Théorie spectrale

et

Évolution en mécanique quantique

Yann Pequignot

Boris Buffoni
François Genoud

Section de Mathématiques | Projet de semestre | Automne 2008

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Dernière révision, le 8 mai 2014. YP.

« The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work. »

Johann Von Neumann

Introduction

La théorie spectrale est un domaine des mathématiques dont les premiers résultats appartiennent à l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, la théorie spectrale établit notamment l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pour tout endomorphisme symétrique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Lorsque l'on se pose la question d'une généralisation de ce résultat au cas d'un espace de dimension infinie, il devient nécessaire de considérer la topologie induite par le produit scalaire et l'on entre dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Une fois la topologie introduite, une approche naturelle est de s'intéresser, en premier lieu, aux opérateurs linéaires continus. C'est ce que nous faisons au chapitre premier. Toutefois, la physique, en particulier la mécanique quantique, fait intervenir dans ses modèles du monde des opérateurs qui ne sont pas continus et c'est l'objet de la suite de ce travail.

Résumé

Le chapitre premier passe brièvement en revue les notions d'espace de Hilbert, d'opérateur linéaire borné et de projection.

Dans le chapitre deuxième, nous montrons l'existence et l'unicité d'une racine carrée positive pour tout opérateur positif. En nous appuyant sur ce résultat, nous démontrons le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques.

Au chapitre troisième, nous nous affranchissons de la continuité pour aborder les opérateurs linéaires non bornés. Nous exposons les définitions et quelques résultats fondamentaux liés à cette généralisation du concept d'application linéaire.

Le chapitre quatrième commence par l'étude générale de l'intégrale d'une fonction par rapport à une famille spectrale. Nous démontrons ensuite le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints, généralisant le résultat du chapitre deuxième. Dans la dernière section, nous énonçons et prouvons le théorème de Stone qui exprime chaque groupe unitaire fortement continu en fonction d'un opérateur autoadjoint qui lui est associé.

Dans le chapitre cinquième, dans le cadre de la mécanique quantique, nous expliquons brièvement le sens physique de la notion d'opérateur. Nous esquissons ensuite quelques implications physiques du théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints et du théorème de Stone. Nous faisons quelques considérations sur les postulats de base de cette théorie, puis nous discutons le cas d'une particule ponctuelle dans l'espace réel unidimensionnel.

Table des matières

I. Notions préliminaires

Nous définissons brièvement dans ce chapitre les notions de base liées aux espaces de Hilbert. Nous exposons notamment les résultats élémentaires sur les opérateurs linéaires bornés et quelques propriétés des projections orthogonales.

I.1. Espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'une distance qui en fait un espace métrique complet dont la distance possède la propriété fondamentale de s'exprimer à l'aide d'une forme bilinéaire, le produit scalaire.

Un espace vectoriel complexe V muni d'une **norme** $\|\cdot\|$, c'est-à-dire une fonction $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés

i) pour tout $v \in V$, $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$.

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $v \in V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$.

iii) pour tous $v, w \in V$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

est appelé un **espace vectoriel normé**. La **distance engendrée** par la norme est définie par la formule

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in V.$$

Si, pour cette distance, toute suite de Cauchy est convergente, nous disons que l'espace vectoriel normé est complet et nous parlons alors d'**espace de Banach**.

Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel complexe X muni d'une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ appelée **produit scalaire** vérifiant :

i) pour tout $x \in X$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;

ii) pour tous $x, y, z \in X$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

iii) pour tous $x, y \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

iv) pour tous $x, y \in X$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

La norme engendrée par le produit scalaire est donnée par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in X$. Un espace préhilbertien qui est complet pour la distance engendrée par cette norme est appelé un **espace de Hilbert**.

Dans ce travail, nous faisons systématiquement cette hypothèse de complétude sauf indication du contraire. Dans la suite, la lettre $\mathcal{H}$ désigne toujours un espace de Hilbert sur le corps des nombres complexes.

Exemple I.1.1 (L'espace de Hilbert $L_2[0,1]$)**.** Considérons l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que

$$\int_{[0,1]} f^2(s)ds < \infty,$$

pour la mesure de Lebesgue. Définisissons sur cette ensemble la relation d'équivalence suivante

$$f \sim g \quad \text{si} \quad f = g \text{ presque partout},$$

i.e. s'il existe $N \subseteq [0,1]$ mesurable au sens de Lebesgue avec mesure nulle et tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1] \backslash N$. Notons $L_2[0,1]$ l'ensemble des classes d'équivalence. C'est un espace de Hilbert pour les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda f(x);\\ (f+g)(x) &= f(x) + g(x);\\ \langle f, g\rangle &= \int_{[0,1]} f(s)g(s)ds.\end{aligned}$$

Le produit cartésien $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ admet une structure naturelle d'espace de Hilbert donnée par les opérations :

$$\begin{aligned}\lambda(x_1, y_1) &= (\lambda x_1, \lambda y_1);\\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2);\\ \big\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\big\rangle &= \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle\,;\end{aligned}$$

pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. La topologie métrique associée au produit scalaire ainsi défini sur $\boldsymbol{H}$ coïncide avec la topologie produit. Dans la suite, nous désignons par $\boldsymbol{H}$ cet espace de Hilbert.

I.2. Opérateurs linéaires

Les opérateurs linéaires sont les fonctions entre espaces de Hilbert qui respectent la structure vectorielle. Dans ce travail, nous nous intéressons pour commencer aux opérateurs linéaires bornés qui respectent de plus la structure métrique, dans le sens où ils sont continus.

Un **opérateur (linéaire)** d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vers un espace de Hilbert $\mathcal{H}'$ est une fonction $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ telle que :

i) pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $T(x+y) = T(x) + T(y)$;

ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Nous notons Tx l'image $T(x)$ d'un élément $x \in \mathcal{H}$. L'**image** de T est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}'$

$$\operatorname{Im}(T) = \{Tx \mid x \in \mathcal{H}\},$$

et le **noyau** de T est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$

$$\ker(T) = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = 0\}.$$

S'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|Tx\| \leq C\,\|x\| \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H},$$

nous disons que T est **borné**. L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}'$ est un espace de Banach pour les opérations :

$$\begin{aligned} (B+C)x &= Bx + Cx \quad && \text{pour tous } B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \text{ et pour tout } x \in \mathcal{H}, \\ (\lambda B)x &= \lambda Bx && \text{pour tout } B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'),\ \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C},\ \text{et pour tout } x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

et la norme :

$$\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}').$$

Le cas particulier qui est principalement l'objet de ce travail est celui où $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$. Nous notons dans ce cas $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ à la place de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ les opérateurs linéaires et bornés sur $\mathcal{H}$. Nous avons la même définition de l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ dans le cas où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des espaces de Banach. Les opérateurs bornés d'un espace de Banach vers un autre sont exactement les opérateurs linéaires qui sont continus par rapport aux distances engendrées de chacun des espaces.

Le **graphe** d'un opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est défini comme le sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{G}_T = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{H}\}.$$

Un opérateur linéaire $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est borné si et seulement si son graphe est un sous-ensemble fermé de $\boldsymbol{H}$.

Nous rappelons sans démonstration le théorème suivant.

Théorème I.2.1 (Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus)**.** *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés sur $\mathcal{B}$. Si pour tout $x \in \mathcal{B}$*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n x\| < \infty,$$

alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\| < \infty.$$

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. S'il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|B_n - B\| = 0$, nous disons que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge (en norme)** vers B. Si pour tout $x \in \mathcal{H}$ la limite $\lim_{n\to\infty} B_n x$ existe, nous disons que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **fortement convergente**. La fonction $x \mapsto \lim_{n\to\infty} B_n x$ est une application linéaire. Sur un espace de Hilbert, nous avons de plus le résultat suivant.

Corollaire I.2.2. *Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement, l'opérateur $x \mapsto \lim_{n\to\infty} B_n x$ est borné.*

Démonstration. Notons $Bx = \lim_{n\to\infty} B_n x$ l'application linéaire limite. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la continuité de la norme implique que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n x\| = \|Bx\| \quad \text{existe.}$$

Par conséquent, la suite $(\|B_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in \mathcal{H}$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $(\|B_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée par une constante $C \geq 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$\|Bx\| = \lim_{n\to\infty} \|B_n x\| \leq C \|x\|,$$

et donc B est borné. □

Une **fonctionnelle linéaire (continue)** sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un élément de l'**espace dual** de $\mathcal{H}$, à savoir $\mathcal{H}^* = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. Les fonctionnelles linéaires sur un espace de Hilbert sont caractérisées par le théorème suivant dont la démonstration peut notamment être lue dans [Kolmogorov, 1980] à la page 188.

Théorème I.2.3 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour tout $x_0 \in \mathcal{H}$, la formule :*

$$f(x) = \langle x, x_0\rangle \ \text{pour tout } x \in \mathcal{H}, \tag{I.1}$$

définit une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{H}$, avec $\|f\| = \|x_0\|$. Réciproquement, pour toute fonctionnelle linéaire f sur $\mathcal{H}$, il existe un unique x_0 satisfaisant (I.1)*.*

I.3. Projections orthogonales

Deux éléments $x, y \in \mathcal{H}$ sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$. Soit $M \subseteq \mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$. On dit qu'un élément $x \in \mathcal{H}$ est orthogonal à M si x est orthogonal à chaque élément de M. Un sous-ensemble $N \subseteq \mathcal{H}$ est orthogonal à M si chaque élément de N est orthogonal à M. On appelle le **complément orthogonal** de M l'ensemble $M^\perp$ de tous les éléments de $\mathcal{H}$ qui sont orthogonaux à M.

Le théorème suivant permet de définir la notion très importante de projection orthogonale. La démonstration peut être lue dans [Weidmann, 1980] à la page 31.

Théorème I.3.1. *Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $y \in M$ et un unique $z \in M^\perp$ tels que $x = y + z$.*

Si M est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, la **projection orthogonale** ou simplement **projection** sur M est l'opérateur borné définit par $Px = y$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ où $x = y + z$ est l'unique façon d'écrire x avec $y \in M$ et $z \in M^\perp$. Toute projection P vérifie $P^2 = P$ et si $P \neq 0$, alors $\|P\| = 1$. Nous rappelons également les résultats suivants.

Théorème I.3.2. *Soient M et N des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Notons P et Q les projections associées, alors :*

a) pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ *;*

b) $M = \operatorname{Im} P$ *et* $M^\perp = \ker P$ *;*

c) $I - P$ *est la projection sur* $M^\perp$ *;*

d) $M \subseteq N$ *si et seulement si* $PQ = QP = P$ *;*

e) pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle Px, x \rangle \leq \langle Qx, x \rangle$ *si et seulement si* $M \subseteq N$.

II. Opérateurs symétriques et bornés

En suivant (Friedman, 1982), nous démontrons dans ce chapitre le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques sur un espace de Hilbert. Les premières sections introduisent les notions ainsi que les résultats nécessaires pour l'énonciation et la démonstration de ce théorème.

II.1. Opérateurs symétriques

Les opérateurs symétriques sont des opérateurs bornés qui ont un comportement particulier par rapport au produit scalaire.

Définition II.1.1. Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'**adjoint** de T est l'opérateur noté T^* défini par la relation :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{II.1}$$

pour tous $x, y \in \mathcal{H}$. Si $T = T^*$, nous disons que T est **symétrique**.

Noter que la définition de l'adjoint d'un opérateur borné par l'équation (II.1) est légitimée par le Théorème I.2.3.

Dans ce chapitre, un opérateur symétrique signifie un opérateur borné et symétrique sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Observons que, si T est un opérateur symétrique, alors $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. En effet,

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \overline{\langle T^*x, x\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

Le point a) du Théorème I.3.2 nous dit que toute projection est symétrique. Réciproquement, il est possible de montrer que si un opérateur borné A est symétrique et vérifie $A^2 = A$, alors A est une projection ([Friedman, 1982], p. 210). Nous rappelons également le théorème suivant au sujet des opérateurs symétriques dont la preuve peut être lue dans ([Friedman, 1982], p. 218). L'hypothèse de complétude sur $\mathcal{H}$ n'est toutefois pas nécessaire.

Théorème II.1.2. *Soit S un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors,*

$$\|S\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Sx, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Sx, x\rangle|.$$

Définition II.1.3. Soit S un opérateur symétrique. La **borne inférieure** de S est, par définition, le réel :

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Sx, x \rangle .$$

La **borne supérieure** de S est définie comme le réel :

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle Sx, x \rangle .$$

Remarquons que par le Théorème II.1.2, $\|S\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Au sujet des opérateurs symétriques, nous remarquons également les faits suivants.

Remarque II.1.4. Si S est un opérateur symétrique, alors tout polynôme en S à coefficients réels est également symétrique. Cela découle principalement de la linéarité du produit scalaire. En effet, si $P = \sum_{i=1}^{n} a_i S^i$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors pour tous $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle Px, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i S^i x, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle S^i x, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x, S^i y \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} a_i S^i y \right\rangle = \langle x, Py \rangle .$$

Remarque II.1.5. Soient S un opérateur symétrique et B un opérateur borné. Si $SB = BS$, alors $SB^* = B^*S$. En effet pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \|B^*Sx - SB^*x\|^2 &= \langle B^*Sx, B^*Sx \rangle + \langle SB^*, SB^*x \rangle - \langle B^*Sx, SB^*x \rangle - \langle SB^*x, B^*Sx \rangle \\ &= \langle SBB^*Sx, x \rangle + \left\langle S^2BB^*x, x \right\rangle - \langle SBB^*Sx, x \rangle - \left\langle S^2BB^*x, x \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

II.2. Opérateurs positifs

Les opérateurs positifs sont des opérateurs symétriques avec la particularité que le produit scalaire d'une image avec son antécédent est toujours positif.

Dans cette section, nous suivons [Friedman, 1982]. Un opérateur symétrique S est dit **positif** si

$$\langle Sx, x \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Nous écrivons dans ce cas $S \geq 0$. Un **opérateur positif** est un opérateur symétrique positif. Soient S et U deux opérateurs symétriques. Si $S - U \geq 0$, nous disons que S est **plus grand** que U ou que U est **plus petit** que S. Nous écrivons alors $S \geq U$ ou $U \leq S$. C'est un ordre partiel sur les opérateurs symétriques. La réflexivité et la transitivité sont des propriétés évidentes de cette relation, tandis que l'antisymétrie découle du fait que si $U \leq S$ et $U \leq S$, alors $\langle (U - S)x, x \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ et donc par le Théorème II.1.2 $\|U - S\| = 0$, c'est-à-dire $U = S$.

Remarquer que le Théorème I.3.2 nous dit que si P et Q sont deux projections, alors $P \leq Q$ si et seulement si $\operatorname{Im} P \subseteq \operatorname{Im} Q$ si et seulement si $PQ = QP = P$.

Lemme II.2.1. *Soit P un opérateur positif. Il existe une suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ d'opérateurs qui sont polynomiaux en P avec coefficients réels, telle que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} P_k^2\right)_{n=1}^{\infty}$ des sommes partielles est fortement convergente vers P, i.e. pour tout $x \in \mathcal{H}$,*

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 x.$$

Démonstration. Si $P = 0$, l'énoncé est trivial. Supposons donc que $P \neq 0$ et définissons par induction la suite d'opérateurs suivante :

$$B_1 = \frac{1}{\|P\|} P, \quad B_{n+1} = B_n - B_n^2 \quad n = 2, 3, \ldots$$

Chaque B_n est un polynôme en P avec coefficients réels et donc la Remarque II.1.4 nous assure que chaque B_n est symétrique. De plus, pour tous $m, n \geq 1$, $B_m B_n = B_n B_m$ et en particulier $PB_n = B_n P$ pour tout $n \in N$. Nous montrons à présent par induction que :

$$0 \leq B_n \leq I \quad \text{pour tout } n \geq 1. \tag{II.2}$$

Si $n = 1$, il découle directement de la positivité de P que pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle B_1 x, x \rangle = \frac{1}{\|P\|} \langle Px, x \rangle \geq 0,$$

et donc $B_1 \geq 0$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle (I - B_1)x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle B_1 x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{1}{\|P\|} \langle Px, x \rangle \geq 0,$$

car $\langle Px, x \rangle \leq \|P\| \cdot \|x\|^2$ par le Théorème II.1.2. Supposons alors que (II.2) est vraie pour un certain $m \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $m + 1$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, comme $B_m \geq 0$, nous avons d'une part :

$$\left\langle B_m (I - B_m)^2 x, x \right\rangle = \langle B_m (I - B_m)x, (I - B_m)x \rangle \geq 0,$$

et d'autre part, comme $B_m \leq I$,

$$\left\langle B_m^2 (I - B_m)x, x \right\rangle = \langle (I - B_m) B_m x, B_m x \rangle \geq 0.$$

Ainsi, $B_m (I - B_m)^2 \geq 0$ et $B_m^2 (I - B_m) \geq 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= B_m - B_m^2 \\ &= B_m (I - B_m)^2 + B_m^2 (I - B_m) \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, puisque $B_m \leq I$, nous avons bien :

$$I - B_{m+1} = (I - B_m) + B_m^2 \geq 0.$$

Ceci termine la preuve par induction de (II.2).

À présent, observons que nous avons l'identité :

$$\sum_{k=1}^{n} B_k^2 = B_1 - B_{n+1} \quad \text{pour tout } n \geq 1. \tag{II.3}$$

Ainsi, comme $B_1 - (B_1 - B_{n+1}) = B_{n+1} \geq 0$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} B_k^2 \leq B_1 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \langle B_k x, B_k x \rangle \leq \langle B_1 x, x \rangle \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{\infty} \|B_n x\|^2 < \infty$ et donc que $\lim_{n\to\infty} \|B_n x\| = 0$. Ainsi par (II.3),

$$\lim_{n\to\infty} \left\| B_1 x - \sum_{k=1}^{n} B_k^2 x \right\| = \lim_{n\to\infty} \|B_{n+1} x\| = 0.$$

En posant alors $P_n = \sqrt{\|P\|} B_n$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ vérifie l'énoncé. □

Corollaire II.2.2. *Soient P et Q des opérateurs positifs. Si $PQ = QP$, alors l'opérateur PQ est positif.*

Démonstration. Considérons la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ que nous fournit le Lemme II.2.1 pour l'opérateur positif P. Comme chaque P_n est un polynôme en P, nous avons $P_n Q = QP_n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi pour tout $x \in \mathcal{H}$, par la continuité du produit scalaire,

$$\langle PQx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle P_n^2 Q x, x \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n Q P_n x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Q P_n x, P_n x \rangle \geq 0,$$

du fait de la positivité de Q. □

Corollaire II.2.3. *Soient $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'opérateurs symétriques et U un opérateur symétrique tels que :*

- *i) si $1 \leq m \leq n$, alors $S_m \leq S_n$;*
- *ii) pour tout $m, n \geq 1$, $S_m S_n = S_n S_m$;*
- *iii) pour tout $n \geq 1$, $US_n = S_n U$;*
- *iv) pour tout $n \geq 1$, $S_n \leq U$.*

Il existe un opérateur symétrique S tel que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge fortement vers S.

