajout des prédicats modulaires

Ajout des prédicats modulaires

Problématique:

Transfert de décidabilité $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}]$?

Deux étapes:

1. Transfert à d fixé $\mathcal{F}[\sigma] \rightarrow \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$.
2. Déterminer un tel indice de **délai** d .

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la **séparation est décidable**. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$ est **décidable**.

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la **séparation est décidable**. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$ est **décidable**.

→ Repose uniquement sur la définition de **fragment**.

Première étape

Théorème (Dartois, P.)

Soit $\mathcal{F}[\sigma]$ un fragment dont la **séparation est décidable**. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le fragment $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$ est **décidable**.

- Repose uniquement sur la définition de **fragment**.
- Ce n'est pas un résultat algébrique.

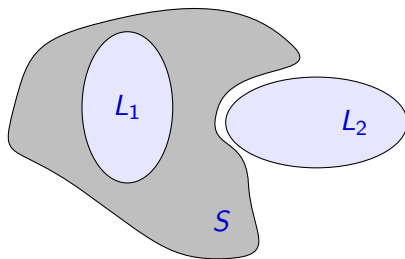
Le problème de séparation

Entrées:

Deux langages L_1 et L_2

Question:

Existe-t-il $S \in \mathcal{F}[\sigma]$ tel que $\begin{cases} L_1 \subseteq S \\ L_2 \cap S = \emptyset \end{cases}$?



Délai

Entrées:

Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

Question:

Peut-on calculer un entier d tel que:

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$$

Délai

Entrées:

Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

Question:

Peut-on calculer un entier d tel que:

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$$

Cadre algébrique:

Délai

Entrées:

Un langage régulier L et un fragment $\mathcal{F}[\sigma]$.

Question:

Peut-on calculer un entier d tel que:

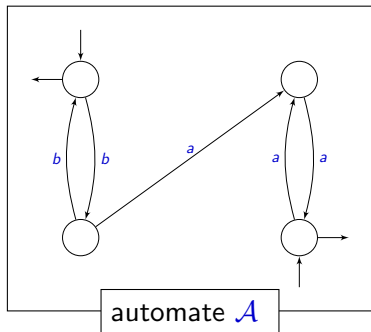
$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_d]$$

Cadre algébrique:

→ Fragment équivalent à une variété de **monoïdes** ou de **semigroupes** finis.

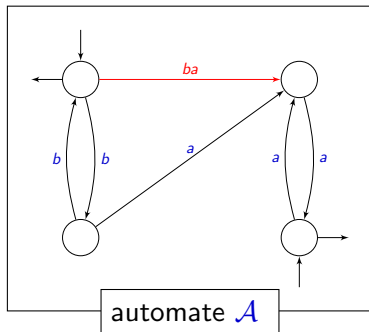
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



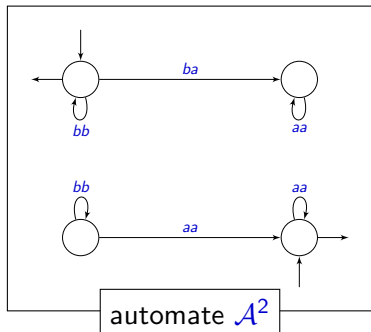
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



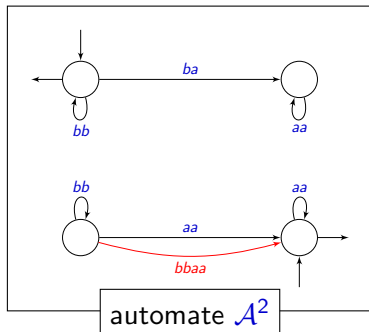
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



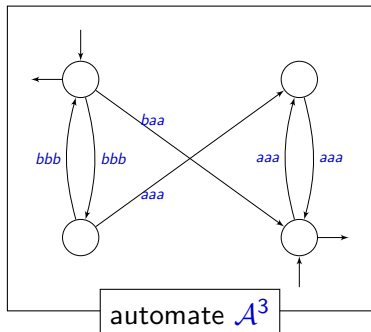
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