Démonstration. Considérons les opérateurs $P_n = U - S_n$. Chaque P_n est positif par la condition *iv)* et la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ est décroissante par *i)*, car si $1 \leq m \leq n$, alors $P_m - P_n = S_n - S_m \geq 0$. De plus, par *ii)* et *iii)*, $P_n P_m = P_m P_n$ pour tous $m, n \geq 1$. Ainsi, le Corollaire II.2.2 nous assure que si $1 \leq m < n$, alors

$$(P_m - P_n)P_m \geq 0 \quad \text{et} \quad (P_m - P_n)P_n \geq 0.$$

Nous en déduisons que :

$$\left\langle P_m^2 x, x \right\rangle \geq \left\langle P_m P_n x, x \right\rangle \geq \left\langle P_n^2 x, x \right\rangle \geq 0 \quad \text{pour tous } 1 \leq m < n \text{ et pour tout } x \in \mathcal{H}. \tag{II.4}$$

Par conséquent, $\left(\left\langle P_n^2 x, x \right\rangle\right)_{n=1}^{\infty}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs. Elle admet donc une limite $\alpha \in \mathbb{R}$. Or par (II.4), nous avons pour $1 \leq m < n$:

$$0 \leq \left\langle P_m P_n x, x \right\rangle - \alpha \leq \left\langle P_m^2 x, x \right\rangle - \alpha \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Ainsi, en laissant m et n tendrent vers l'infini dans ces dernières inégalités, nous obtenons que

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\langle P_m P_n x, x \right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\langle P_m^2 x, x \right\rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Ainsi, pour $m, n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|S_n x - S_m x\|^2 &= \|P_m x - P_n x\|^2 \\ &= \left\langle (P_m - P_n)^2 x, x \right\rangle \\ &= \left\langle P_m^2 x, x \right\rangle + \left\langle P_n^2 x, x \right\rangle - 2 \left\langle P_m P_n x, x \right\rangle \xrightarrow{m,n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{H}$ la suite $(S_n x)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Elle admet donc une limite $Sx \in \mathcal{H}$. L'opérateur S ainsi défini est borné par le Corollaire I.2.2. En outre, S est symétrique car, par continuité du produit scalaire, nous avons pour tous $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\left\langle Sx, y \right\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} S_n x, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle S_n x, y \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle x, S_n y \right\rangle = \left\langle x, \lim_{n\to\infty} S_n y \right\rangle = \left\langle x, Sy \right\rangle.$$

□

Nous faisons la définition suivante.

Définition II.2.4. Soit P un opérateur positif. Une **racine carrée** de P est un opérateur symétrique R satisfaisant $R^2 = P$.

Le théorème suivant nous assure l'existence d'une unique racine carrée positive pour tout opérateur positif.

Théorème II.2.5. *Soit P un opérateur positif. Il existe une unique racine carrée positive R de l'opérateur P. En outre, R commute avec tout opérateur borné qui commute avec P.*

Démonstration.

Existence. Il suffit de montrer que tout opérateur positif P tel que $P \leq I$ possède une racine carrée positive. En effet, si P est un opérateur positif quelconque, considérons l'opérateur $\widetilde{P} = \varepsilon^2 P$, où $\varepsilon > 0$ est tel que $\varepsilon^2 \|P\| < 1$. Par le Théorème II.1.2, nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\left\langle (I - \widetilde{P})x, x \right\rangle = \langle x, x \rangle - \varepsilon^2 \langle Px, x \rangle \geq \langle x, x \rangle - \varepsilon^2 \|P\| \|x\| \geq 0.$$

Ainsi, $\widetilde{P} \leq I$. Il s'ensuit que si $\widetilde{P}$ admet une racine carrée positive $\widetilde{R}$, alors l'opérateur $R = \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{R}$ est une racine carrée positive de P.

Supposons donc que $P \leq I$ et définissons par induction la suite d'opérateurs suivante :

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_{n+1} &= R_n + \frac{1}{2}(P - R_n^2) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{II.5}$$

Chaque R_n est un polynôme en P à coefficients réels. De ce fait, chaque R_n est symétrique et commute avec tout opérateur borné qui commute avec P. De l'identité

$$I - R_{n+1} = \frac{1}{2}(I - R_n)^2 + \frac{1}{2}(I - P), \tag{II.6}$$

nous déduisons que $R_n \leq I$ pour tout $n \geq 0$. De la relation (II.6) pour $n+1$ et n, nous obtenons par soustraction et réarrangement :

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \frac{1}{2}(I - R_{n-1})^2 - \frac{1}{2}(I - R_n)^2 \\ &= \frac{1}{2}(R_{n-1}^2 - 2R_{n-1} + 2R_n - R_n^2) \\ &= \frac{1}{2}[(I - R_{n-1}) + (I - R_n)](R_n - R_{n-1}). \end{aligned}$$

Cette dernière identité permet à l'aide du Corollaire II.2.2 de montrer par induction que $R_{n+1} \geq R_n$ pour tout $n \geq 0$. En particulier puisque $R_0 = 0$, chaque R_n est positif. Nous pouvons alors appliquer le Corollaire II.2.3 à la suite $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ bornée par l'identité. Il existe donc un opérateur symétrique R tel que $\lim_{n\to\infty} R_n x = Rx$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. En outre par le Théorème I.2.1 de la borne uniforme, il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|R_n\| \leq C$ pour tout $n \geq 1$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \left\|R_n^2 x - R^2 x\right\| &= \left\|R_n^2 x - R_n R x + R_n R x - R^2 x\right\| \\ &\leq C \|R_n x - Rx\| + \|R_n(Rx) - R(Rx)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Et donc nous avons $\lim_{n\to\infty} R_n^2 x = R^2 x$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Par conséquent, en laissant n tendre vers l'infini dans (II.5), nous obtenons :

$$Rx = Rx + \frac{1}{2}(P - R^2)x \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

C'est-à-dire, $R^2 = P$. Comme chaque R_n est positif, il en va de même de R par continuité du produit scalaire. De plus, comme chaque R_n commute avec tout opérateur borné qui commute avec P, cela est aussi vrai pour leur limite R.

Unicité. Supposons que S est également une racine carrée positive de P. Puisque $P = S^2$, S commute avec P et par conséquent avec R. Soit $x \in \mathcal{H}$ quelconque et posons $y = (R - S)x$. Alors,

$$\langle Ry, y\rangle + \langle Sy, y\rangle = \langle (R+S)(R-S)x, y\rangle = \big\langle (R^2 - S^2)x, y\big\rangle = 0.$$

Puisque $\langle Ry, y\rangle \geq 0$ et $\langle Sy, y\rangle \geq 0$, nécessairement $\langle Ry, y\rangle = \langle Sy, y\rangle = 0$. Considérons alors une racine carrée positive T de l'opérateur positif R. Par la symétrie de T, nous avons

$$\|Ty\|^2 = \big\langle T^2 y, y\big\rangle = \langle Ry, y\rangle = 0.$$

Par conséquent, $Ty = 0$. Nous en concluons que $Ry = T(Ty) = 0$. Par le même argument, nous obtenons $Sy = 0$. Finalement, nous avons :

$$\|Rx - Sx\|^2 = \big\langle (R-S)^2 x, x\big\rangle = \langle (R-S)y, x\rangle = 0,$$

c'est-à-dire $Rx = Sx$. Puisque x est arbitraire, nous en concluons que $R = S$. □

Lemme II.2.6. *Soient S et T deux opérateurs symétriques tels que $ST = TS$ et $S^2 = T^2$. Nous notons P le projecteur sur le noyau L de l'opérateur $S - T$.*

a) Tout opérateur borné qui commute avec $S - T$ commute avec P ;

b) Si $Sx = 0$, alors $Px = x$;

c) $P(S+T) = S+T$ et $P(S-T) = 0$.

Démonstration.

a). Soit B un opérateur borné qui commute avec $S-T$. Remarquons que si $y \in L$, alors $By \in L$, puisque $(S-T)By = B(S-T)y = 0$. Par conséquent, $BPx \in L$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Ainsi, $PBPx = BPx$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, en d'autres termes $PBP = BP$. Par la Remarque II.1.5, l'adjoint B^* commute également avec $S - T$. Nous avons donc aussi $B^*P = PB^*P$. Nous obtenons alors :

$$PB = (B^*P)^* = (PB^*P)^* = PBP = BP.$$

b). Supposons que $Sx = 0$ pour $x \in \mathcal{H}$. Alors,

$$\|Tx\|^2 = \big\langle T^2 x, x\big\rangle = \big\langle S^2 x, x\big\rangle = \|Sx\|^2 = 0.$$

Donc $Tx = 0$. Par conséquent, $(S-T)x = 0$ également et $x \in L$. Il s'ensuit que $Px = x$.

c). Observer que comme S et T commutent, nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$(S-T)(S+T)x = (S^2 - T^2)x = 0.$$

De ce fait, $(S+T)x \in L$. Il s'ensuit que $P(S+T) = S+T$. D'autre part, l'image de $S-T$ est orthogonale à son noyau. En effet, si $y = (S-T)x$ pour $x \in \mathcal{H}$ et si $z \in L$, alors :

$$\langle y, z\rangle = \langle (S-T)x, z\rangle = \langle x, (S-T)z\rangle = 0.$$

Par conséquent, $P(S-T) = 0$. □

Le lemme suivant est d'une importance fondamentale pour la théorie spectrale exposée dans la section suivante. Sa démonstration utilise les résultats développés jusqu'ici dans ce but. Si S est un opérateur symétrique, nous notons $|S|$ l'unique racine carrée positive de S^2. Nous avons notamment $|S|\,S = S\,|S|$ et $|S| \geq 0$ pour tout opérateur symétrique S.

Lemme II.2.7. *Soit S un opérateur symétrique. La projection sur le noyau de $S - |S|$, notée E_+, a les propriétés suivantes.*

a) Tout opérateur borné qui commute avec S commute avec E_+ ;

b) $SE_+ \geq 0$ et $S(I - E_+) \leq 0$;

c) Si $Sx = 0$, alors $E_+x = x$.

Démonstration.

a). Soit C un opérateur qui commute avec S. Puisque $CS^2 = SCS = S^2C$, C commute également avec S^2. Par le Théorème II.2.5, C commute donc avec $|S|$. Il commute donc avec $S - |S|$ et, par le Lemme II.2.6, C commute finalement avec E_+. Ainsi, E_+ satisfait *a)*.

b). Puisque E_+ est la projection orthogonale sur le noyau de $S - |S|$, nous avons :

$$SE_+ = |S|\,E_+. \tag{II.7}$$

D'autre part, le Lemme II.2.6 nous dit aussi que $S = (2E_+ - I)\,|S|$ et donc

$$S(I - E_+) = -(I - E_+)\,|S|\,. \tag{II.8}$$

Or, $|S|$ commute avec E_+ par le Lemme II.2.6 et E_+ et $I - E_+$ sont positifs en tant que projections (Théorème I.3.2). Ainsi par le Corollaire II.2.2, il découle alors de (II.7) et de (II.8) que $SE_+ \geq 0$ et $S(I - E_+) \leq 0$.

c). Cette assertion découle directement du point *b)* du Lemme II.2.6. □

Le lemme précédent peut être visualisé avantageusement à l'aide de la définition suivante.

Définition II.2.8. Soient S un opérateur symétrique et E_+ la projection sur $S - |S|$. L'opérateur $S_+ = SE_+$ est appelé la **partie positive** de S tandis que l'opérateur $S_- = S(I - E_+)$ est appelé la **partie négative** de S.

Puisque tant S que $|S|$ commutent avec $S - |S|$, le Lemme II.2.6 *a*) nous assure qu'ils commutent tous deux avec E_+. Ainsi, il découle de (II.7) que

$$E_+S = SE_+ = |S|\,E_+ = E_+\,|S|\,.$$

En utilisant alors (II.8), on trouve que :

$$S_+ = \tfrac{1}{2}(S + |S|) \quad \text{et} \quad S_- = S - S_+ = \tfrac{1}{2}(S - |S|).$$

II.3. Théorème spectral pour les opérateurs symétriques

Nous introduisons dans cette section la notion de famille spectrale. Nous définissons une intégrale qui est une somme continue d'opérateurs. Nous énonçons et démontrons le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques.

Définition II.3.1. Une **famille spectrale** sur $\mathcal{H}$ est une fonction $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que nous notons $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes.

i) E_λ est une projection pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

ii) Si $\lambda < \mu$, alors $E_\lambda \leq E_\mu$;

iii) La famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est **fortement continue à gauche**, i.e. pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{\lambda\nearrow\mu} E_\lambda x = E_\mu;$$

iv) Il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $E_\lambda = 0$ pour tout $\lambda < m$ et $E_\lambda = I$ pour tout $\lambda > M$.

Si pour une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, deux réels $m, M \in \mathbb{R}$ satisfont la propriété iii), nous disons que m et M sont des bornes pour $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

Nous considèrons une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ assortie de deux bornes $m, M \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue à valeurs complexes définie sur le compact $[m, M]$. Nous pouvons étendre f continûment à l'ensemble $[m, M + 1]$. Nous notons cette extension également f. Fixons $0 < \varepsilon < 1$ et considérons une partition Π de $[m, M+\varepsilon]$ quelconque, i.e. une suite finie de réels $(\lambda_k)_{k=0}^n$ telle que :

$$m = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M + \varepsilon.$$

Appelons sa **taille** le nombre $|\Pi|$ défini par

$$|\Pi| = \max_{k=1,\ldots,n} \lambda_k - \lambda_{k-1}.$$

Choisissons alors des réels $\mu_1, \ldots, \mu_k$ de sorte que :

$$\mu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k] \quad \text{pour chaque } k = 1, \cdots, n,$$

et formons la somme suivante :

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}).$$

Le lemme suivant nous assure que lorsque l'on considère des partitions dont la taille tend vers zéro, la somme S_Π converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vers un opérateur borné.

Lemme II.3.2. *Soient $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale assortie de deux bornes $m, M \in \mathbb{R}$ et $f : [m, M] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $f : [m, M+\varepsilon] \to \mathbb{C}$ une extension continue de f. Il existe un opérateur borné S ayant la propriété que pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition Π de $[m, M+\varepsilon]$ satisfaisant $|\Pi| < \delta$ nous avons :*

$$\|S_\Pi - S\| < \eta.$$

En outre, l'opérateur S est indépendant :

a) de l'extension continue de f choisie ;

b) du choix de ε ;

c) du choix des μ_k.

Démonstration. Fixons $\eta > 0$ arbitraire. Puisque f est continue sur le compact $[m, M+\varepsilon]$, elle est uniformément continue. Ainsi il existe $\delta_\eta > 0$ tel que :

$$\text{pour tout } \lambda, \lambda' \in [m, M+\varepsilon],\ \left|\lambda - \lambda'\right| < \delta_\eta \text{ implique } \left|f(\lambda) - f(\lambda')\right| < \frac{1}{2}\eta. \quad \text{(II.9)}$$

Partie 1. Montrons, pour commencer, l'assertion suivante.

Pour toutes partitions Π et Π' de $[m, M+\varepsilon]$,

$$|\Pi|, |\Pi'| < \delta_\eta \text{ implique } \|S_\Pi - S_{\Pi'}\| \le \eta, \quad \text{(II.10)}$$

ceci indépendamment des points μ_k choisis pour former les sommes d'opérateurs S_Π et $S_{\Pi'}$.

Notons $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n$ et fixons arbitrairement $\mu_1, \ldots, \mu_n$ avec $\mu_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Pour $\Pi' = (\lambda'_k)_{k=0}^{n'}$, nous formons alors la partition $\overline{\Pi} = (\bar\lambda_j)_{j=0}^{\bar n}$ constituée des points appartenant à la réunion des points de Π et Π'. Notons également $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_j < k_n = \bar n$ la sous-suite des indices vérifiant $\bar\lambda_{k_i} = \lambda_i$ pour $i = 0, \ldots, n$.

Fixons ensuite arbitrairement des réels :

$$\bar\mu_i \in [\bar\lambda_{i-1}, \bar\lambda_i] \quad i = 1, \cdots, k_n.$$

La somme associée à $\overline{\Pi}$ et aux μ_j est donnée par :

$$S_{\overline{\Pi}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\bar\mu_j)(E_{\bar\lambda_j} - E_{\bar\lambda_{j-1}}).$$

Et puisque pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} E_{\bar\lambda_j} - E_{\bar\lambda_{j-1}} = E_{\bar\lambda_{k_i}} - E_{\bar\lambda_{k_{i-1}}} = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}},$$

nous pouvons écrire S_Π comme :

$$S_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\mu_i)(E_{\bar{\lambda}_j} - E_{\bar{\lambda}_{j-1}}).$$

À présent, du fait que $|\Pi| < \delta_\eta$, il découle de (II.9) que, pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = k_{i-1}+1, \ldots, k_i$, l'inégalité

$$|\mu_i - \bar{\mu}_j| < \lambda_{k_i} - \lambda_{k_{i-1}} < \delta_\eta$$

implique que

$$|f(\mu_i) - f(\bar{\mu}_j)| < \frac{1}{2}\eta.$$

Comme de plus $E_m = 0$ et $E_{M+\varepsilon} = I$, nous avons, pour tout $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle (S_\Pi - S_{\overline{\Pi}})x, x\right\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} [f(\mu_i) - f(\bar{\mu}_j)] \left\langle (E_{\bar{\lambda}_j} - E_{\bar{\lambda}_{j-1}})x, x\right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\mu_i) - f(\bar{\mu}_j)| \left\langle (E_{\bar{\lambda}_j} - E_{\bar{\lambda}_{j-1}})x, x\right\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\eta \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (E_{\bar{\lambda}_j} - E_{\bar{\lambda}_{j-1}})x, x\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\eta \left\langle (E_{M+\varepsilon} - E_m)x, x\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\eta \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}\eta.
\end{aligned}$$

Par le Théorème II.1.2, il s'ensuit que $\left\|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right\| \leq \frac{1}{2}\eta$. De la même façon, nous obtenons que $\left\|S_{\Pi'} - S_{\overline{\Pi}}\right\| \leq \frac{1}{2}\eta$. Comme annoncé, nous avons par l'inégalité triangulaire que :

$$\|S_\Pi - S_{\Pi'}\| \leq \left\|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right\| + \left\|S_{\overline{\Pi}} - S_{\Pi'}\right\| \leq \eta.$$

Partie 2. Considérons maintenant une suite $(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ de partitions de $[m, M+\varepsilon]$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. La suite d'opérateurs $(S_{\Pi_n})_{n=1}^\infty$ est alors de Cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En effet, il existe $N \geq 1$ tel que $|\Pi_n| < \delta_\eta$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, par (II.10), pour tout $n, n' \geq N$, nous avons $\left\|S_{\Pi_n} - S_{\Pi_{n'}}\right\| \leq \eta$. Puisque $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est complet, la suite $(S_{\Pi_n})_{n=1}^\infty$ admet une limite $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pour cette limite, il existe $N_\eta \geq 1$ de sorte que $\left\|S_{\Pi_{N_\eta}} - S\right\| < \frac{1}{2}\eta$. Finalement, par (II.10), pour toute partition Π de taille inférieur à $\delta_{\frac{1}{2}\eta}$ nous avons :

$$\|S_\Pi - S\| \leq \left\|S_\Pi - S_{\Pi_{N_\eta}}\right\| + \left\|S_{\Pi_{N_\eta}} - S\right\| < \eta.$$

La limite S ne dépend pas de l'extension continue de f ni de ε, car $E_\lambda - E_\mu = 0$ pour tous $M < \lambda < \mu$. $\square$

Le lemme précédent nous permet de faire la définition suivante.