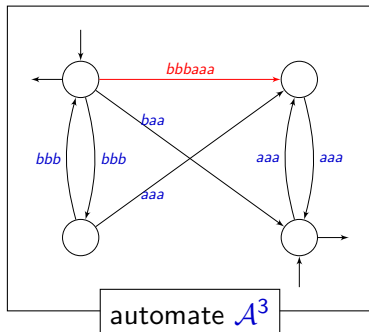
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



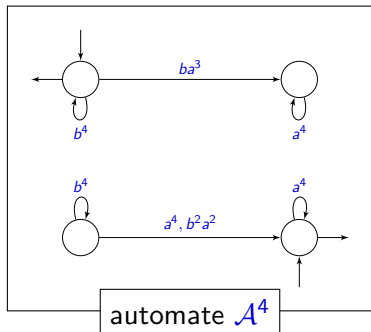
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



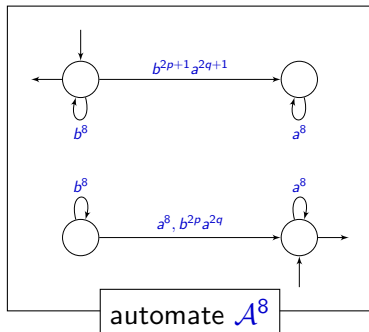
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



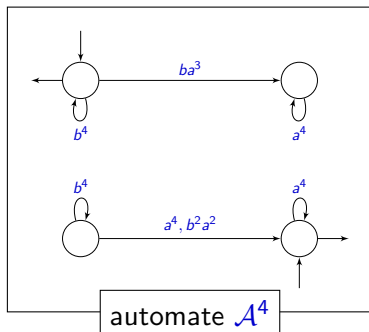
L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



L'indice de stabilité du langage $(bb)^*(aa)^*$

→ plus petit entier s tel que $\mathcal{A}^s \equiv \mathcal{A}^{2s}$



- ▶ L'indice de stabilité de $(bb)^*(aa)^*$ est donc **4**.
- ▶ Le monoïde [semigroupe] **stable** est le monoïde [semigroupe] de **transition** de \mathcal{A}^s .
- ▶ **QV** : langages dont le monoïde [semigroupe] stable dans **V**.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale \mathbf{V} , alors l'indice de délai est l'indice de stabilité .

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété locale \mathbf{V} , alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] = \mathbf{QV}$.

→ \mathbf{V} variété de monoïdes ou de semigroupes.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une **variété locale \mathbf{V}** , alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] = \mathbf{QV}$.

→ \mathbf{V} variété de monoïdes ou de semigroupes.

Exemples:

$\mathbf{FO}[\mathcal{L}oc]$, $\mathbf{FO}[\langle]$, $\mathbf{FO}^2[\langle]$, $\mathbf{FO}^2[\langle, \mathcal{L}oc]$

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une **variété locale \mathbf{V}** , alors l'indice de délai est l'indice de stabilité et $\mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] = \mathbf{QV}$.

→ \mathbf{V} variété de monoïdes ou de semigroupes.

Exemples:

$\mathbf{FO}[\mathcal{L}oc]$, $\mathbf{FO}[\langle \rangle]$, $\mathbf{FO}^2[\langle \rangle]$, $\mathbf{FO}^2[\langle \rangle, \mathcal{L}oc]$

Contre-exemple:

- ▶ $\mathcal{B}\Sigma^1[\langle \rangle] = \mathbf{J}$
- ▶ $(bb)^*(aa)^* \in \mathbf{QJ}$
- ▶ $(bb)^*(aa)^* \notin \mathcal{B}\Sigma^1[\langle \rangle, \text{Mod}]$.