Définition II.3.3. Soient $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale assortie de deux bornes $m, M \in \mathbb{R}$ et $f : [m, M] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'opérateur limite $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ défini dans l'énoncé du Lemme II.3.2 est appelé l'**intégrale de la fonction** f **par rapport à la famille spectrale** $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Elle se note :

$$S = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda.$$

Remarquer que pour tout famille spectrale $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, nous avons :

$$\int_m^{M+\varepsilon} dE_\lambda = E_{M+\varepsilon} - E_m = I.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème II.3.4 (Théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques)**.** *Soit S un opérateur borné et symétrique. Il existe une unique famille spectrale $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes.*

a) La borne inférieure m et la borne supérieure M de S sont des bornes pour $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$;

b) Tout opérateur borné qui commute avec S commute avec E_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la limite suivante existe :

$$E_{\mu+0}x = \lim_{\lambda \searrow \mu} E_\lambda x;$$

d) L'opérateur S est donné par :

$$S = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda.$$

La famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est appelée la **famille spectrale de** S.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $E_+(\lambda)$ la projection orthogonale sur le noyau de $(S-\lambda I)-|S-\lambda I|$ étudiée au Lemme II.2.7. Remarquez que $E_+(\lambda)$ est ainsi univoquement défini. Nous montrons que les projections $E_\lambda = I - E_+(\lambda)$ forment une famille spectrale vérifiant a), b) et c).

Puisque $E_+(\lambda)$ commute avec tout opérateur borné qui commute avec S, cela est aussi vrai de E_λ. Ainsi, b) est satisfait. En particulier, $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu$ pour tous $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que si $\lambda < \mu$, alors $E_\lambda \leq E_\mu$. Supposons $\lambda < \mu$ et posons $P = E_\lambda(I - E_\mu)$. Nous avons les identités :

$$E_\lambda P = P, \qquad (I - E_\mu)P = P. \tag{II.11}$$

Et par définition de E_λ et E_μ, en vertu du Lemme II.2.7, nous avons :

$$(S-\lambda I)E_\lambda \leq 0, \qquad (S-\mu I)(I-E_\mu) = (S-\mu I)E_+(\mu) \geq 0. \tag{II.12}$$

Prenons $x \in \mathcal{H}$ quelconque et posons $y = Px$. En utilisant (II.11), nous avons :

$$E_\lambda y = E_\lambda P x = Px = y.$$

De la même manière, nous avons $(I - E_\mu)y = y$. Ainsi, par (II.12) il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\langle (S-\lambda I)y, y\rangle &= \langle (S-\lambda I)E_\lambda y, y\rangle \leq 0,\\ \langle (S-\mu I)y, y\rangle &= \langle (S-\mu I)(I-E_\mu)y, y\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$(\mu-\lambda)\langle y, y\rangle = \langle (S-\lambda I)y, y\rangle - \langle (S-\mu I)y, y\rangle \leq 0.$$

Or, comme $\mu > \lambda$, nécessairement $Px = y = 0$. Puisque x est quelconque, nous avons $P = 0$. Par définition de P, cela signifie que $E_\lambda = E_\lambda E_\mu$. Par le Théorème I.3.2, c'est équivalent à $E_\lambda \leq E_\mu$. La famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifie donc la condition ii) de la Définition II.3.1.

Observons à present que si $\lambda < \mu$, en notant $E_\Delta = E_\mu - E_\lambda$, nous avons alors :

$$E_\mu E_\Delta = E_\Delta \quad \text{et} \quad (I-E_\lambda)E_\Delta = E_\mu - E_\lambda - E_\lambda E_\mu + E_\lambda^2 = E_\Delta. \tag{II.13}$$

Maintenant, en utilisant (II.12), le fait que la composition d'opérateurs positifs qui commutent est positive (cf. Corollaire II.2.2) et que $E_\Delta \geq 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(S-\mu I)E_\Delta &= (S-\mu I)E_\mu E_\Delta \leq 0,\\ (S-\lambda I)E_\Delta &= (S-\lambda I)(I-E_\lambda)E_\Delta \geq 0.\end{aligned}$$

Conséquemment, nous avons les inégalités suivantes :

$$\lambda E_\Delta \leq S E_\Delta \leq \mu E_\Delta \qquad \text{si } \lambda < \mu. \tag{II.14}$$

Nous montrons à présent que la famille $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifie $c)$ et le point iii) de la Définition II.3.1. Soit $x \in \mathcal{H}$ arbitraire. Comme $E_\lambda \leq E_\mu$ si $\lambda < \mu$, $\langle E_\lambda x, x\rangle$ est une fonction réelle positive et décroissante de λ. Par conséquent, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, elle admet une limite à gauche

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} \langle E_\lambda x, x\rangle = \sup_{\lambda<\mu} \langle E_\lambda x, x\rangle = l_\mu.$$

Donc pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < \mu - \lambda < \delta$ implique $l_\mu - \langle E_\lambda x, x\rangle < \frac{1}{2}\eta$. Il s'ensuit que, pour $\mu - \delta < \lambda < \nu < \mu$, nous avons :

$$\|E_\nu x - E_\lambda x\|^2 = \left\langle (E_\nu - E_\lambda)^2 x, x\right\rangle = \langle (E_\nu - E_\lambda)x, x\rangle \leq |\langle E_\nu x, x\rangle - l_\mu| + |l_\mu - \langle E_\lambda x, x\rangle| < \eta.$$

Ainsi, par la complétude de $\mathcal{H}$, la limite

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\lambda x = E_{\mu-0} x \quad \text{existe pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

De façon similaire, il existe aussi pour tout $x \in \mathcal{H}$ la limite

$$\lim_{\lambda \searrow \mu} E_\lambda x = E_{\mu+0} x.$$

Il reste encore à montrer que la famille $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est fortement continue à gauche. À cette fin, considérons l'opérateur $E_{\Delta_0} = E_\mu - E_{\mu-0}$ et notons comme précédemment $E_\Delta = E_\mu - E_\lambda$ pour $\lambda < \mu$. Remarquons que pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\Delta x = E_{\Delta_0} x.$$

Ainsi, en laissant $\lambda \nearrow \mu$ dans (II.14) nous obtenons :

$$\mu E_{\Delta_0} \leq S E_{\Delta_0} \leq \mu E_{\Delta_0}.$$

Par conséquent, $\langle (S - \mu I) E_{\Delta_0} x, x \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Le Théorème II.1.2 nous assure alors que $\|(S - \mu I) E_{\Delta_0}\| = 0$. Fixons $x \in \mathcal{H}$ arbitrairement et notons $y = E_{\Delta_0} x$. Ainsi $(S - \mu I) y = 0$ et donc par le point c) du Lemme II.2.7, nous avons :

$$E_\mu E_{\Delta_0} x = E_\mu y = (I - E_+(\mu)) y = 0.$$

Finalement, il découle de (II.13) que :

$$E_{\Delta_0} x = \lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\Delta x = \lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\mu E_\Delta x = E_\mu E_{\Delta_0} x = 0.$$

Nous avons donc obtenu $E_{\mu-0} = E_\mu$ comme désiré.

Montrons à présent a) assurant de cette façon que la famille $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ vérifie la condition iv) de la Définition II.3.1. Supposons par contradiction que $\lambda < m$ et $E_\lambda \neq 0$. Il existe alors $x \in \mathcal{H}$ tel que $E_\lambda x \neq 0$. Pour un tel x, posons $y = E_\lambda x$. Nous pouvons supposer que $\|y\| = 1$. Alors par (II.12), nous obtenons que

$$\langle Sy, y \rangle - \lambda = \langle (S - \lambda I) y, y \rangle = \langle (S - \lambda I) E_\lambda y, y \rangle \leq 0.$$

Ainsi par définition de la borne inférieure de S, nous avons la contradiction :

$$m \leq \langle Sy, y \rangle \leq \lambda.$$

Donc $E_\lambda = 0$ pour tout $\lambda < m$. À nouveau par contradiction, supposons maintenant que $\lambda > M$ et $E_\lambda \neq I$. Il existe alors $x \in \mathcal{H}$ tel que $z = (I - E_\lambda) x \neq 0$. Nous pouvons une fois encore supposer que $\|z\| = 1$. Ainsi toujours par (II.12),

$$\langle Sz, z \rangle - \lambda = \langle (S - \lambda I) z, z \rangle = \langle (S - \lambda I)(I - E_\lambda) z, z \rangle \geq 0.$$

Alors par la définition de la borne supérieure de S, nous avons la contradiction :

$$\lambda \leq \langle Sz, z\rangle \leq M.$$

Ainsi, $E_\lambda = I$ pour tout $\lambda > M$.

Nous montrons maintenant le point d). Pour cela, considérons une suite de partitions $(\Pi_l)_{l=1}^\infty$ donnée par :

$$\Pi_l : \quad m = \lambda_0^l < \lambda_1^l < \cdots < \lambda_{n_l-1}^l < \lambda_{n_l}^l = M + \varepsilon,$$

vérifiant $\lim_{l\to\infty} |\Pi_l| = 0$. Pour tout $l \geq 1$ et pour tout $k = 1, \ldots, n_l$, en notant $E_{\Delta_k^l} = E_{\lambda_k^l} - E_{\lambda_{k-1}^l}$, nous avons par (II.14) que :

$$\lambda_{k-1}^m E_{\Delta_k^m} \leq SE_{\Delta_k^m} \leq \lambda_k^m E_{\Delta_k^m}.$$

Ainsi pour $l \geq 1$ fixé, puisque $\sum_{k=1}^{n_l} E_{\Delta_k^l} = I$, nous obtenons en sommant sur $k = 1, \ldots, n_l$:

$$S_{\Pi_l} \leq S \leq S_{\Pi_l'}.$$

En laissant alors l tendre vers l'infini, nous trouvons par le Lemme II.3.2 que :

$$\int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda \leq S \leq \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\left\langle \left(S - \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda \right) x, x \right\rangle = 0.$$

Ainsi par le Théorème II.1.2,

$$S = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda.$$

Il reste à démontrer l'unicité de la famille spectrale, ce que nous ferons après le lemme suivant et son corollaire. $\square$

Lemme II.3.5. *Soit S un opérateur symétrique. Soit $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale vérifiant a) à d) du théorème précédent pour S. Pour tout polynôme p à coefficients réels, nous avons*

$$p(S) = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda) dE_\lambda.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'énoncé est vrai pour tout monôme $p(\lambda) = \lambda^l$ avec $l \geq 0$. Or, nous avons déjà remarqué que cela est vrai pour $l = 0$, et le théorème précédent nous donne ce résultat pour $l = 1$. Supposons alors comme hypothèse d'induction que le lemme est vrai pour $p(\lambda) = \lambda^l$ et montrons qu'il est vrai pour le monôme λ^{l+1}. Fixons $1 > \eta > 0$ arbitrairement. Par le théorème précédent d'une part et par l'hypothèse d'induction d'autre part, il existe $\delta > 0$ de sorte que pour toute partition $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n$ vérifiant $|\Pi| < \delta$, nous avons à la fois :

$$\|S - \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k E_{\Delta_k}\| < \eta \quad \text{et} \quad \left\|S^l - \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k^l E_{\Delta_k}\right\| < \eta,$$

où $E_{\Delta_k} = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$. Notons $T = \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{\Delta_k}$ et $T^{(l)} = \sum_{k=1}^n \lambda_k^l E_{\Delta_k}$. Observons que

$$\left\|\left(S^l - \sum_{k=1}^n \lambda_k^l E_{\Delta_k}\right)\left(S - \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{\Delta_k}\right)\right\| \leq \left\|S^l - T^{(l)}\right\| \|S - T\| < \eta^2.$$

Ainsi,

$$\left\|S^{l+1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^l E_{\Delta_k} \sum_{k=1}^n \lambda_k E_{\Delta_k} - S^l T - S T^{(l)}\right\| < \eta^2.$$

Cependant, pour tout k, nous avons :

$$E_{\Delta_k}^2 = E_{\lambda_k}^2 - 2E_{\lambda_k}E_{\lambda_{k-1}} + E_{\lambda_{k-1}}^2 = E_{\Delta_k}.$$

Tandis que pour tous $i \neq j$, nous avons :

$$E_{\Delta_i}E_{\Delta_j} = E_{\lambda_i}E_{\lambda_j} - E_{\lambda_i}E_{\lambda_{j-1}} - E_{\lambda_{i-1}}E_{\lambda_j} + E_{\lambda_{i-1}}E_{\lambda_{j-1}} = 0.$$

Par conséquent, $T^{(l)}T = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{l+1} E_{\Delta_k}$. En utilisant de plus que

$$\left\|S^l T - S^{l+1}\right\| \leq \left\|S^l\right\| \|T - S\| \leq \|S\|^l \eta,$$

et

$$\left\|S T^{(l)} - S^{l+1}\right\| \leq \|S\| \left\|T^{(l)} - S^l\right\| \leq \|S\| \eta,$$

nous obtenons que :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k^{l+1} E_{\Delta_k} - S^{l+1}\right\| &= \left\|(S^{l+1} + T^{(l)}T - S^l T - S T^{(l)}) + (S^l T - S^{l+1}) + (S T^{(l)} - S^{l+1})\right\| \\ &\leq \eta^2 + \|S\|^l \eta + \|S\| \eta \\ &< \eta(\eta + \|S\|^l + \|S\|).\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé, dans la dernière inégalité, le fait que nous avons pris arbitrairement $0 < \eta < 1$. Il découle alors du Lemme II.3.2 que :

$$S^{l+1} = \int_m^{M+\varepsilon} \lambda^{l+1} dE_\lambda.$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Corollaire II.3.6. *Soit S un opérateur symétrique. Soit $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale vérifiant a) à d) du théorème précédent pour S. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout polynôme p à coefficients réels,*

$$\langle p(S)x, x\rangle = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\ d\langle E_\lambda x, x\rangle . \tag{II.15}$$

Le membre de droite de (II.15) est une intégrale au sens de Riemann-Stieltjes (cf. Annexe A). Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la fonction $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x, x\rangle$ est croissante et donc *a fortiori* à variation bornée sur $[m, M+\varepsilon]$. Sa variation totale sur $[m, M+\varepsilon]$ égale $\|x\|^2$. De plus, la valeur du membre de droite ne dépend pas de l'extension continue de p choisie ni de la valeur de ε. Cela découle du fait déjà observé que si $\lambda > \mu > M$, alors $E_\lambda - E_\mu = 0$.

Démonstration. Soit $(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ une suite de partitions de $[m, M+\varepsilon]$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Notons $(\lambda_k^n)_{k=0}^{l_n}$ la partition Π_n. Observer que, d'une part, en vertu du Lemme II.3.5 et par la continuité du produit scalaire :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{l_n} p(\lambda_k^n)(E_{\lambda_k^n} - E_{\lambda_{k-1}^n})x, x \right\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle p(S)x, x\rangle .$$

Tandis que, d'autre part, le Théorème A.2.1 nous assure que, par la linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=1}^{l_n} p(\lambda_k^n)(E_{\lambda_k^n} - E_{\lambda_{k-1}^n})x, x \right\rangle &= \sum_{k=1}^{l_n} p(\lambda_k^n)\left[\langle E_{\lambda_k^n}x, x\rangle - \langle E_{\lambda_{k-1}^n}x, x\rangle\right] \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\ d\langle E_\lambda x, x\rangle .\end{aligned}$$

Par l'unicité de la limite, nous obtenons (II.15). □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'unicité de la famille spectrale d'un opérateur symétrique, comme annoncé dans le Théorème II.3.4.

Preuve de l'unicité de la famille spectrale d'un opérateur symétrique. Soit S un opérateur symétrique. Considérons deux familles spectrales $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions *a)* à *d)* du Théorème II.3.4 pour S. Par définition, nous avons déjà $E_\lambda = F_\lambda$ pour tous λ tels que $\lambda \le m$ ou $\lambda \ge M+\varepsilon$, où m et M sont les bornes de S. De plus, pour tout polynôme p à coefficients réels, nous avons par le Corollaire II.3.6 :

$$\langle p(S)x, x\rangle = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\ d\langle E_\lambda x, x\rangle = \int_m^{M+\varepsilon} p(\lambda)\ d\langle F_\lambda x, x\rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Posons $\phi(\lambda) = \langle E_\lambda x, x\rangle - \langle F_\lambda x, x\rangle$ pour tout $\lambda \in [m, M+\varepsilon]$. La fonction ϕ est à variation bornée en tant que combinaison linéaire de fonctions à variation bornée. En outre, $\phi(m) = 0$ et ϕ est continue à gauche. Ainsi par les Propriétés A.3.1,

$$\int_m^{M+\varepsilon} p d\phi = 0 \quad \text{pour tout polynôme } p.$$

Or pour toute fonction continue $f : [m, M+\varepsilon] \to \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f par le théorème d'approximation de Weierstrass. Il découle alors du Théorème A.3.3 que :

$$\int_m^{M+\varepsilon} f d\phi = 0 \quad \text{pour toute fonction continue } f.$$

Le Théorème A.3.4 nous assure donc que $\phi(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in [m, M+\varepsilon]$. C'est-à-dire, pour tout $\lambda \in [m, M+\varepsilon]$:

$$\langle (E_\lambda - F_\lambda)x, x\rangle = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Il découle alors du Théorème II.1.2 que $E_\lambda = F_\lambda$ pour tout $\lambda \in [m, M+\varepsilon]$. □

Nous illustrons dans un cas simple la construction de la famille spectrale d'un opérateur symétrique, comme décrite dans le Théorème II.3.4.

Exemple II.3.7. Considérons l'espace de Hilbert $L_2[0,1]$. Nous nous proposons de trouver la famille spectrale de l'opérateur borné et symétrique S défini pour tout $f \in L_2[0,1]$ par

$$Sf(s) = sf(s) \quad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

Observer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'opérateur R_λ défini pour tout $f \in L_2[0,1]$ par

$$R_\lambda f(s) = |s-\lambda|\, f(s) \quad \text{pour tout } s \in [0,1],$$

est positif puisque pour tout $f \in L_2[0,1]$

$$\langle R_\lambda f, f\rangle = \int_0^1 |s-\lambda|\, f(s)\overline{f(s)} ds = \int_0^1 |s-\lambda|\, |f(s)|^2\, ds \geq 0,$$

et qu'il vérifie évidemment pour tout $f \in L_2[0,1]$

$$R_\lambda^2 f(s) = |s-\lambda|^2\, f(s) = (s-\lambda)^2 f(s) = (S-\lambda I)^2 f(s) \quad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

Par l'unicité de la racine carrée positive de $(S-\lambda I)^2$, nous avons nécessairement

$$R_\lambda = |S-\lambda I|\,.$$

Maintenant, nous avons pour tout $f \in L_2[0,1]$ et pour tout $s \in [0,1]$,

$$\big[(S-\lambda I) - |S-\lambda I|\,\big] f(s) = \big[(s-\lambda) - |s-\lambda|\,\big] f(s) = -2(s-\lambda)^- f(s),$$

où

$$(s-\lambda)^- = \begin{cases} |s-\lambda| & \text{si } s \leq \lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\ker\big[(S-\lambda I) - |S-\lambda I|\,\big] = \begin{cases} L_2[0,1] & \text{si} \quad \lambda \leq 0, \\ \{f \in L_2[0,1] \mid f(s) = 0 \text{ pour tout } s \leq \lambda\} & \text{si} \quad \lambda \in (0,1], \\ 0 & \text{si} \quad \lambda > 1. \end{cases}$$

Les projections P_λ sur les noyaux $\ker[(S-\lambda I)-|S-\lambda I|]$ sont ainsi données par

$$P_\lambda f = \chi_{(\lambda,1]} f \quad \text{pour tout } f \in L_2[0,1],$$

où $\chi_{(\lambda,1]} : [0,1] \to 0,1$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $(\lambda,1]$ avec la convention que $\chi_{(\lambda,1]} \equiv 1$ si $\lambda < 0$ et $\chi_{(\lambda,1]} \equiv 0$ si $\lambda \geq 1$. La famille spectrale de S est alors donnée par

$$E_\lambda = I - P_\lambda.$$

Explicitement, pour $f \in L_2[0,1]$, nous avons :

$$E_\lambda f = (I-P_\lambda) f = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \leq 0, \\ \chi_{[0,\lambda]} f & \text{si} \quad \lambda \in (0,1], \\ f & \text{si} \quad \lambda > 1. \end{cases}$$

III. Opérateurs linéaires non bornés

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion d'opérateur linéaire qui étend celle utilisée jusqu'à présent. Nous étudions les propriétés de cette nouvelle notion. Nous exposons les résultats fondamentaux pour la démonstration, au chapitre suivant, d'une extension du théorème spectral pour les opérateurs symétriques.

III.1. Étendre la notion d'opérateur linéaire

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré des opérateurs linéaires bornés définis en chaque élément d'un espace de Hilbert. Nous étendons à présent ce concept à des applications étant définies seulement sur un sous-espace.

Nous étendons la notion d'opérateur linéaire de la façon suivante.

Définition III.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un **opérateur (linéaire)** sur $\mathcal{H}$ est une fonction $T : \mathfrak{D}_T \to \mathcal{H}$ telle que :

i) $\mathfrak{D}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ appelé le **domaine** de T ;

ii) pour tous $x, y \in \mathfrak{D}_T$,
$$T(x+y) = Tx + Ty;$$

iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathfrak{D}_T$,
$$T(\lambda x) = \lambda Tx.$$

Nous adaptons aussi d'une façon évidente les notions d'image et de noyau d'un opérateur. Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$. Son **image** est par définition
$$\mathrm{Im}(T) = \{Tx \mid x \in \mathfrak{D}_T\},$$
et son **noyau**
$$\ker(T) = \{x \in \mathfrak{D}_T \mid Tx = 0\}.$$

Considérons deux opérateurs T et T' sur $\mathcal{H}$ dont les domaines respectifs sont $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T'}$. Si le domaine de T est inclus dans le domaine de T', en symboles, si $\mathfrak{D}_T \subseteq \mathfrak{D}_{T'}$, et si $Tx = T'x$ pour touT $x \in \mathfrak{D}_T$, nous disons que T' est un **prolongement** de T et nous notons :
$$T \subseteq T', \text{ ou } T' \supseteq T.$$

Il est facile de voir que cela définit une relation d'ordre partiel sur les opérateurs de $\mathcal{H}$. En particulier, deux opérateurs sont égaux si $\mathfrak{D}_T = \mathfrak{D}_{T'}$ et si $Tx = T'x$ pour tous $x \in \mathfrak{D}_T$.

Si un opérateur T est borné, c'est-à-dire s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\|Tx\| \leq C\,\|x\| \text{ pour tout } x \in \mathfrak{D}_T,$$

alors T admet un prolongement borné et défini partout sur $\mathcal{H}$. En effet, nous pouvons dans dans un premier temps prolonger T par continuité à l'adhérence $\overline{\mathfrak{D}_T}$ de son domaine. Si $\mathfrak{D}_T$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, nous pouvons tout de même prolonger T au delà de $\overline{\mathfrak{D}_T}$. En posant par exemple $Tx = 0$ sur le complément orthogonal de $\overline{\mathfrak{D}_T}$, avant d'étendre T sur $\mathcal{H}$ tout entier par linéarité.

Il découle de cette observation que les opérateurs bornés qui sont définis sur un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ ne consistent pas en une extension essentielle de la notion d'opérateur linéaire. Les opérateurs que notre nouvelle définition d'opérateur introduit réellement sont les opérateurs linéaires non bornés. Pour cette raison, lorsque nous parlons d'opérateurs linéaires et bornés, nous sous-entendons qu'ils sont définis partout, c'est-à-dire qu'ils sont des opérateurs bornés au sens de la définition adoptée au Chapitre I. Lorsque nous voulons insister sur la nature de la véritable généralisation de la notion d'opérateur linéaire, en contraste avec les opérateurs bornés, nous parlons d'opérateurs linéaires non (nécessairement) bornés.

De façon similaire au cas des opérateurs bornés, nous définissons le **graphe** d'un opérateur $T : \mathfrak{D}_T \to \mathcal{H}$ comme le sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert produit $\boldsymbol{H} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$:

$$\boldsymbol{G}_T = \{(x, Tx) \mid x \in \mathfrak{D}_T\}.$$

Nous disons que T est **fermé** si son graphe est un sous-ensemble fermé de $\boldsymbol{H}$. Par le théorème du graphe fermé, lorsque T est défini partout, il est fermé si et seulement s'il est borné. Si T_1 et T_2 sont des opérateurs, alors bien sûr $T_1 \subseteq T_2$ est équivalent à $\boldsymbol{G}_{T_1} \subseteq \boldsymbol{G}_{T_2}$ pour l'inclusion des graphes.

Conceptuellement, la somme, la multiplication par un scalaire et la composition d'opérateurs se définissent comme dans le cas des opérateurs bornés. Cependant, le domaine de l'opérateur résultant varie selon les cas. Soient $T_1 : \mathfrak{D}_{T_1} \to \mathcal{H}$ et $T_2 : \mathfrak{D}_{T_2} \to \mathcal{H}$ des opérateurs sur $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. La somme de T_1 et T_2 est l'opérateur :

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 : \mathfrak{D}_{T_1} \cap \mathfrak{D}_{T_2} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto T_1 x + T_2 x. \end{aligned}$$

La multiplication de T_1 par un sclaire λ est définie comme l'opérateur :

$$\begin{aligned} \lambda T_1 : \mathfrak{D}_{T_1} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto \lambda T_1 x. \end{aligned}$$

Finalement la composition, ou le produit, de T_1 avec T_2 est l'opérateur :

$$\begin{aligned} T_1 T_2 : \{x \in \mathfrak{D}_{T_2} \mid T_2 x \in \mathfrak{D}_{T_1}\} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto T_1(T_2 x). \end{aligned}$$

Nous étendons également le concept d'inverse à notre notion générale d'opérateur. Si un opérateur $T : \mathfrak{D}_T \to \mathcal{H}$ est injectif, i.e. si pour tous $x, y \in \mathfrak{D}_T$, $Tx = Ty$ implique $x = y$, nous appelons l'**inverse** de T l'application T^{-1} définie par :

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathrm{Im}(T) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ Tx &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Observez que ce nouveau sens du concept d'inverse associe à certains opérateurs, même bornés, un inverse qui n'est pas défini partout. De manière générale, si T est injectif, alors :

$$TT^{-1} \subseteq I \quad \text{et} \quad T^{-1}T \subseteq I.$$

III.2. Opérateur adjoint

Nous étendons la notion d'adjoint pour les opérateurs linéaires non bornés dont le domaine est dense.

Dans le cas d'un opérateur borné T, nous avons défini l'adjoint de T par l'équation :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*x\rangle \text{ pour tous } f, g \in \mathcal{H}. \tag{III.1}$$

Nous avions procédé à cette définition en s'appuyant sur le Théorème I.2.3 en utilisant le fait que pour tout $y \in \mathcal{H}$ l'application

$$x \mapsto \langle Tx, y\rangle \tag{III.2}$$

est une fonctionnelle linéaire continue. Dans le cas général qui nous intéresse, deux problèmes surgissent. Premièrement l'application suggérée par (III.2) ne peut être définie *a priori* que sur le domaine de T. Deuxièmement, en général cette application n'est pas bornée, du moins pas pour tout $y \in \mathcal{H}$. Observez que même si pour un certain y, l'application (III.2) est bornée, alors dans le cas où $\mathfrak{D}_T$ n'est pas dense elle admet plusieurs prolongements continus et donc plusieurs éléments $y^* \in \mathcal{H}$ vérifiant :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ pour tout } x \in \mathfrak{D}_T.$$

Pour ces raisons, nous adoptons la définition suivante.

Définition III.2.1. Soit $T : \mathfrak{D}_T \to \mathcal{H}$ un opérateur dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$. Le domaine de l'**adjoint** T^* de T est par définition

$$\mathfrak{D}_{T^*} = \left\{ y \in \mathcal{H} \;\middle|\; \text{il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |\langle Tx, y\rangle| \leq C\,\|x\| \text{ pour tout } x \in \mathfrak{D}_T \right\}.$$

Ainsi pour tout $y \in \mathfrak{D}_{T^*}$, comme $\mathfrak{D}_T$ est dense dans $\mathcal{H}$, il existe une unique extension continue de la fonctionnelle $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ à tout $\mathcal{H}$. Le théorème de Riesz, nous permet donc de définir, pour tout $y \in \mathfrak{D}_{T^*}$, $T^*(y)$ comme l'unique élément de $\mathcal{H}$ vérifiant :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ pour tout } x \in \mathfrak{D}_T.$$

L'adjoint T^* est bien un opérateur. En effet, soient $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_{T^*}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $x \in \mathfrak{D}_T$,

$$\begin{aligned}\langle Tx, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle &= \overline{\lambda}_1 \langle Tx, y_1 \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda}_1 \langle x, T^* y_1 \rangle + \overline{\lambda}_2 \langle x, T^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2 \rangle .\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathfrak{D}_{T^*}$ et nous avons :

$$T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2.$$

Un opérateur T dont le domaine est dense vérifie la relation immédiate suivante avec son adjoint :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \text{ pour tout } x \in \mathfrak{D}_T \text{ pour tout } y \in \mathfrak{D}_{T^*}.$$

Nous avons aussi la relation suivante entre l'image d'un opérateur T à domaine dense et le noyau de son adjoint

$$\mathrm{Im}(T)^\perp = \ker(T^*).$$

En effet, $y \in \ker(T^*)$ si et seulement si y est un élément de $\mathfrak{D}_{T^*}$ tel que $T^* y = 0$. Puisque $\mathfrak{D}_T$ est dense, ceci est équivalent à la relation

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{D}_T.$$

Ce qui est équivalent au fait que y appartiennent à $\mathrm{Im}(T)^\perp$.

L'adjoint d'un opérateur dont le domaine est dense possède la propriété suivante.

Proposition III.2.2. *Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$ dont le domaine $\mathfrak{D}_T$ est dense. Son adjoint T^* est fermé.*

Démonstration. Soit $(x_n, T^* x_n)_{n=1}^\infty$ une suite du graphe de T^* convergeant vers $(x, y) \in \boldsymbol{H}$. Montrons que $x \in \mathfrak{D}_{T^*}$ et $y = T^* x$. Du fait de l'identité,

$$\begin{aligned}\|(x_n, T^* x_n) - (x, y)\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle + \langle T^* x_n - y, T^* x_n - y \rangle \\ &= \|x_n - x\|^2 + \|T^* x_n - y\|^2,\end{aligned}$$

nous avons également $x_n \to x$ et $T^* x_n \to y$ lorsque n tend vers l'infini. Il découle alors de la continuité du produit scalaire que pour tout $z \in \mathfrak{D}_T$:

$$\langle Tz, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, T^* x_n \rangle = \langle z, y \rangle .$$

Ainsi $z \mapsto \langle Tz, x \rangle$ est bornée sur $\mathfrak{D}_T$ et donc $x \in \mathfrak{D}_{T^*}$. De plus, puisque $T^* x$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ à satisfaire l'égalité ci-dessus pour tout $z \in \mathfrak{D}_T$, nécessairement $y = T^* x$. □

La notion d'adjoint possède les propriétés élémentaires suivantes.

Propriétés III.2.3. *Soient T_1 et T_2 des opérateurs sur $\mathcal{H}$ dont les domaines sont denses et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

a) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ *;*

b) Si le domaine de $T_1 + T_2$ est dense, alors $T_1^* + T_2^* \subseteq (T_1 + T_2)^*$;

c) Si le domaine de $T_2 T_1$ est dense, alors $T_1^* T_2^* \subseteq (T_2 T_1)^*$;

d) Si $T_1 \subseteq T_2$, alors $T_1^* \supseteq T_2^*$.

III.3. Commutativité et réduction

Nous définissons ce que signifie pour un opérateur borné qu'il commute avec un opérateur non borné. Cette définition se justifie notamment par ses conséquences lorsque l'opérateur borné est une projection.

Nous adoptons la définition suivante.

Définition III.3.1. Soient B un opérateur borné et T un opérateur. Nous disons que B commute avec T et nous écrivons $B \smile T$ si

$$BT \subseteq TB.$$

Note III.3.2. (F. Genoud) La commutativité de deux opérateurs *auto-adjoints* non bornés se définit par la commutativité de leurs familles spectrales. C'est ce qu'il faut pour la mécanique quantique.

Notez qu'il est suffisant, pour montrer que la moyenne d'une grandeur physique est conservée, que l'opérateur associeé commute avec les U_t, ce qui est impliqué par la commutativité avec H, au sens défini ci-dessus.

Notre généralisation de la notion de commutativité entre opérateurs se justifie en particulier lorsqu'il s'agit de la commutativité d'une projection avec un opérateur quelconque.

Lemme III.3.3. *Soient P une projection, $Q = I - P$ la projection sur le complément orthogonal de $\operatorname{Im} P$ et T un opérateur. Si $P \smile T$, alors les sous-espaces vectoriels fermés $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im} Q$ réduisent l'opérateur T dans le sens où d'une part,*

$$PTP = TP \quad \text{et} \quad QTQ = TQ,$$

et d'autre part,

$$T = TP + TQ.$$

Démonstration. Comme $P \smile T$, i.e. $PT \subseteq TP$, nous avons

$$PTP = (PT)P \subseteq (TP)P = TP,$$

et comme les opérateurs PTP et TP ont le même domaine,

$$PTP = TP.$$

Puisque, de plus,

$$QT = (I - P)T = T - PT \subseteq T - TP = T(I - P),$$

c'est-à-dire $Q \smile T$, nous obtenons de la même façon que $QTQ = TQ$. En outre, nous avons

$$T = (P + Q)T = PT + QT \subseteq TP + TQ \subseteq T(P + Q) = T$$

et par conséquent

$$T = TP + TQ. \qquad \square$$

III.4. Le graphe d'un opérateur

Visualiser un opérateur à l'aide de son graphe permet d'établir certains résultats importants.

Nous considérons les opérateurs linéaires sur le produit $\boldsymbol{H}$ définis par :

$$\mathbf{U}(x, y) = (y, x) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(x, y) = (y, -x),$$

pour tout $(x, y) \in \boldsymbol{H}$. Ces opérateurs sont bijectifs et préservent le produit scalaire de $\boldsymbol{H}$. Ils vérifient de plus les identités suivantes où $\mathbf{I}$ représente l'identité sur $\boldsymbol{H}$:

$$\mathbf{UV} = -\mathbf{VU} \quad \text{et} \quad -\mathbf{V}^2 = \mathbf{U}^2 = \mathbf{I}.$$

L'observation cruciale de cette section est énoncée dans le lemme suivant.

Lemme III.4.1. *Soit T un opérateur dont le domaine est dense. Les graphes de T et de son adjoint sont liés par la relation suivante :*

$$\boldsymbol{G}_{T^*} = \left(\mathbf{V}\overline{\boldsymbol{G}_T}\right)^{\perp} \quad \textit{ou de façon équivalente} \quad \mathbf{V}\overline{\boldsymbol{G}_T} = (\boldsymbol{G}_{T^*})^{\perp}.$$

Démonstration. La relation entre T et son adjoint T^* consiste en le fait que pour tout $x \in \mathfrak{D}_T$ et tout $y \in \mathfrak{D}_{T^*}$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle\,,$$

ce qui peut également s'écrire sous la forme :

$$\Big\langle \mathbf{V}(x, Tx), (y, T^*y) \Big\rangle = 0.$$

Cela exprime que tous les éléments de $\boldsymbol{G}_{T^*}$ sont orthogonaux à chacun des éléments de $\mathbf{V}\boldsymbol{G}_T$. Montrons que le graphe de T^* est en fait exactement le complément orthogonal de l'adhérence de l'image par $\mathbf{V}$ du graphe de T.

$\subseteq$. Considérons un élément $(y, T^*y) \in \boldsymbol{G}_{T^*}$ et une suite $(Tx_n, -x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_T$ convergeant vers $(z_1, z_2) \in \overline{\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_T}$. Alors, par définition de T^*y :

$$\begin{aligned}\big\langle (z_1, z_2), (y, T^*y) \big\rangle &= \langle z_1, y\rangle + \langle z_2, T^*y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y\rangle - \langle x_n, T^*y\rangle = 0,\end{aligned}$$

et donc $\boldsymbol{G}_{T^*} \subseteq \left(\mathbf{V}\ \overline{\boldsymbol{G}_T}\right)^{\perp}$.

$\supseteq$. Réciproquement, soit (u, v) dans le complément orthogonal de $\overline{\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_T}$. Alors, en particulier pour tout $x \in \mathfrak{D}_T$:

$$0 = \big\langle \mathbf{V}(x, Tx), (u, v) \big\rangle = \langle Tx, u\rangle - \langle x, v\rangle\,. \tag{III.3}$$

Par conséquent, l'application linéaire $x \mapsto \langle Tx, u\rangle$ définie sur $\mathfrak{D}_T$ coïncide sur $\mathfrak{D}_T$ avec la fonctionnelle linéaire $x \mapsto \langle x, v\rangle$ définie sur tout $\mathcal{H}$ (cf. Théorème I.2.3). Il s'ensuit que l'application $x \mapsto \langle Tx, u\rangle$ est bornée sur $\mathfrak{D}_T$ et donc $u \in \mathfrak{D}_{T^*}$. Il découle alors de (III.3) que $T^*u = v$, c'est-à-dire $(u, v) \in \boldsymbol{G}_{T^*}$. Par conséquent, $\boldsymbol{G}_{T^*} \supseteq \left(\mathbf{V}\ \overline{\boldsymbol{G}_T}\right)^{\perp}$. □

Cette relation entre les graphes d'un opérateur et de son adjoint est à la base de la démonstration des résultats de la fin de cette section. En particulier, dans le cas d'un opérateur fermé, nous avons le théorème suivant.

Théorème III.4.2. *Soit T un opérateur fermé dont le domaine est dense. Le domaine de son adjoint T^* est également dense dans $\mathcal{H}$ et donc $T^{**} = (T^*)^*$ existe. En outre, $T^{**} = T$.*

Démonstration. Supposons par contradiction que $\mathfrak{D}_{T^*}$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$. Il existe alors $h \in \mathcal{H}$ non nul qui est orthogonal à $\mathfrak{D}_{T^*}$. Il s'ensuit que pour tout $y \in \mathfrak{D}_{T^*}$:

$$\big\langle (0, h), \mathbf{V}(y, T^*y) \big\rangle = \langle 0, T^*y\rangle - \langle h, y\rangle = 0,$$

et donc $(0, h) \in \big(\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_{T^*}\big)^{\perp}$. Or nous savons par le Lemme III.4.1 que le complément orthogonal de $\boldsymbol{G}_{T^*}$ est égal à $\mathbf{V}\,\overline{\boldsymbol{G}_T}$. Ainsi comme $\mathbf{V}$ est unitaire :

$$\big(\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_{T^*}\big)^{\perp} = \mathbf{V}^2\overline{\boldsymbol{G}_T} = -\mathbf{I}\overline{\boldsymbol{G}_T} = \overline{\boldsymbol{G}_T}. \tag{III.4}$$

Mais puisque T est fermé, nous avons $\overline{\boldsymbol{G}_T} = \boldsymbol{G}_T$ et donc $\big(\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_{T^*}\big)^{\perp} = \boldsymbol{G}_T$. Nous déduisons de cela que $(0, h)$ appartient à $\boldsymbol{G}_T$ et par conséquent $h = T0 = 0$. Cela contredit l'hypothèse selon laquelle h est non nul.