Théorèmes partiels de délai

- ▶ rang: structure des équations du **global**.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de **monoïdes \mathbf{V}** de rang k , alors

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_{ks}].$$

Théorèmes partiels de délai

- ▶ **rang**: structure des équations du **global**.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de **monoïdes** \mathbf{V} de rang k , alors

$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_{ks}].$$

- ▶ **rang axiomatique**: nombre de variables des équations.

Théorème (Dartois, P.)

Si $\mathcal{F}[\sigma]$ est équivalent à une variété de **semigroupes** \mathbf{V} de rang axiomatique k et contient le langage $(ab)^*$, alors

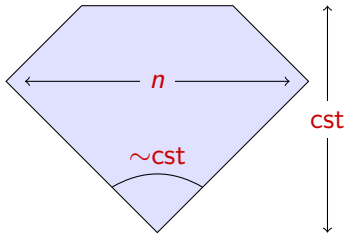
$$L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}] \rightarrow L \in \mathcal{F}[\sigma, \text{Mod}_{(2k+1)s}].$$

Fragment	Description algébrique	Délai
$\text{FO}[\prec, \text{Mod}]$	QA BCST, 92	s
$\text{FO}^2[\prec, \text{Mod}]$	QDA Dartois, P., 13	s
$\text{FO}_k^2[\prec, \text{Mod}]$	$V_k * \text{MOD}$ Dartois, P.	ks
$\text{FO}^2[\prec, \text{Loc}, \text{Mod}]$	QLDA Dartois, P.	s
$\text{FO}_k^2[\prec, \text{Loc}, \text{Mod}]$	$V_k * D * \text{MOD}$ Dartois, P.	$(12k + 1)s$
$B\Sigma_1[\prec, \text{Mod}]$	$J * \text{MOD}$ Chaubard, Pin et Straubing, 06	$s, 2s$
$\text{FO}[\text{Mod}]$	QJ_1 Dartois, P.	s
$\text{FO}[\text{Loc}, \text{Mod}]$	QLJ_1 Dartois, P.	s
$\text{FO}[\text{=}, \text{Mod}]$	$\text{ACom} * \text{MOD}$ Dartois, P.	$2s$
$\text{FO}[\text{=}, \text{Loc}, \text{Mod}]$	$\text{ACom} * D * \text{MOD}$ Dartois, P.	$11s$

Circuits d'arité moyenne bornée

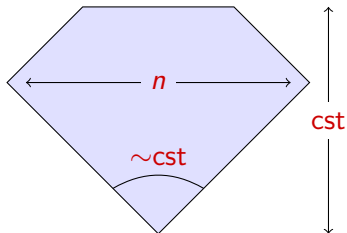
Théorème (Koucký, Pudlák et Thérien, 05)

Un langage régulier à **lettre neutre** est calculable par un circuit de profondeur **constante** et d'arité **moyenne bornée** (**WLAC⁰**) si et seulement s'il appartient à **FO²[<]**.



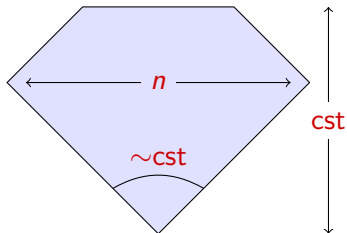
Théorème

Un langage régulier ~~à lettre neutre~~ est calculable par un circuit de profondeur constante et d'arité moyenne bornée (**WLAC⁰**) si et seulement s'il appartient à **FO²[Reg]**.



Théorème

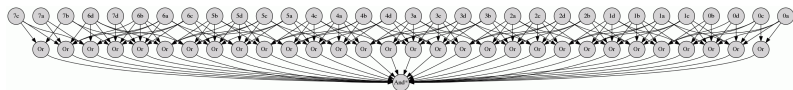
Un langage régulier à lettre neutre est calculable par un circuit de profondeur constante et d'arité moyenne bornée (**WLAC⁰**) si et seulement s'il appartient à **FO²[Reg]**.



→ Conséquence de la caractérisation algébrique de **FO²[Reg]**.