Nous obtenons donc par contradiction que $\mathfrak{D}_{T^*}$ est dense dans $\mathcal{H}$ assurant ainsi l'existence de T^{**}. Or $\boldsymbol{G}_{T^{**}}$ est le complément orthogonal de $\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_{T^*}$ et donc par (III.4) :

$$\boldsymbol{G}_{T^{**}} = \boldsymbol{G}_T,$$

c'est-à-dire $T^{**} = T$ comme annoncé. □

Le théorème suivant énonce un fait plutôt surprenant qui joue un rôle important dans la démonstration du théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints.

Théorème III.4.3. *Soit T un opérateur fermé dont le domaine est dense. Les opérateurs*

$$\mathsf{B} = (I + T^*T)^{-1} \quad \textit{et} \quad \mathsf{C} = T(I + T^*T)^{-1}$$

sont partout définis et bornés avec

$$\|\mathsf{B}\| \leq 1 \quad \textit{et} \quad \|\mathsf{C}\| \leq 1.$$

En outre, B *est symétrique et positif.*

Démonstration. Comme T est fermé, le Théorème III.4.2 nous dit que $\mathfrak{D}_{T^*}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et qu'en outre $T = T^{**}$. Il découle alors du Théorème III.4.1 que $\boldsymbol{G}_T$ et $\mathbf{V}\,\boldsymbol{G}_{T^*}$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux et complémentaires de $\boldsymbol{H}$. Ainsi pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe un unique $x_h \in \mathfrak{D}_T$ et un unique $y_h \in \mathfrak{D}_{T^*}$ qui décompose l'élément $(h, 0)$ comme :

$$(h, 0) = (x_h, Tx_h) + (T^*y_h, -y_h), \tag{III.5}$$

ou en composantes :

$$\begin{cases} h = x_h + T^*y_h, \\ 0 = Tx_h - y_h. \end{cases}$$

Cette première observation nous permet de définir deux opérateurs linéaires B et C par :

$$\mathsf{B}h = x_h \quad \text{et} \quad \mathsf{C}h = y_h.$$

Ces opérateurs sont définis partout et vérifient les identités suivantes :

$$\begin{cases} I = \mathsf{B} + T^*\mathsf{C}, \\ 0 = T\mathsf{B} - \mathsf{C}, \end{cases}$$

dont nous déduisons que :

$$\mathsf{C} = T\mathsf{B} \quad \text{et} \quad I = \mathsf{B} + T^*T\mathsf{B} = (I + T^*T)\mathsf{B}. \tag{III.6}$$

Les deux termes du membre de droite de (III.5) étant orthogonaux, nous avons :

$$\begin{aligned} \|h\|^2 = \|(h,0)\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \|(x_h, Tx_h)\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} + \|(T^*y_h, -y_h)\|^2_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ = \|x_h\|^2 + \|Tx_h\|^2 + \|T^*y_h\|^2 + \|y_h\|^2 . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\mathsf{B}h\|^2 + \|\mathsf{C}h\|^2 = \|x_h\|^2 + \|y_h\|^2 \leq \|h\|^2 ,$$

dont il découle que

$$\|\mathsf{B}\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\mathsf{C}\| \leq 1.$$

Observons à présent que quel que soit l'élément u dans le domaine de T^*T, nous avons :

$$\langle (I + T^*T)u, u\rangle = \langle u, u\rangle + \langle Tu, Tu\rangle \geq \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \geq 0.$$

Par conséquent, si $(I + T^*T)u = 0$, alors nécessairement $u = 0$. Cela montre que l'opérateur $I + T^*T$ est injectif et admet donc un inverse $(I + T^*T)^{-1}$. Or l'identité de droite de (III.6) nous indique que

$$\mathsf{B} = (I + T^*T)^{-1}.$$

Montrons encore que B est symétrique et positif. En effet, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{B}x, y\rangle = \langle \mathsf{B}x, (I + T^*T)\mathsf{B}y\rangle &= \langle \mathsf{B}x, \mathsf{B}y\rangle + \langle \mathsf{B}x, T^*T\mathsf{B}y\rangle \\ &= \langle \mathsf{B}x, \mathsf{B}y\rangle + \langle T^*T\mathsf{B}x, \mathsf{B}y\rangle = \langle (I + T^*T)\mathsf{B}x, \mathsf{B}y\rangle = \langle x, \mathsf{B}y\rangle\,,\end{aligned}$$

car T est fermé. De plus pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle \mathsf{B}x, x\rangle = \langle \mathsf{B}x, (I + T^*T)\mathsf{B}x\rangle = \langle \mathsf{B}x, \mathsf{B}x\rangle + \langle T\mathsf{B}x, T\mathsf{B}x\rangle = \|\mathsf{B}x\|^2 + \|T\mathsf{B}x\|^2 \geq 0.$$

Ainsi s'achève la démonstration du théorème. □

Nous établissons un corollaire de ce théorème dans la section qui suit.

III.5. Opérateurs symétriques et opérateurs autoadjoints

Nous introduisons dans cette section les notions d'opérateur symétrique et d'opérateur autoadjoint dans le cadre général. Il est remarquable qu'il faille distinguer ces deux notions dans ce cadre alors qu'elles se trouvent confondues dans le cas des opérateurs bornés.

Définition III.5.1. Nous appelons **opérateur symétrique** sur $\mathcal{H}$ un opérateur T dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$ et tel que :

$$T \subseteq T^*.$$

Si T est un opérateur symétrique, alors le domaine de son adjoint est également dense dans $\mathcal{H}$ car :

$$\mathcal{H} = \overline{\mathfrak{D}_T} \subseteq \overline{\mathfrak{D}_{T^*}} \subseteq \mathcal{H}.$$

L'opérateur T^* admet donc un adjoint T^{**}. L'opérateur T^{**} est un prolongement linéaire fermé de T car par le Lemme III.4.1,

$$\boldsymbol{G}_{T^{**}} = \big(\mathbf{V}G_{T^*}\big)^{\perp} = \left(\mathbf{V}\Big(\mathbf{V}\overline{\boldsymbol{G}_T}\Big)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\boldsymbol{G}_T} \supseteq \boldsymbol{G}_T. \tag{III.7}$$

En outre, l'opérateur T^{**} est symétrique. En effet, comme $T \subseteq T^*$, alors $T^* \supseteq T^{**}$ et donc par le Théorème III.4.2 :

$$T^{**} \subseteq T^* = (T^*)^{**} = (T^{**})^*.$$

Nous avons donc montré que tout opérateur symétrique admet un prolongement symétrique et fermé, notamment T^{**}.

Un opérateur T est dit **fermable** si l'adhérence de son graphe $\boldsymbol{G}_T$ est le graphe d'un opérateur. Dans ce cas, nous notons $\overline{T}$ l'opérateur dont le graphe est $\overline{\boldsymbol{G}_T}$. Il découle de ce que nous venons de discuter et notamment de (III.7) qu'un opérateur symétrique T est fermable et que $\overline{T} = T^{**}$.

Si B est un opérateur borné, et symétrique au sens que nous venons de définir, alors il est symétrique dans le sens adopté jusqu'ici, c'est-à-dire que $B^* = B$. Toutefois, pour un opérateur T à domaine dense, le fait qu'il soit symétrique n'implique pas en général que $T^* = T$. Nous distinguons donc ces deux notions par la définition suivante.

Définition III.5.2. Un **opérateur autoadjoint** sur $\mathcal{H}$ est un opérateur dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$ tel que :

$$T = T^*.$$

Il découle directement de la Proposition III.2.2 qu'un opérateur autoadjoint est fermé. Il est notable qu'un opérateur symétrique non autoadjoint, même fermé, n'admet pas forcément un prolongement autoadjoint. Un opérateur symétrique T est dit **maximal symétrique** s'il n'admet aucun prolongement symétrique propre, i.e. s'il n'existe pas d'opérateur symétrique S avec $T \subseteq S$ et $T \neq S$. Observez que tout opérateur autoadjoint A est maximal symétrique. En effet,

$$A \subseteq T \quad \text{et} \quad T \subseteq T^*$$

entraîne

$$A = A^* \supseteq T^* \supseteq T \supseteq A,$$

et donc $T = A$.

Nous disons qu'un opérateur symétrique A est **essentiellement autoadjoint** si $\overline{A}$ est autoadjoint. Nous utilisons cette notion ainsi que le résultat suivant lors de la démonstration du théorème de Stone (cf. Théorème IV.3.5). La preuve de ce résultat peut être lue dans [Weidmann, 1980] à la page 108.

Théorème III.5.3. *Un opérateur symétrique A est essentiellement autoadjoint si et seulement si les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Im}(-iI - A)$ *et* $\mathrm{Im}(iI - A)$ *sont denses dans* $\mathcal{H}$.

Nous revenons maintenant sur le Théorème III.4.3 en établissant un corollaire au sujet du cas où l'opérateur considéré est en fait autoadjoint.

Corollaire III.5.4. *Si A est un opérateur autoadjoint, alors les opérateur* $\mathsf{B} = (I + A^2)^{-1}$ *et* $\mathsf{C} = A\mathsf{B}$ *ont de plus les propriétés suivantes.*

a) $\mathsf{B}(\mathfrak{D}_A) = \mathfrak{D}_{A^3}$;

b) $\mathsf{B} \smile A$, *i.e.* $\mathsf{B}A \subseteq A\mathsf{B}$;

c) $\mathsf{CB} = \mathsf{BC}$ *;*

d) Tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tel que* $T \smile A$ *vérifie* $T\mathsf{B} = \mathsf{B}T$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathsf{B}(\mathfrak{D}_A) = \mathfrak{D}_{A^3}$. Observons que puisque $(I + A^2)\mathsf{B} = I$, nous avons pour tout $x \in \mathfrak{D}_A$,

$$\begin{aligned}(A - \mathsf{C})x &= Ax - A\mathsf{B}x \\ &= A(I - \mathsf{B})x \\ &= A\big((I + A^2)\mathsf{B} - \mathsf{B}\big)x \\ &= A^3\mathsf{B}x.\end{aligned}$$

Comme l'opérateur $A - \mathsf{C}$ est défini sur tout le domaine de A et qu'il égale sur ce domaine $A^3\mathsf{B}$, il s'ensuit que l'image par B de $\mathfrak{D}_A$ est incluse dans le domaine de A^3. Réciproquement, si $y \in \mathfrak{D}_{A^3} \subseteq \mathfrak{D}_{A^2} = \mathfrak{D}_{\mathsf{B}^{-1}}$, alors

$$x = \mathsf{B}^{-1}y = (I + A^2)y \in \mathfrak{D}_A.$$

Montrons maintenant que $A\mathsf{B} \subseteq \mathsf{B}A$. Pour tout $x \in \mathfrak{D}_A$, puisque $\mathsf{B}x \in \mathfrak{D}_{A^3}$,

$$(I + A^2)A\mathsf{B}x = A(I + A^2)\mathsf{B}x = Ax.$$

Nous appliquons alors B et puisque $\mathsf{B}(I + A^2)h = h$ pour tout $h \in \mathfrak{D}_{A^2}$, nous obtenons :

$$A\mathsf{B}x = \mathsf{B}(I + A^2)A\mathsf{B}x = \mathsf{B}Ax.$$

Nous avons avec ce qui précède que

$$\mathsf{BC} = (\mathsf{B}A)\mathsf{B} \subseteq (A\mathsf{B})\mathsf{B} = \mathsf{CB},$$

et puisque BC est défini partout, $\mathsf{BC} = \mathsf{CB}$.

Finalement, soit $T \in \mathcal{H}$ tel que $T \smile A$, nous avons alors en particulier

$$TA^2 \subseteq ATA \subseteq A^2T, \tag{III.8}$$

et par conséquent,

$$T\mathsf{B}^{-1} = T(I + A^2) \subseteq (I + A^2)T = \mathsf{B}^{-1}T. \tag{III.9}$$

Il découle aussi de (III.8) que si $x \in \mathfrak{D}_{A^2}$, alors $TA^2x = A^2Tx$ et donc $Tx \in \mathfrak{D}_{A^2}$. Considérons alors $x \in \mathfrak{D}_A$ arbitraire. Par le point *a*) déjà démontré, $\mathsf{B}x \in \mathfrak{D}_{A^3} \subseteq \mathfrak{D}_{A^2}$ et donc $T\mathsf{B}x \in \mathfrak{D}_{A^2} = \mathfrak{D}_{\mathsf{B}^{-1}}$. Il s'ensuit par (III.9) que

$$T\mathsf{B}x = \mathsf{B}\mathsf{B}^{-1}T\mathsf{B}x \supseteq \mathsf{B}T\mathsf{B}^{-1}\mathsf{B}x = \mathsf{B}Tx.$$

Puisque $\mathfrak{D}_A$ est dense dans $\mathcal{H}$ et comme $T\mathsf{B}$ et $\mathsf{B}T$ sont continus, nous avons nécessairement $T\mathsf{B} = \mathsf{B}T$. □

IV. Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints

Nous généralisons la notion de famille spectrale et surtout la notion d'intégrale qui s'y rapporte. Nous démontrons ensuite le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints. Dans la troisième section, nous traitons le théorème de Stone.

IV.1. Intégration par rapport à une famille spectrale

Nous généralisons la notion de famille spectrale pour les besoins de la théorie spectrale des opérateurs non bornés. À l'aide de la théorie de l'intégration de Lebesgue, nous définissons l'intégrale par rapport à une famille spectrale pour un ensemble très général de fonctions. Cette définition étend celle adoptée au Chapitre 2.

Nous commençons par généraliser la notion de famille spectrale formulée dans la Définition II.3.1 en remplaçant dans celle-ci la condition iv) par la condition plus faible suivante :

iv)' pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda x = x.$$

Nous établissons le résultat préliminaire suivant dont la preuve a été partiellement donnée lors de la démonstration du théorème spectral pour les opérateurs symétriques bornés.

Lemme IV.1.1. *Soit $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant les points* i) *et* ii) *de la définition d'une famille spectrale (cf. Définition II.3.1). Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, il existe des projections $E_{\mu+0}$ et $E_{\mu-0}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{H}$,*

$$\lim_{\lambda \nearrow \mu} E_\lambda x = E_{\mu-0} x \quad \textit{et} \quad \lim_{\lambda \searrow \mu} E_\lambda x = E_{\mu+0} x.$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$ la fonction $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x, x\rangle$ est une fonction réelle positive et décroissante de λ. Elle admet donc une limite à droite

$$\lim_{\lambda \searrow \mu} \langle E_\lambda x, x\rangle = \inf_{\lambda > \mu} \langle E_\lambda x, x\rangle = l_\mu.$$

Donc pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\langle E_\lambda x, x\rangle - l_\mu < \frac{1}{2}\eta$ si $0 < \lambda - \mu < \delta$. Il s'ensuit que, pour tous $\mu - \delta < \lambda < \nu < \mu$, nous avons :

$$\|E_\nu x - E_\lambda x\|^2 = \left\langle (E_\nu - E_\lambda)^2 x, x\right\rangle = \langle (E_\nu - E_\lambda)x, x\rangle \leq |\langle E_\nu x, x\rangle - l_\mu| + |l_\mu - \langle E_\lambda x, x\rangle| < \eta.$$

Ainsi, par la complétude de $\mathcal{H}$, la limite

$$\lim_{\lambda \searrow \mu} E_\lambda x = E_{\mu+0} x \quad \text{existe pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

L'opérateur $E_{\mu+0}$ ainsi défini est clairement linéaire. Il est de plus symétrique, car pour tous $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle E_{\mu+0} x, y\rangle = \lim_{\lambda \searrow \mu} \langle E_\lambda x, y\rangle = \lim_{\lambda \searrow \mu} \langle x, E_\lambda y\rangle = \langle x, E_{\mu+0}\rangle .$$

Il vérifie de plus $E_{\mu+0}^2 = E_{\mu+0}$, puisque pour tous $x, y \in \mathcal{H}$

$$\left\langle E_{\mu+0}^2 x, y\right\rangle = \langle E_{\mu+0} x, E_{\mu+0} y\rangle = \lim_{\lambda \searrow \mu} \langle E_\lambda x, E_\lambda y\rangle = \lim_{\lambda \searrow \mu} \langle E_\lambda x, y\rangle = \langle E_{\mu+0} x, y\rangle .$$

Le cas de la limite à gauche est similaire. $\square$

Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille spectrale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} F_x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \langle E_\lambda x, x\rangle = \|E_\lambda x\|^2 , \end{aligned}$$

est croissante et continue à gauche et vérifie de plus :

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F_x(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to \infty} F_x(\lambda) = \|x\|^2 .$$

Nous pouvons en particulier associer à chaque fonction F_x sa mesure de Lebesgue-Stieltjes μ_{F_x} que nous notons dans ce contexte $\mu_{\|E_\lambda x\|^2}$ (cf. B.1). Nous adoptons alors la définition suivante.

Définition IV.1.2. Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille spectrale. Une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite E**-mesurable** si elle est $\mu_{\|E_\lambda x\|^2}$-mesurable pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Il est important de noter que la portée de cette définition est très grande. En effet, toutes les fonctions Borel-mesurables sont E-mesurables pour n'importe quelle famille spectrale E.

Notre but est à présent de définir une intégrale par rapport à une famille spectrale. Nous définissons, dans un premier temps, l'intégrale d'une fonction en escalier. Considérons donc une fonction en escalier :

$$t = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_{I_k} ,$$

où les c_k sont des nombres complexes et les χ_{I_k} sont des fonctions indicatrices d'intervalles réels non vides d'une des formes suivantes :

$$(a_k, b_k), \quad [a_k, b_k), \quad (a_k, b_k], \quad [a_k, b_k].$$

Nous définissons l'intégrale de t par rapport à une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ comme :

$$\int_{\mathbb{R}} t(\lambda) dE_\lambda = \sum_{k=0}^{n} c_k E(I_k),$$

où

$$\begin{aligned} E\big([a,b]\big) &= E_{b+0} - E_a \\ E\big([a,b)\big) &= E_b - E_a \\ E\big((a,b]\big) &= E_{b+0} - E_{a+0} \\ E\big((a,b)\big) &= E_b - E_{a+0}. \end{aligned}$$

Nous avons pour toute fonction en escalier t :

$$\begin{aligned} \Big\| \int t(\lambda) dE_\lambda x \Big\|^2 &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} c_k E(I_k)x, \sum_{j=0}^{n} c_j E(I_j)x \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_k \bar{c}_j \left\langle E(I_k)x, E(I_j)x \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \left\langle E(I_k)x, x \right\rangle \\ &= \int |t(\lambda)|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda x\|^2}, \end{aligned}$$

où le dernier membre est une intégrale au sens de Lebesgue-Stieltjes (cf. Annexe B). Nous avons adopter ici la convention selon laquelle, lorsque les bornes de l'intégrale sont omises, l'intégrale est comprise sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Considérons maintenant une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ E-mesurable. En se servant du Théorème B.3.1, pour tout $x \in \mathcal{H}$ tel que $u \in L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$, il existe une suite de fonctions en escaliers $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers u dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $m, n \geq N$

$$\Big\| \int t_n(\lambda) dE_\lambda x - \int t_m(\lambda) dE_\lambda x \Big\|^2 = \int |t_n(\lambda) - t_m(\lambda)|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} < \varepsilon^2.$$

La suite $\big(\int t_n(\lambda) dE_\lambda x\big)_{n=0}^{\infty}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Elle converge donc et nous définissons

$$\int u(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \int t_n(\lambda) dE_\lambda x,$$

qui est indépendant du choix de la suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$.

En notant $\mathfrak{D}_{E(u)} = \{x \in \mathcal{H} \mid u \in L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})\}$, nous avons défini une fonction :

$$\begin{aligned} E(u) : D &\to \mathcal{H} \\ x &\mapsto \int u(\lambda) dE_\lambda x. \end{aligned}$$

Nous notons également

$$\int u(\lambda) dE_\lambda$$

cette fonction et nous la dénommons par l'**intégrale de u par rapport à la famille spectrale** E. Le théorème suivant décrit les principales propriétés de cette fonction.

Théorème IV.1.3. *Soit $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une famille spectrale et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction E-mesurable. La fonction $E(u)$ est un opérateur **normal**, c'est-à-dire tel que $E(u)E(u)^* = E(u)^*E(u)$.*

a) Pour tout $x \in \mathfrak{D}_{E(u)}$,

$$\|E(u)x\|^2 = \int |u|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda x\|^2};$$

et en fait cette indentité charactérise $\mathfrak{D}_{E(u)}$.

b) Si u est bornée, alors $\mathfrak{D}_{E(u)} = \mathcal{H}$, $E(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et

$$\|E(u)\| \leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} |u(\lambda)|\,;$$

c) Si $u(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $E(u) = I$.

d) Pour tout $x \in \mathfrak{D}_{E(u)}$,

$$\langle E(u)x, x\rangle = \int u(\lambda) d\mu_{\|E_\lambda x\|^2};$$

e) Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et toute fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ E-mesurable,

$$aE(u) + bE(v) \subseteq E(au + bv) \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{E(u)+E(v)} = \mathfrak{D}_{E(|u|+|v|)}.$$

f) Si $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est E-mesurable,

$$E(u)E(v) \subseteq E(uv) \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{E(u)E(v)} = \mathfrak{D}_{E(v)} \cap \mathfrak{D}_{E(uv)};$$

g) Nous avons

$$E(\bar{u}) = E(u)^* \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{E(u)^*} = \mathfrak{D}_{E(u)}.$$

h) Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,

$$E_\mu E(u) \subseteq E(u)E_\mu,$$

et nous avons l'égalité notamment si u est bornée.

Démonstration. *h).* Fixons $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrairement. Pour $x \in \mathfrak{D}_{E(u)}$, considérons une suite de fonctions en escalier

$$t_n = \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n \chi_{I_k^n} \quad n \geq 1,$$

qui converge vers u dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$. La projection E_μ commute avec chaque E_λ et aussi avec chaque $E_{\lambda+0}$ puisque pour tout $y \in \mathcal{H}$

$$E_\mu E_{\lambda+0} y = \lim_{\kappa \searrow \lambda} E_\mu E_\lambda y = \lim_{\kappa \searrow \lambda} E_\lambda E_\mu y = E_{\lambda+0} E_\mu y.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_\mu E(u)x &= E_\mu \Big(\lim_{n\to\infty} \int t_n(\lambda) dE_\lambda x \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n E_\mu E(I_k^n) x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} c_k^n E(I_k^n) E_\mu x = E(u) E_\mu x. \end{aligned}$$

Par conséquent, $E_\mu E(u) \subseteq E(u) E_\mu$. Si, de plus, u est bornée, alors $\mathfrak{D}_{E(u)} = \mathcal{H}$ et donc nous avons l'égalité. □

Revenons à présent sur le cas où $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille spectrale au sens de notre première définition. Il existe donc $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$E_\lambda = 0 \text{ pour tout } \lambda < m \quad \text{et} \quad E_\lambda = I \text{ pour tout } \lambda > M.$$

Considérons également une fonction réelle continue $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ étendue continûment à $[m, M+\varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$. Nous étendons f à $\mathbb{R}$ en posant $f(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[m, M+\varepsilon]$. Considérons alors une partition $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n$ de $[m, M+\varepsilon]$. La somme

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}})$$

peut s'écrire comme l'intégrale, selon notre nouveau sens, de la fonction en escalier :

$$t_\Pi = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \chi_{[\lambda_{k-1}, \lambda_k)},$$

de sorte que :

$$S_\Pi = \int t_\Pi(\lambda) dE_\lambda.$$

On voit aisément que lorsque $(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de partitions telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$, alors la suite des fonctions en escalier t_{Π_n} converge vers f dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$

pour tout $x \in \mathcal{H}$. Il s'ensuit par notre nouvelle définition, d'une part, et par le Lemme II.3.2, d'autre part, que pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$E(f)x = \int f(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \int t_{\Pi_n}(\lambda) dE_\lambda x = \lim_{n\to\infty} S_{\Pi_n} x = \int_m^{M+\varepsilon} f(\lambda) dE_\lambda x.$$

La nouvelle définition d'intégrale par rapport à une famille spectrale coïncide donc avec notre première définition.

Si A est un opérateur borné et symétrique et $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est sa famille spectrale, nous faisons la définition suivante. Soit $u : [m, M] \to \mathbb{C}$ une fonction dont l'extension à $\mathbb{R}$ donnée par $u(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[m, M]$ est E-mesurable. L'opérateur $u(A)$ est défini comme

$$u(A) = E(u) = \int u(\lambda) dE_\lambda.$$

En particulier, les fonctions de A ont les propriétés suivantes.

Théorème IV.1.4. *Soit A un opérateur borné et symétrique et soit $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sa famille spectrale. Soient également $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions E-mesurables telles que $u(\lambda) = v(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash[m, M]$.*

a) si u est bornée, alors $u(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et

$$\|u(A)\| \le \sup_{\lambda\in[m,M]} |u(\lambda)| \,;$$

b) si u et v sont bornées, alors

$$u(A)v(A) = E(uv) = \int_m^{M+\varepsilon} u(\lambda)v(\lambda) dE_\lambda;$$

c) $u(A)^* = \bar{u}(A)$;

d) tout opérateur borné qui commute avec A commute avec $u(A)$.

Démonstration. Les points a) à c) sont des conséquences immédiates du Théorème IV.1.3.

d). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $TA = AT$. Par le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques (cf. Théorème II.3.4), T commute avec chaque E_λ et donc aussi avec chaque $E_{\lambda+0}$. Pour tout $x \in \mathfrak{D}_{u(A)}$, considérons alors une suite de fonctions en escalier $(t_n)_{n=1}^\infty$ qui converge vers u dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} Tu(A)x = T\int u(\lambda) dE_\lambda x &= T \lim_{n\to\infty} \int t_n(\lambda) dE_\lambda x \\ &= \lim_{n\to\infty} T \sum_{k=0}^{m_n} c_k E(I_k)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} c_k E(I_k)Tx \\ &= \int u(\lambda) dE_\lambda Tx = u(A)Tx, \end{aligned}$$

et donc $Tu(A) = u(A)T$. □

IV.2. Théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints

Nous abordons dans cette section le théorème principal de ce chapitre. Il existe plusieurs démonstrations basées sur des considérations en apparence très différentes de ce théorème. Nous exposons ici essentiellement la preuve de Riesz et Lorch comme rapportée dans [Riesz, 1955].

La démonstration que nous présentons donne une grande importance au résultat suivant.

Lemme IV.2.1. *Soit*

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_i, \dots$$

une suite de sous-espaces vectoriels fermés de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, orthogonaux deux à deux et dont la somme égale l'espace entier $\mathcal{H}$. Désignons par x_i la projection d'un élément quelconque $x \in \mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_i$.

Soit

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

une suite d'opérateurs telle que pour tout i la restriction $A_i|_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ est un opérateur borné et symétrique sur $\mathcal{H}_i$.

Il existe un unique opérateur autoadjoint $A : \mathfrak{D}_A \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui pour tout $i = 1, 2, \dots$ coïncide sur $\mathcal{H}_i$ avec A_i. Son domaine est constitué des éléments $x \in \mathcal{H}$ pour lesquels la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i x_i\|^2$$

converge, et pour ces x :

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} A_i x_i.$$

Démonstration. Observons tout d'abord que l'opérateur A ainsi défini est linéaire. Son domaine est dense dans $\mathcal{H}$ car pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 1$ de sorte que :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} x_i \right\| < \varepsilon,$$

et clairement $\sum_{i=1}^{N} x_i \in \mathfrak{D}_A$. De plus A est symétrique, car par la continuité et la linéarité du produit scalaire, et du fait que les $\mathcal{H}_i$ sont orthogonaux deux à deux, pour tous $x, y \in \mathfrak{D}_A$,

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i x_i, y_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, A_i y_i \rangle = \langle x, Ay \rangle .$$

Afin de montrer que l'opérateur A est en fait autoadjoint, montrons que $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A^*}$. Dans ce but, considérons un élément quelconque $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$ du domaine de A^*. Pour tout élément $x \in \mathfrak{D}_A$, nous avons

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle ,$$

et donc en décomposant par rapport aux $\mathcal{H}_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i x_i, y_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, (A^* y)_i \rangle .$$

En particulier, quelque soit $j \geq 1$, nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}_j$ que :

$$\langle A_j x, y_j \rangle = \langle x, (A^* y)_j \rangle .$$

Or, A_j est supposé borné et symétrique sur $\mathcal{H}_j$, et donc nécessairement :

$$(A^* y)_j = A_j y_j \in \mathcal{H}_j. \tag{IV.1}$$

Il découle alors du théorème de Pythagore que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|(A^* y)_i\|^2 = \|A^* y\|^2 ,$$

et ainsi $y \in \mathfrak{D}_A$ et donc, comme y est arbitraire dans $\mathfrak{D}_{A^*}$, nous avons $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A^*}$.

Montrons finalement l'unicité d'un tel opérateur autoadjoint. Soit A' un opérateur autoadjoint qui coïncide sur $\mathcal{H}_i$ avec A_i et cela pour tout $i = 1, 2, \ldots$. En tant qu'opérateur autoadjoint, A' est fermé et se trouve donc être défini en chaque $x \in \mathcal{H}$ pour lequel la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} A' x_i \tag{IV.2}$$

converge. La série égale dans ce cas $A'x$. Or $A' x_i = A_i x_i$ et la convergence d'une série d'éléments orthogonaux et équivalente à la convergence de la série des carrés des normes. Ainsi, l'ensemble des x pour lesquels la série (IV.2) converge égale $\mathfrak{D}_A$ et pour ces x nous avons clairement :

$$A'x = Ax.$$

Cela signifie que $A \subseteq A'$, mais puisque A est autoadjoint et par conséquent maximal symétrique, nécessairement

$$A' = A. \qquad \square$$

Le lemme suivant est en quelque sorte la réciproque du lemme qui précède. Ce résultat permet de déduire le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints du théorème spectral des opérateurs symétriques.

Lemme IV.2.2. *Soit A un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$. Il existe une suite*

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n, \ldots$$

de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$, orthogonaux deux à deux, dont la somme égale l'espace entier $\mathcal{H}$, telle que la restriction $A|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ de A est un opérateur borné et symétrique sur $\mathcal{H}_n$. En outre, la restriction à chaque $\mathcal{H}_n$ de tout opérateur borné T tel que $T \smile A$ est un opérateur borné sur $\mathcal{H}_n$.

Démonstration. Considérons les opérateurs du Théorème III.4.3 :

$$\mathsf{B} = (I + A^2)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathsf{C} = A\mathsf{B} = A(I + A^2)^{-1}.$$

L'opérateur B est borné symétrique est tel que $0 \leq \mathsf{B} \leq I$. Par le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques (II.3.4), B admet une unique famille spectrale $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ayant pour bornes 0 et 1 de sorte que :

$$\mathsf{B} = \int_0^{1+\varepsilon} \lambda dF_\lambda.$$

Montrons que la famille spectrale de B est en fait continue en $\lambda = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{H}$ $F_{0+0}x = \lim_{\lambda\searrow 0} F_\lambda x = F_0 x = 0$. Commençons par rappeler que, par le Théorème II.3.4, la limite forte F_{0+0} existe. Or, pour tout $\lambda > 0$, il existe une suite une suite réelle $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers 0 et telle que $0 < \mu_n < \lambda$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $F_\lambda F_{\mu_n} = F_{\mu_n}$ pour tout $n \geq 1$, nous avons par la continuité de F_λ que pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$F_\lambda F_{0+0}x = \lim_{n\to\infty} F_\lambda F_{\mu_n} x = F_{0+0}x.$$

Il s'ensuit que pour toute partition $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^m$ de $[0, 1+\varepsilon]$, nous avons :

$$\begin{aligned} S_\Pi F_{0+0} &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_{\lambda_k} - F_{\lambda_{k-1}}) F_{0+0} \\ &= \lambda_1 (F_{0+0} - F_0) + \sum_{k=2}^{m} \lambda_k (F_{0+0} - F_{0+0}) \\ &= \lambda_1 F_{0+0}. \end{aligned}$$

Ainsi en laissant $|\Pi| \to 0$, nous obtenons $\mathsf{B}F_{0+0} = 0$. Comme $\mathsf{B}\mathsf{B}^{-1} = I$, il s'ensuit que

$$F_{0+0} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{B}F_{0+0} = 0. \tag{IV.3}$$

Nous définissons alors les projections suivantes :

$$P_1 = F_{1+\varepsilon} - F_{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad P_n = F_{\frac{1}{n}} - F_{\frac{1}{n+1}} \text{ pour } n \geq 2.$$

Notons $\mathcal{H}_n$ les sous-espaces vectoriels fermés $\operatorname{Im} P_n$ associés à ces projections. Ces sous-espaces vectoriels sont orthogonaux deux à deux et leur somme égale $\mathcal{H}$ car, par (IV.3), nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = F_{1+\varepsilon} - F_{0+0} = I.$$

Il nous faut à présent montrer que A restreint à $\mathcal{H}_n$ est un opérateur borné et symétrique pour chaque $n \geq 1$. Par le Lemme III.3.3, si $P_n \smile A$, alors $P_n A P_n = A P_n$. Dans ce cas, si nous montrons que l'opérateur AP_n est partout défini et borné, le fait que A est autoadjoint implique alors que la restriction de A à $\mathcal{H}_n$ est un opérateur symétrique sur $\mathcal{H}_n$. Il nous suffit donc de voir que $P_n \smile A$ et que l'opérateur AP_n est partout défini et borné.

Pour ce faire, nous nous référons au Corollaire III.5.4 qui nous dit que $\mathsf{B} \smile A$ et $\mathsf{CB} = \mathsf{BC}$. Puisque C commute avec B, il découle alors par le point *b*) du théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques (Théorème II.3.4) que C commute avec chaque F_λ et donc avec chaque P_n. Par le point *d*) du Théorème IV.1.4, C commute aussi avec toutes les fonctions F-mesurables de l'opérateur B. Considérons alors les fonctions $s_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$s_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont évidemment F-mesurables et bornées. Par le Théorème IV.1.4,

$$s_n(\mathsf{B}) = \int_0^1 s_n(\lambda) dF_\lambda$$

est donc un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et nous avons

$$s_n(\mathsf{B})\mathsf{B} = \mathsf{B}s_n(\mathsf{B}) = \int_0^1 \lambda s_n(\lambda) dF_\lambda = \int \chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)} dF_\lambda = P_n.$$

Il s'ensuit que

$$AP_n = A\mathsf{B}s_n(\mathsf{B}) = \mathsf{C}s_n(\mathsf{B}),$$

ce qui montre que AP_n est partout défini est borné, car $\mathsf{C}s_n(\mathsf{B})$ l'est. Par ailleurs, comme $\mathsf{B} \smile A$

$$P_nA = s_n(\mathsf{B})\mathsf{B}A \subseteq s_n(\mathsf{B})A\mathsf{B} = s_n(\mathsf{B})\mathsf{C}.$$

Puisque C commute avec $s_n(\mathsf{B})$, nous avons obtenu

$$P_nA \subseteq s_n(\mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{C}s_n(\mathsf{B}) = AP_n,$$

c'est à dire $P_n \smile A$.

Considérons finalement un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T \smile A$. Il découle du point *d*) du Lemme III.5.4 que $T\mathsf{B} = \mathsf{B}T$. Par le Théorème IV.1.4, T commute donc avec chaque fonction de B, et donc avec chaque $P_n = \mathsf{B}s_n(\mathsf{B})$. Ainsi, nous avons bien $P_nTP_n = TP_n$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints.

Théorème IV.2.3. *Soit A un opérateur autoadjoint. Il existe une unique famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$A = \int \lambda dE_\lambda.$$

En outre, tout opérateur borné T tel que $T \smile A$, commute avec chaque E_λ.

Nous appelons $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, la **famille spectrale de** A.

Démonstration. Nous montrons l'existence. Par le Lemme IV.2.2, il existe des sous-espaces vectoriels fermés

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_n, \ldots$$

orthogonaux deux à deux dont la somme égale l'espace $\mathcal{H}$ tout entier pour chacun desquels la restriction A_n de A à $\mathcal{H}_n$ est un opérateur défini partout, borné et symétrique sur $\mathcal{H}_n$. Par le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques, il existe pour chaque $n \geq 1$ une unique famille spectrale sur $\mathcal{H}_n$ que nous désignons par $\{E_{\lambda,n}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, de sorte que

$$A_n = \int_{m_n}^{M_n+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda,n}.$$

Maintenant, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, chaque $E_{\lambda,n}$ est un opérateur borné et symétrique sur $\mathcal{H}_n$ en tant que projection. Il existe donc par le Lemme IV.2.1 un opérateur autoadjoint E_λ qui se réduit en chaque $\mathcal{H}_n$ à $E_{\lambda,n}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous montrons que le domaine de E_λ égale l'espace entier $\mathcal{H}$. En effet, pour tout $x \in \mathcal{H}$, en notant x_n sa projection sur $\mathcal{H}_n$, il découle du fait que la norme d'une projection égale 1 et du théorème de Pythagore que

$$\sum_{n=1}^{m} \|E_{\lambda,n}x_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} \|x_n\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n \right\|^2.$$

Ainsi en laissant $m \to \infty$, nous obtenons par la continuité de la norme que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|E_{\lambda,n}x_n\|^2 \leq \|x\|^2,$$

et donc $x \in \mathfrak{D}_{E_\lambda}$. Puisque E_λ est autoadjoint, son graphe est fermé et comme il est défini partout, il est donc borné. C'est donc un opérateur borné et symétrique. Nous montrons ensuite que $E_\lambda^2 = E_\lambda$ et avec ce qui précède, cela nous assure que E_λ est une projection. En effet, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x_n \in \mathcal{H}_n$,

$$E_\lambda^2 x_n = E_{\lambda,n}^2 x_n = E_{\lambda,n}x_n = E_\lambda x_n.$$

Les opérateurs autoadjoints E_λ^2 et E_λ coïncident donc sur tous les $\mathcal{H}_n$. Ainsi, nécessairement $E_\lambda^2 = E_\lambda$.