Résultat sur la relation d'addition $(c + ad^*b)^*$

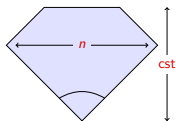
Sur 8 entrées, taille: 63, profondeur: 3.



Conjecture de Straubing et logique à deux variables

$$\text{FO}^2[\text{Arb}] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \text{FO}^2[\text{Reg}]$$

Classe de complexité **LAC⁰**
(Koucký, Lautemann,
Poloczek et Thérien, 06)



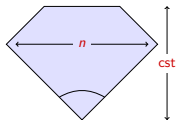
Classe de langages réguliers **QLDA**:

- ▶ semigroupe stable localement **DA**
- ▶ Décidable
- ▶ Effectif

Conjecture de Straubing et logique à deux variables

$$\text{FO}^2[\mathcal{A}rb] \cap \text{REG} \stackrel{?}{=} \text{FO}^2[\mathcal{R}eg]$$

Classe de complexité **LAC⁰**
(Koucký, Lautemann,
Poloczek et Thérien, 06)

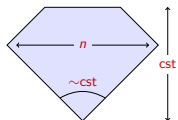
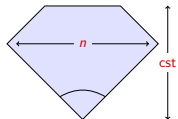
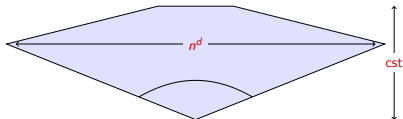
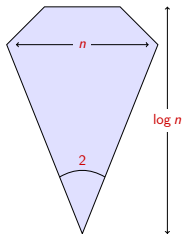


Classe de langages réguliers **QLDA**:

- ▶ **semigroupe stable localement DA**
- ▶ Décidable
- ▶ Effectif

Théorème de dichotomie

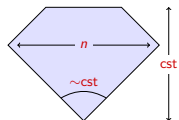
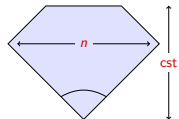
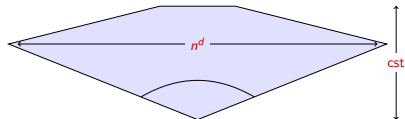
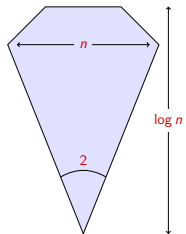
Si la conjecture de Straubing est vraie pour $\text{FO}^2[\mathcal{A}rb]$, alors **tous** les langages réguliers qui ont une complexité de circuits **linéaire** ont également une **arité moyenne bornée**.





Analyse algébrique

$\text{FO}^2[\text{Reg}]?$



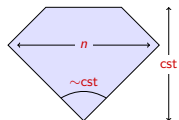
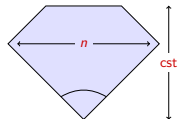
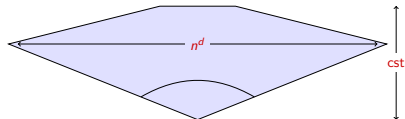
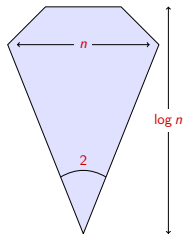


Analyse algébrique

$\text{FO}^2[\text{Reg}]?$

non

oui





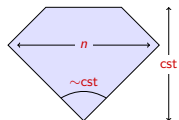
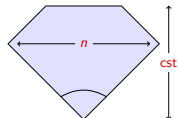
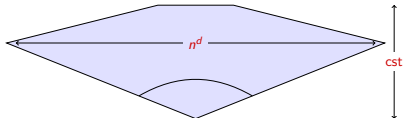
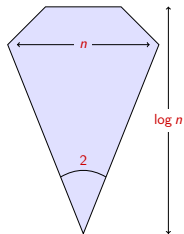
Analyse algébrique