Montrons maintenant que pour tout $\lambda < \mu$, nous avons $E_\lambda \leq E_\mu$. À cette fin, considérons $x \in \mathcal{H}$ et ses projections x_n dans chacun des $\mathcal{H}_n$. Nous avons

$$\left\langle (E_\lambda - E_\mu) \sum_{n=1}^{m} x_n, \sum_{n=1}^{m} x_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{m} \langle (E_{\lambda,n} - E_{\mu,n})x_n, x_n \rangle \geq 0,$$

et donc, en laissant $m \to \infty$, par la continuité de $E_\lambda - E_\mu$ et du produit scalaire,

$$\langle (E_\lambda - E_\mu)x, x \rangle \geq 0.$$

Nous montrons ensuite que la famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est fortement continue à gauche. Par le Lemme IV.1.1, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la limite ponctuelle à gauche $E_{\mu-0}$ est une projection. Il suffit de voir que $E_{\mu-0}$ et E_μ coïncide sur chacun des $\mathcal{H}_n$. Ceci est évident, puisque pour tout $x_n \in \mathcal{H}_n$,

$$E_{\mu-0}x_n = \lim_{\lambda\nearrow\mu} E_\lambda x_n = \lim_{\lambda\nearrow\mu} E_{\lambda,n}x_n = E_{\mu,n}x_n = E_\mu x_n.$$

Pour montrer que $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille spectrale, il reste à voir que, pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda x = x. \tag{IV.4}$$

Rappelons tout d'abord que pour chaque $n \geq 1$, la famille spectrale $\{E_{\lambda,n}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est bornée par les bornes m_n et M_n de A_n. Fixons $x \in \mathcal{H}$ et soit $\varepsilon > 0$. Notons toujours x_n les projections de x sur chaque $\mathcal{H}_n$. Il existe $N_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\Big\| \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \Big\| < \varepsilon,$$

et comme $\|E_\lambda\| = 1$,

$$\begin{aligned} \|E_\lambda x\| &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n \Big\| + \Big\| E_\lambda \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \Big\| \\ &< \Big\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n \Big\| + \varepsilon. \end{aligned} \tag{IV.5}$$

En posant $m_\varepsilon = \inf_{1\leq n\leq N_\varepsilon} m_n$, nous avons $\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n = 0$ pour tout $\lambda \leq m_\varepsilon$. Il découle alors de (IV.5) que

$$\|E_\lambda x\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \lambda \leq m_\varepsilon,$$

ce qui montre la première assertion de (IV.4).

D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 1$ tel que $\big\| \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \big\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ et donc

$$\begin{aligned} \|E_\lambda x - x\| &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n - x_n \Big\| + \Big\| (E_\lambda - I) \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \Big\| \\ &\leq \Big\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n - x_n \Big\| + 2 \Big\| \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} x_n \Big\| \\ &< \Big\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n - x_n \Big\| + \varepsilon. \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Ainsi, en posant $M_\varepsilon = \max_{1\le n\le N_\varepsilon} M_n$, nous avons

$$\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} E_{\lambda,n}x_n = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} x_n \quad \text{pour tout } \lambda \ge M_\varepsilon,$$

et il découle alors de (IV.6) que

$$\Big\| E_\lambda x - x \Big\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \lambda \ge M_\varepsilon.$$

Ceci montre donc la deuxième assertion de (IV.4).

Nous montrons ensuite que la famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifie

$$A = \int \lambda dE_\lambda.$$

Le Théorème IV.1.3 nous assure que $\int \lambda dE_\lambda$ est un opérateur autoadjoint puisque $u(\lambda) = \lambda$ est à valeurs réelles. Il nous suffit donc, par le Lemme IV.2.1, de voir que $\int \lambda dE_\lambda$ et A coïncide sur les $\mathcal{H}_n$. Pour voir cela, observer que pour tout $x_n \in \mathcal{H}_n$, si $(t_l)_{l=1}^\infty$ est une suite de fonctions en escalier donnée par

$$t_l = \sum_{k=1}^{p_l} r_k^l \chi_{I_k^l} \quad \text{pour tout } l \ge 1,$$

qui converge vers $u(\lambda) = \lambda$ dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x_n\|^2})$, alors

$$\begin{aligned} \int \lambda dE_\lambda x_n &= \lim_{l\to\infty} \int t_l(\lambda) dE_\lambda x_n = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{p_l} r_k^l E(I_k^l) x_n \\ &= \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{p_l} r_k^l E_n(I_k^l) x_n = \int \lambda dE_{\lambda,n} x_n \\ &= \int_{m_n}^{M_n+\varepsilon} \lambda dE_{\lambda,n} x_n = A_n x_n = A x_n, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que si, par exemple, $I = [a,b]$, alors

$$E(I)x_n = (E_{b+0} - E_a)x_n = (E_{b+0,n} - E_{a,n})x_n = E_n(I)x_n.$$

Finalement, considérons un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T \smile A$ et montrons que T commute avec chaque E_λ. Par le Lemme IV.2.2, pour chaque $n \ge 1$, la restriction T_n de T à $\mathcal{H}_n$ est un opérateur sur $\mathcal{H}_n$, c'est-à-dire $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Sur chaque $\mathcal{H}_n$, l'opérateur T_n commute alors avec A_n dans le sens où $A_nT_n = T_nA_n$. Par le théorème spectral pour les opérateurs bornés et symétriques (cf. Théorème II.3.4), chaque T_n commute alors avec $E_{\lambda,n}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, nous avons

$$TE_\lambda x = T \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E_{\lambda,n}x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E_{\lambda,n}T_n x_n = E_\lambda T x.$$

Reste à montrer l'unicité ! ! $\square$

Comme nous l'avons fait pour les opérateurs bornés et symétriques, nous définissons une fonction d'un opérateur autoadjoint. Soient A un opérateur autoadjoint et $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sa famille spectrale. Pour toute fonction E-mesurable u, nous adoptons la notation suivante

$$u(A) = E(u) = \int u(\lambda)dE_\lambda.$$

Le résultat suivant établit le lien entre les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint et sa famille spectrale.

Théorème IV.2.4. *Soient A un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ et $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sa famille spectrale. Il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tels que $Ax = \kappa x$ si et seulement si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ n'est pas fortement continue en $\lambda = \kappa$. En outre,*

$$\ker(A - \kappa I) = \operatorname{Im}(E_{\kappa+0} - E_\kappa).$$

Démonstration. $\Rightarrow$. Soient $\kappa \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tels que $Ax = \kappa x$. Nous avons par le point a) du Théorème IV.1.3 que

$$0 = \|(A - \kappa I)x\|^2 = \int |\lambda - \kappa|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda x\|^2}.$$

Par conséquent, la fonction $\lambda \mapsto |\lambda - \kappa|$ est nulle presque partout par rapport à la mesure $\mu_{\|E_\lambda x\|^2}$. Il s'ensuit que la fonction $\lambda \mapsto E_\lambda x$ est constante sur $(-\infty, \kappa)$ et sur (κ, ∞). Nécessairement, nous avons $E_\lambda x = 0$ pour tout $\lambda \leq \kappa$ et $E_\lambda x = x$ pour tout $\lambda > \kappa$. Ainsi, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ n'est pas fortement continue en κ et $\ker(A - \kappa I) \subseteq \operatorname{Im}(E_{\kappa+0} - E_\kappa)$.

$\Leftarrow$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im}(E_{\kappa+0} - E_\kappa)$, nous avons clairement

$$\|(A - \kappa I)x\|^2 = \int |\lambda - \kappa|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} = 0,$$

et donc $\ker(A - \kappa I) \supseteq \operatorname{Im}(E_{\kappa+0} - E_\kappa)$. De plus, si $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ n'est pas fortement continue en $\lambda = \kappa$, alors $\operatorname{Im}(E_{\kappa+0} - E_\kappa) \neq \{0\}$ et donc il existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ tel que $Ax = \kappa x$. □

Le théorème précédent s'applique, en particulier, au cas où A est en fait borné et symétrique. Dans ce cas aussi, les valeurs propres de l'opérateur sont les points de discontinuités de sa famille spectrale. Les espaces propres associés sont les sauts correspondant de la famille spectrale.

Exemple IV.2.5. Nous continuous l'Exemple II.3.7 et déterminons maintenant la famille spectrale d'un certain opérateur sur $L_2(\mathbb{R}, \mu)$. Nous commençons par définir une famille spectrale avant de montrer à quel opérateur elle est associée.

Nous montrons que la famille d'opérateurs sur $L_2(\mathbb{R}, \mu)$ définis par

$$E_\lambda f = \chi_{(-\infty,\lambda)} f \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } f \in L_2(\mathbb{R}, \mu),$$

est une famille spectrale. Chaque E_λ est clairement une projection et nous voyons aisément que si $s < t$, alors pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$

$$\langle (E_t - E_s)f, f\rangle = \int \big(\chi_{(-\infty,t)}(x) - \chi_{(-\infty,s)}(x)\big)\, |f(x)|^2\, d\mu(x) = \int_s^t |f(x)|^2\, d\mu(x) \geq 0,$$

et donc $E_s \leq E_t$.

Nous montrons maintenant que la famille $\{E_\lambda\}$ est fortement continue à gauche. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n=1}^\infty$ une suite réelle positive telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nous avons, pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$\|(E_t - E_{t-a_n})f\|^2 = \int \big(\chi_{(-\infty,t)}(x) - \chi_{(-\infty,t-a_n)}(x)\big)\, |f(x)|^2\, d\mu(x) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'une part,

$$0 \leq \big(\chi_{(-\infty,t)}(x) - \chi_{(-\infty,t-a_n)}(x)\big)\, |f(x)|^2 \leq |f(x)|^2 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

et d'autre part,

$$\big(\chi_{(-\infty,t)}(x) - \chi_{(-\infty,t-a_n)}(x)\big)\, |f(x)|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

il découle du théorème de convergence dominée (cf. Théorème B.2.5) que

$$(E_t - E_{t-a_n})f \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Comme la suite a_n est arbitraire, nous avons, pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$, que

$$\lim_{s \nearrow t} E_s f = E_t f.$$

De la même façon, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \chi_{(-\infty,t)}(x) &\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \to -\infty, \text{ et} \\ \chi_{(-\infty,t)}(x) &\longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } t \to \infty, \end{aligned}$$

nous obtenons par le théorème de convergence dominée que, pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$\lim_{t\to-\infty} E_t f = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} E_t f = f.$$

La famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est donc bien une famille spectrale. Nous nous proposons donc de calculer l'opérateur autoadjoint :

$$X = \int \lambda dE_\lambda.$$

Pour toute fonction en escalier $t = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_{I_k}$ nous avons, pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Big(\int t(\lambda) dE_\lambda f\Big) x = \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k E(I_k) f\Big) x \tag{IV.7}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_{I_k}(x) f(x) \tag{IV.8}$$

$$= t(x) f(x). \tag{IV.9}$$

Par conséquent, en notant $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ l'identité sur $\mathbb{R}$, nous avons

$$\mathfrak{D}_X = \{f \in L_2(\mathbb{R}, \mu) \mid \mathrm{id}_{\mathbb{R}} f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)\}$$

et pour tout $f \in \mathfrak{D}_X$,

$$Xf(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} f(x) = x f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En effet, soit $f \in \mathfrak{D}_X$. Il existe une suite $\{t_n\}_n$ de fonctions en escaliers telle que $t_n(\lambda)$ converge vers λ dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda f\|^2})$, i.e. telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |t_n(\lambda) - \lambda|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda f\|^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Maintenant, par (IV.7),

$$(Xf)(x) = \lim_{n\to\infty} (t_n f)(x)$$

et l'on sait que cette limite existe dans $L_2(\mathbb{R}, \mu)$ par définition de Xf et qu'elle est indépendante de $\{t_n\}_n$. Or cette limite est précisément $xf(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |t_n(\lambda) - \lambda|^2 \, d\mu_{\|E_\lambda f\|^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |t_n(\lambda) - \lambda|^2 \, |f(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |t_n(\lambda) f(\lambda) - \lambda f(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda), \end{aligned}$$

car $\|E_\lambda f\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |f(x)|^2 \, d\mu(x)$ et donc $d\mu_{\|E_\lambda f\|^2} = \frac{d}{d\lambda} \|E_\lambda f\|^2 \, d\mu(\lambda) = |f(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda)$.

IV.3. Théorème de Stone

Nous abordons dans cette section les groupes unitaires à un paramètre et le théorème de Stone. Ce résultat mathématique possède une très belle interprétation en mécanique quantique que nous discutons au chapitre suivant.

Nous commençons par définir la notion d'opérateur unitaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Un opérateur U sur $\mathcal{H}$ est **unitaire** s'il est surjectif et si pour tous $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Un opérateur unitaire est de norme 1. De façon équivalente, un opérateur $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est unitaire si

$$UU^* = I.$$

Un opérateur unitaire U est bijectif et son inverse égale son adjoint, i.e. $U^* = U^{-1}$.

Remarque IV.3.1. Vue entre deux espaces de Hilbert quelconques, la notion d'opérateur unitaire correspond au concept d'isomorphisme associé à la structure d'espace de Hilbert. En d'autres termes, les opérateurs unitaires entre espaces de Hilbert représentent exactement les fonctions qui conservent complètement la structure de ces espaces.

Nous définissons maintenant l'objet d'étude de cette section.

Définition IV.3.2. Un **groupe unitaire (à un paramètre)** est une fonction $U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $U(t) = U_t$ est unitaire pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et

$$U_0 = I \quad \text{et} \quad U_t U_s = U_{t+s} \quad \text{pour tous } t, s \in \mathbb{R}.$$

Un groupe unitaire à un paramètre est dit **fortement continu** si, pour tout $x \in \mathcal{H}$, la fonction

$$\begin{aligned} Ux : \mathbb{R} &\to \mathcal{H} \\ t &\mapsto U_t x \end{aligned}$$

est continue.

Il découle directement de la définition d'un groupe unitaire que pour tout groupe unitaire $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ nous avons

$$U_{-t} = (U_t)^* = (U_t)^{-1}.$$

Observer aussi que, si nous demandons à un groupe unitaire $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ d'être faiblement continu, dans le sens où pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, la fonction

$$\begin{aligned} \langle Ux, y \rangle : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \langle U_t x, y \rangle \end{aligned}$$

est continue, alors le groupe unitaire est, en fait, fortement continu. En effet, cela découle du fait que pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|Ux(t) - Ux(s)\|^2 &= \|U_t x\|^2 + \|U_s x\|^2 - \langle U_t x, U_s x \rangle - \langle U_s x, U_t x \rangle \\ &= 2\,\|x\|^2 - \langle U_{t-s} x, x \rangle - \overline{\langle U_{t-s} x, x \rangle} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } s \to t. \end{aligned}$$

L'objet que nous définissons maintenant est au cœur de la notion des groupes unitaires fortement continus pour des raisons qui seront éclaircies par la suite.

Définition IV.3.3. Soit $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe unitaire fortement continu. Le **générateur infinitésimal** de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est l'opérateur G défini sur le domaine

$$\mathfrak{D}_G = \{x \in \mathcal{H} \mid \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B_t - I)x \text{ existe}\}$$

par

$$Gx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B_t - I)x.$$

Nous commençons par établir le résultat suivant.

Théorème IV.3.4. *Soient A un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ et $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sa famille spectrale. La formule*

$$U_t = e^{itA} = \int e^{it\lambda} dE_\lambda \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

définit un groupe unitaire fortement continu dont le générateur infinitésimal égale iA. En outre, si $x \in \mathfrak{D}_A$, alors $U_t x \in \mathfrak{D}_A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Par le Théorème IV.1.3, comme la fonction $u(\lambda) = e^{it\lambda}$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U_t^* = \int \overline{e^{it\lambda}} dE_\lambda = \int e^{-it\lambda} dE_\lambda = U_{-t},$$

et donc,

$$U_t U_t^* = U_t U_{-t} = \int e^{it\lambda} e^{-it\lambda} dE_\lambda = \int 1 dE_\lambda = I.$$

Ainsi, chaque U_t est unitaire et nous avons aussi, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,

$$U_t U_s = \int e^{it\lambda} e^{is\lambda} dE_\lambda = \int e^{i(t+s)\lambda} dE_\lambda = U_{t+s}.$$

Par conséquent, $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe unitaire. Nous montrons qu'il est fortement continu. Puisque nous avons pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ l'identité

$$\left|e^{ix} - e^{iy}\right| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right|,$$

il s'ensuit que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ par le Théorème IV.1.3

$$\begin{aligned}
\|U_t x - U_s x\|^2 &= \left\| \int (e^{it\lambda} - e^{is\lambda}) dE_\lambda x \right\|^2 \\
&= \int \left| e^{it\lambda} - e^{is\lambda} \right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} \\
&= 4 \int \left| \sin \frac{(t-s)\lambda}{2} \right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2}.
\end{aligned}$$

Or, comme

$$\left|\sin\frac{(t-s)\lambda}{2}\right|^2 \le 1 \quad \text{et} \quad \lim_{s\to t}\left|\sin\frac{(t-s)\lambda}{2}\right|^2 = 0,$$

il découle du théorème de convergence dominée (Théorème B.2.5) que

$$\lim_{s\to t}\|U_t x - U_s y\| = 0,$$

et comme $x \in \mathcal{H}$ est arbitraire, $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est fortement continu.

Montrons maintenant que le générateur infinitésimal G de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ égale l'opérateur iA. Pour commencer, observons que pour tout $x \in \mathfrak{D}_A$ et tout $t \neq 0$,

$$\left\|\left[\frac{1}{t}(U_t - I) - iA\right]x\right\|^2 = \int\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) - i\lambda\right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2}.$$

Or, comme

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) = i\lambda,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) - i\lambda\right|^2 = 0. \tag{IV.10}$$

Par ailleurs, par le théorème des accroissements finis $\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t}\right| \le |\lambda|$ et donc

$$\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) - i\lambda\right|^2 \le (|\lambda| + |\lambda|)^2 = 4\lambda^2. \tag{IV.11}$$

De plus, la fonction $4\lambda^2$ est $\mu_{\|E_\lambda x\|^2}$-intégrable pour tout $x \in \mathfrak{D}_A$, car, par définition de $\mathfrak{D}_A$,

$$\int \lambda^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} = \|Ax\|^2 < \infty.$$

Ainsi, il découle de (IV.10) et de (IV.11) par le Théorème de convergence dominée que pour tout $x \in \mathfrak{D}_A$,

$$\lim_{t\to 0}\left\|\left[\frac{1}{t}(U_t - I) - iA\right]x\right\|^2 = \lim_{t\to 0}\int\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1) - i\lambda\right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} = 0,$$

et donc

$$Gx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - I)x = iAx \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{D}_A.$$

Nous avons ainsi obtenu $G \supseteq iA$. Pour avoir $G = iA$, il reste à voir que $\mathfrak{D}_G \subseteq \mathfrak{D}_A$. Dans ce but, considérons $x \in \mathfrak{D}_G$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{H}$ tel que la limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - I)x \quad \text{existe.}$$

Pour un tel x, nous avons également l'existence de la limite suivante :

$$\begin{aligned}
\|Gx\|^2 &= \lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}(U_t - I)x\right\|^2 \\
&= \lim_{t\to 0}\left\|\int \frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)dE_\lambda x\right\|^2 \\
&= \lim_{t\to\infty}\int \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2}.
\end{aligned}$$

Comme nous avons

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 = \lambda^2,$$

il découle du Lemme de Fatou (cf. Théorème B.2.4) que

$$\int \lambda^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} \leq \liminf_{t\to 0}\int \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} = \|Gx\|^2 .$$

La fonction $u(\lambda) = \lambda$ appartient donc à $L_2(\mathbb{R}, \mu_{\|E_\lambda x\|^2})$ et donc x appartient au domaine de A. Nous avons finalement obtenu $G = iA$.

Montrons finalement que si $x \in \mathfrak{D}_A$, alors $U_t x \in \mathfrak{D}_A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, observons tout d'abord que par le point h) du Théorème IV.1.3, $E_\lambda U_t = U_t E_\lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, comme de plus, chaque U_t est unitaire, nous avons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|E_\lambda(U_t x)\|^2 = \langle E_\lambda U_t x, E_\lambda U_t x\rangle = \langle U_t E_\lambda x, U_t E_\lambda x\rangle = \|E_\lambda x\|^2 .$$

Il s'ensuit que

$$\int \lambda^2 d\mu_{\|E_\lambda(U_t x)\|^2} = \int \lambda^2 d\mu_{\|E_\lambda x\|^2} < \infty,$$

et donc $U_t x \in \mathfrak{D}_A$. □

Théorème IV.3.5 (Théorème de Stone)**.** *Soit $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe unitaire fortement continu. Il existe un unique opérateur autoadjoint A tel que*

$$U_t = e^{itA} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En outre, $U_t \smile A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si A est un opérateur autoadjoint tel que $U_t = e^{itA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il découle du Théorème IV.3.4 que iA est le générateur infinitésimal du groupe unitaire $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ceci montre l'unicité et nous fournit par la même occasion une opportunité de montrer l'existence d'un tel opérateur autoadjoint.