$\text{FO}^2[\mathcal{R}\text{eg}]?$

non

oui

$\text{FO}[\mathcal{R}\text{eg}]?$





Analyse algébrique

$FO^2[\mathcal{R}eg]?$

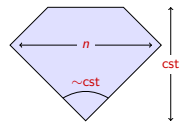
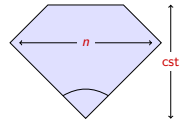
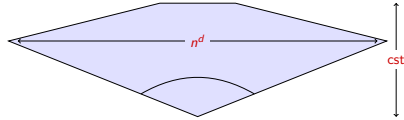
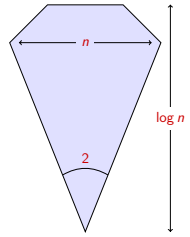
$FO[\mathcal{R}eg]?$

oui

non

non

oui





Analyse algébrique

$FO^2[\mathcal{R}eg]?$

non

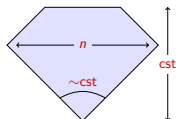
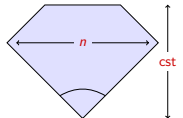
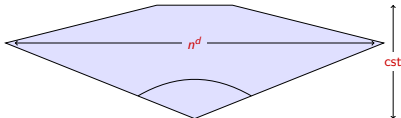
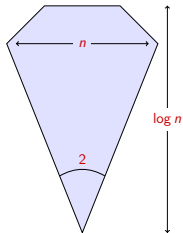
oui


$FO[\mathcal{R}eg]?$

oui

non

?





Un théorème à la Crane-Beach²

²Barrington , Immermann , Lautemann , Schweikardt , Therien, 01

Prédicats de degré fini

Un prédicat uniforme d'arité 2 est de **degré fini** si chaque entier est en relation avec un nombre fini d'entiers.

Notation :

L'ensemble des prédicats de degré fini : \mathcal{Dfin} .

Exemples :

- ▶ Les prédicats de degré borné $kx = y$, $x^k = y$, ...
- ▶ Le prédicat $tBit(x, y)$ tel que le $(y - x)^{\text{ème}}$ bit de x est un 1.

Co-exemples :

- ▶ L'ordre $x < y$.
- ▶ Le prédicat $Bit(x, y)$ tel que le $y^{\text{ème}}$ bit de x est un 1.

Langages à lettre neutre

Un langage L a une lettre neutre e si pour tout mot u, v ,
 $uev \in L \leftrightarrow uv \in L$

Notation :

Langages à lettre neutre: **LeN**

Exemples :

- ▶ Les langages modulaires.
- ▶ Le langage $c^*(ac^*bc^*)^*$.

Notation :

- ▶ L'ensemble des prédicats de degré fini: \mathcal{Dfin}
- ▶ Langages à lettre neutre: **LeN**

Théorème

Pour chaque entier k , $\mathbf{FO}_k^2[<, \mathcal{Dfin}] \cap \mathbf{LeN} \subseteq \mathbf{FO}_k^2[<]$.

Notation :

- ▶ L'ensemble des prédicats de degré fini: \mathcal{Dfin}
- ▶ Langages à lettre neutre: \mathbf{LeN}

Théorème

Pour chaque entier k , $\mathbf{FO}_k^2[<, \mathcal{Dfin}] \cap \mathbf{LeN} \subseteq \mathbf{FO}_k^2[<]$.

Corollaire

$$\mathbf{FO}^2[\mathcal{R}eg, \mathcal{Dfin}] \cap \mathcal{R}eg = \mathbf{FO}^2[\mathcal{R}eg]$$

Perspectives

Algébrique:

- ▶ Étendre le théorème du délai (variétés positives):
→ $\Sigma_k[\mathcal{R}eg]$ et $\mathcal{B}\Sigma_k[\mathcal{R}eg]$?

Complexité:

- ▶ Étendre aux transducteurs, aux automates d'arbres ...
- ▶ Étudier **FO**² avec d'autres classes de prédicats:
→ **FO**²[<, Bit]?

Logique:

- ▶ Étudier la conjecture de substitution faible.