À présent, nous notons G le générateur infinitésimal de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ et nous posons $A = -iG$. Nous allons montrer que A est essentiellement autoadjoint et que $U_t = e^{it\overline{A}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sous l'hypothèse de la validité de ces résultats, nous avons que $i\overline{A}$

est le générateur infinitésimal de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Par conséquent, $i\overline{A} = G = iA$ et donc A est autoadjoint. Il s'ensuit alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U_t = e^{it\overline{A}} = e^{itA}.$$

$\mathfrak{D}_A$ *est dense dans* $\mathcal{H}$. Notons $C_0^\infty(\mathbb{R})$ les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont infiniment différentiables à support compact. Pour chaque $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$

$$s \mapsto \phi(s)U_s x$$

est continue par le Théorème C.2.2. En nous référant à l'Appendice C, nous formons pour chaque $x \in \mathcal{H}$ et pour chaque $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ l'élément

$$x_\phi = \int_{a^\phi}^{b^\phi} \phi(s)U_s x ds,$$

où le support compact de ϕ est inclus dans l'intervalle fermé et borné $[a^\phi, b^\phi]$. Nous sous-entendons par la suite les bornes de l'intégrale. Nous formons l'ensemble

$$\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} = \{x_\phi \in \mathcal{H} \mid x \in \mathcal{H} \text{ et } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Pour tout $x_\phi \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t \neq 0$, par le Lemme C.2.1, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(U_t - I)x_\phi &= \int \phi(s)(U_{t+s} - U_s)x_\phi ds \\ &= \int \phi(s-t)U_s x_\phi ds - \int \phi(s)U_s x_\phi ds \\ &= \int \big(\phi(s-t) - \phi(s)\big)U_s x_\phi ds.\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que pour toute suite réelle $(t_n)_{n=1}^\infty$ telle que $t_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$

$$s \longmapsto \frac{1}{t_n}\big(\phi(s-t_n) - \phi(s)\big)U_s x_\phi, \quad n \geq 1,$$

converge uniformément vers la fonction continue

$$s \longmapsto -\phi'(s)U_s x_\phi,$$

lorsque $t_n \to 0$. Ainsi, par le Théorème C.2.3, il s'ensuit que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - I)x_\phi = -\int \phi'(s)U_s x ds \in \mathcal{H},$$

et puisque x_ϕ est arbitraire dans $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$, nous avons $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} \subseteq \mathfrak{D}_G$. Nous montrons à présent que $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{H}$. À cette fin, considérons une suite $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec les propriétés suivantes, pour tout $n \geq 1$,

$$\phi_n(s) \geq 0 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, \quad \phi_n(s) = 0 \text{ si } |s| \geq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int \phi_n(s)ds = 1.$$

Pour une telle suite, nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}$ par le Théorème C.2.2 et par la continuité forte du groupe $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ en $t = 0$

$$\|x_{\phi_n} - x\| = \left\| \int \phi_n(s)(U_s - I)xds \right\| \leq \int \phi_n(s)ds \sup_{t\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]} \|(U_t - I)x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

La suite $(x_{\phi_n})_{n=1}^{\infty}$ converge donc vers x dans $\mathcal{H}$ et puisque x est arbitraire, nous avons que l'adhérence de $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ égale $\mathcal{H}$. Le domaine de G qui égale le domaine de A est donc dense puisqu'il contient $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$.

$A = -iG$ est symétrique. Soient $x, y \in \mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_G$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\langle x, Ay\rangle = i\,\langle x, Gy\rangle &= \lim_{t\to 0} i\Big\langle x, \frac{1}{t}(U_t - I)y\Big\rangle \\
&= \lim_{t\to 0} i\Big\langle \frac{1}{t}(U_{-t} - I)x, y\Big\rangle = -i \lim_{t\to 0} \Big\langle \frac{1}{-t}(U_{-t} - I)x, y\Big\rangle \\
&= -i\,\langle Gx, y\rangle = \langle Ax, y\rangle\,.
\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(\pm iI - A)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Considérons $x \in \big(\mathrm{Im}(iI - A)\big)^\perp = \ker(iI + A^*)$. Observons maintenant que pour tout $y_\phi \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$U_t y_\phi = \int \phi(s)U_{t+s}yds = \int \phi(s - t)U_s yds, \tag{IV.12}$$

et donc $U_t y_\phi \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} \subseteq \mathfrak{D}_G$. Puisque $A^*x = -ix$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\langle x, U_t y_\phi\rangle &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\langle x, U_{t+h}y_\phi\rangle - \langle x, U_t y_\phi\rangle\Big) \\
&= \Big\langle x, \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U_h - I)U_t y_\phi\Big\rangle \\
&= \langle x, GU_t y_\phi\rangle = \langle G^*x, U_t y_\phi\rangle \\
&= \langle -iA^*x, U_t y_\phi\rangle \\
&= -\,\langle x, U_t y_\phi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f(t) = \langle x, U_t y_\phi\rangle$ est solution de l'équation différentielle $f' = -f$ dont la solution générale est $f(t) = f(0)e^{-t}$. Or, puisque U_t est unitaire et donc $\|U_t\| = 1$, la fonction $|f(t)| = |\langle x, U_t y_\phi\rangle|$ est bornée par $\|x\|\,\|y_\phi\|$. Donc, nécessairement $\langle x, y_\phi\rangle = f(0) = 0$ et comme y_ϕ est arbitraire dans $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ qui est dense dans $\mathcal{H}$, cela implique que $x = 0$. Nous avons donc obtenu que l'adhérence de $\mathrm{Im}(iI - A)$ égale $\mathcal{H}$ et l'assertion analogue pour $\mathrm{Im}(-iI - A)$ s'obtient de façon similaire. Par le Théorème III.5.3, l'opérateur A est donc essentiellement autoadjoint.

$U_t = e^{it\overline{A}}$. Puisque $\overline{A}$ est autoadjoint, il découle du Théorème IV.3.4 que la formule,

$$V_t = e^{it\overline{A}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

définit un groupe unitaire fortement continu dont le générateur infinitésimal est $i\overline{A}$. Fixons maintenant $x \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} \subseteq \mathfrak{D}_A \subseteq \mathfrak{D}_{\overline{A}}$. Le Théorème IV.3.4 nous dit aussi que $V_t x \in \mathfrak{D}_{\overline{A}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(V_{t+h} - V_t)x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(V_h - I)V_t x = i\overline{A}V_t x.$$

Puisque, nous avons aussi $U_t x \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par (IV.12), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \big[(U_{t+h} - V_{t+h}) - (U_t - V_t)\big]x &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(U_{t+h} - U_t)x - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(V_{t+h} - V_t)x \\ &= GU_t x - i\overline{A}V_t x \\ &= i\overline{A}(U_t - V_t)x.\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $U_t x - V_t x \in \mathfrak{D}_{\overline{A}}$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U_t x - V_t x\|^2 &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big\langle \big[(U_{t+h} - V_{t+h}) - (U_t - V_t)\big]x, (U_{t+h} - V_{t+h})x\big\rangle \\ &\qquad + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big\langle (U_t - V_t)x, \big[(U_{t+h} - V_{t+h}) - (U_t - V_t)\big]x\big\rangle \\ &= i\big\langle \overline{A}(U_t - V_t)x, (U_t - V_t)x\big\rangle - i\big\langle (U_t - V_t)x, \overline{A}(U_t - V_t)x\big\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque $\overline{A}$ est autoadjoint. La fonction $g(t) = \|(U_t - V_t)x\|^2$ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or, comme $g(0) = \|(U_0 - V_0)x\|^2 = 0$, nécessairement

$$U_t x = V_t x \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Mais comme $\mathcal{H}_{C_0^\infty(\mathbb{R})}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que U_t et V_t sont fortement continus, nous avons finalement

$$U_t = V_t = e^{it\overline{A}}.$$

$U_t \smile A$. Par le point f) du Théorème IV.1.3, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, à la fois

$$U_t A \subseteq \int \lambda e^{it\lambda} dE_\lambda$$

et

$$AU_t \subseteq \int \lambda e^{it\lambda} dE_\lambda.$$

Ainsi, puisque $\mathfrak{D}_{U_t A} \subseteq \mathfrak{D}_{AU_t}$, nous avons

$$U_t A \subseteq AU_t. \qquad \square$$

V. Évolution en mécanique quantique

Nous exposons dans ce chapitre une interprétation donnée par la physique quantique des résultats établis dans le chapitre précédent. Dans la première section, nous montrons en quoi les résultats du chapitre précédent contribuent à la formalisation de cette théorie physique. Dans la deuxième section, nous abordons une application simple du théorème de Stone.

V.1. Postulats de la mécanique quantique

La mécanique quantique étudie les systèmes physiques de petites dimension, i.e. dès l'échelle atomique. Une formulation précise de la théorie et de son champ d'application sortirait largement du cadre de ce travail.

Ce qui nous concerne dans ce chapitre est le fait que la mécanique quantique donne un sens physique à la théorie mathématique développé dans les chapitres précédents. Les théorèmes mathématiques prennent dans ce cadre une signification physique et nous renseignent sur le comportement des objets de la mécanique quantique.

La mécanique quantique étudie des systèmes physiques appelés dans ce cadre **systèmes quantiques**. Une configuration d'un système quantique à un instant donné est appelée un **état**. Une grandeur physique mesurable (associée à un appareil de mesure) d'un système donné est appelée une **observable**.

Les postulats Sur une base expérimentale, certaines considérations sur la structure des états et des observables pour un système quantique peuvent être faites. Il en découle les postulats suivants pour tout système quantique.

Postulat I À tout instant, l'état du système est représenté par un vecteur $\psi \neq 0$ d'un espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, le vecteur $c\psi$ représente le même état que le vecteur ψ. Les états du système sont ainsi en bijection avec les rayons

$$\{c\psi \mid c \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{H} \quad \text{pour } \psi \in \mathcal{H}\backslash\{0\},$$

ou encore avec les projections P_ψ associées à ces sous-espaces unidimensionnels.

Postulat II Tout observable $\mathcal{A}$ est représentée par un opérateur autoadjoint A.

Postulat III Le résultat d'une **mesure** de l'observable $\mathcal{A}$ ne peut être qu'un nombre réel λ, valeur propre de l'opérateur A.

Postulat IV Si le système est dans l'état ψ à l'instant t, alors la probabilité d'obtenir la valeur λ lors de la mesure de l'observable $\mathcal{A}$ à l'instant t est donnée par :

$$\mathrm{Prob}_\psi\{\text{mesure de } \mathcal{A} \text{ vaut } \lambda\} = \frac{\langle \psi, P_\lambda \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle},$$

où P_λ est la projection sur le sous-espace propre de A associé à λ.

Postulat V La valeur moyenne, prise sur un grand nombre de systèmes identiques préparés dans le même état ψ, de l'observable $\mathcal{A}$ est donnée par :

$$\langle A \rangle_\psi = \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}.$$

Postulat VI Si le système est dans l'état ψ, alors immédiatement après la mesure de $\mathcal{A}$ ayant donné la valeur λ, le système est dans l'état $\phi = P_\lambda \psi$, et ϕ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Postulat VII Il existe un opérateur autoadjoint H qui représente l'énergie du système et tel que l'évolution temporelle est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi_t = H\psi_t,$$

où ψ_t représente l'état du système à l'instant t et $\hbar$ est la constante de Planck.

Quelques commentaires Sans véritablement chercher à fonder ces postulats sur des considérations plus fondamentales, nous faisons quelques commentaires dans ce sens sous la lumière du théorème spectral (cf. Théorème IV.2.3) et du théorème de Stone (cf. Théorème IV.3.5).

Distribution des valeurs d'une observable Considérons un système quantique et notons $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert séparable des états. Le système est dans l'état $\psi \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ **normalisé**, i.e. $\|\psi\| = 1$. Nous nous intéressons à une observable $\mathcal{A}$ représentée par un opérateur autoadjoint A. Nous notons $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille spectrale de A de sorte que

$$A = \int \lambda dE_\lambda.$$

Par le point *d*) du Théorème IV.1.3, la valeur moyenne de l'observable $\mathcal{A}$, définie dans le Postulat V, peut s'écrire

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle = \int \lambda d\mu_{\|E_\lambda \psi\|^2}.$$

La fonction

$$\lambda \mapsto \|E_\lambda \psi\|^2 = \langle E_\lambda \psi, \psi \rangle$$

représente donc la fonction de distribution de l'observable $\mathcal{A}$ pour le système dans l'état ψ. Par conséquent,

$$\mathrm{Prob}_\psi\{\text{mesure de } \mathcal{A} < \lambda\} = \langle E_\lambda \psi, \psi \rangle$$

et

$$\mathrm{Prob}_\psi\{\text{mesure de } \mathcal{A} \in [a,b]\} = \langle (E_{b+0} - E_a)\psi, \psi \rangle\,.$$

En outre, par le Théorème IV.2.4, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}_\psi\{\text{mesure de } \mathcal{A} = \lambda\} &= \langle (E_{\lambda+0} - E_\lambda)\psi, \psi \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } A, \\ \langle P_\lambda \psi, \psi \rangle & \text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } A, \end{cases}\end{aligned}$$

où P_λ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ, dans le cas où λ est valeur propre de A.

Les Postulats III et IV peuvent donc être vu comme des conséquences du Postulat V et du théorème spectral.

Évolution temporelle L'opérateur H du Postulat VII est appelé **Hamiltonien** du système, il représente l'observable d'énergie. Nous disons que le temps est homogène pour le système si l'Hamiltonien H est indépendant du temps.

De façon plus générale, le temps est homogène pour le système si son évolution temporelle est donnée par un groupe unitaire fortement continu $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, dans le sens où si à l'instant $t = 0$ le système se trouve dans l'état ψ_0, alors l'état du système à l'instant t est donné par

$$\psi_t = U_t \psi_0.$$

L'existence de l'Hamiltonien H est alors assurée par le théorème de Stone. En effet, selon ce théorème, le générateur infinitésimal G du groupe continue unitaire $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est tel que iG est un opérateur autoadjoint. Il a pour domaine

$$\mathfrak{D}_G = \{x \in H \mid \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(U_t - I)x \text{ existe}\},$$

et il est défini, pour tout $x \in \mathfrak{D}_G$, par

$$Gx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - I)x.$$

En définissant alors l'opérateur autoadjoint

$$H = i\hbar G,$$

nous trouvons l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\psi_{t+h}-\psi_t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U_h - I)U_t\psi_0 = GU_t\psi_0 = -\frac{i}{\hbar}H\psi_t.$$

Toujours dans le cas où le temps est homogène, nous vérifions que la valeur moyenne de l'observable énergie représentée par l'Hamiltonien H est une constante du mouvement. Par le Théorème IV.3.4, si $\psi \in \mathfrak{D}_H$, alors $U_t\psi \in \mathfrak{D}_H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En outre, par le théorème de Stone, nous avons $U_tH\psi = HU_t\psi$ pour tout $\psi \in \mathfrak{D}_H$. Par conséquent, si $\psi_0 \in \mathfrak{D}_H$, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle H\rangle_{\psi_t} = \langle \psi_t, H\psi_t\rangle = \langle U_t\psi_0, HU_t\psi_0\rangle = \langle U_t\psi_0, U_tH\psi_0\rangle = \langle \psi_0, H\psi_0\rangle = \langle H\rangle_{\psi_0}.$$

L'idée selon laquelle à chaque groupe continu de symétrie d'un système physique correspond une quantité conservée par l'évolution temporelle est un principe très général en physique.

V.2. La particule ponctuelle dans $\mathbb{R}$

Dans le cas d'un système formé par une particule ponctuelle dans $\mathbb{R}$, nous étudions à l'aide duthéorème spectral et du théorème de Stone les observables de position et de quantité de mouvement.

Une « particule ponctuelle » dans l'espace unidimensionnel $\mathbb{R}$ est un système quantique caractérisé par les observations suivantes.

1. À tout ensemble $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, il est possible d'associer un appareil de mesure, i.e. une observable $\mathcal{P}_\Delta$ représentée par un opérateur autoadjoint P_Δ, appelée « détecteur de particule », prenant la valeur 0 ou 1 selon que la particule se trouve ou non dans l'ensemble Δ.
2. L'ensemble des opérateurs P_Δ, avec $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, constitue une famille d'opérateurs symétriques qui commutent.
3. À tout élément $a \in \mathbb{R}$, il est possible d'associer une translation sur les appareils de mesure :

   $$\tau_a P_\Delta = P_{\Delta - a}, \quad \text{où } \Delta - a = \{x \in \mathbb{R} \mid x + a \in \Delta\}.$$

   Cette approche passive admet un équivalent actif, dans le sens où la translation peut aussi être vue comme une opération sur les états du système :

   $$U_a\psi = \psi_a, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

4. Les seuls observables qui commutent avec tous les P_Δ sont les fonctions de ceux-ci.

Un espace de Hilbert séparable qui réalise les conditions 1) à 4) est l'espace $L_2(\mathbb{R},\mu)$. L'observable détecteur $\mathcal{P}_\Delta$ est représentée par la projection :

$$\big(P_\Delta\psi\big)(x) = \chi_\Delta(x)\psi(x), \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{H} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Interprétation de la fonction d'état ψ La « fonction d'ondes » ψ normalisée caractérise un état de la particule ponctuelle. Il suit du Postulat V que la valeur moyenne de l'observable $\mathcal{P}_\Delta$, qui n'est autre que la probabilité de trouver la particule dans Δ lorsqu'elle se trouve dans l'état ψ, est donnée par :

$$\langle P_\Delta \rangle = \langle \psi, P_\Delta \psi \rangle = \int_\Delta |\psi|^2 d\mu.$$

La fonction $|\psi|^2$ représente donc la densité de probabilité d'observer la particule sachant qu'elle se trouve dans l'état représenté par ψ.

L'observable position Forts de l'interprétation probabiliste de la fonction $|\psi|^2$, nous pouvons écrire la valeur moyenne de la position d'une particule ponctuelle sur $\mathbb{R}$ dans l'état normalisé représenté par $\psi \in L_2(\mathbb{R}, \mu) \backslash \{0\}$, $\|\psi\| = 1$, comme l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_\psi &= \int_\mathbb{R} x |\psi(x)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_\mathbb{R} x \psi(x) \overline{\psi(x)} d\mu(x) \\ &= \langle X\psi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

où X est l'opérateur autoadjoint (cf. Exemple IV.2.5) défini par

$$\big(X\psi\big)(x) = x\psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

sur le domaine

$$\mathfrak{D}_X = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}, \mu) \mid x \mapsto x\psi(x) \text{ appartient à } L_2(\mathbb{R}, \mu)\}.$$

Observable quantité de mouvement Il découle du Premier Principe de la Thermodynamique que la quantité de mouvement est une grandeur extensive associée au groupe des translations dans l'espace (dans notre cas sur $\mathbb{R}$), qui est conservée si l'espace est homogène, i.e. si le système est invariant par rapport aux translations de l'espace. Forts du théorème de Stone, nous pouvons déterminer le générateur infinitésimal du groupe des translations de $\mathbb{R}$.

À tout élément $a \in \mathbb{R}$, il est possible d'associer une transformation sur les états de la particule comme stipulé par la condition 3. Elle est donnée par :

$$\big(U_a\psi\big)(x) = \psi_a(x) = \psi(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de voir que la famille d'opérateurs $\{U_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ forme un groupe unitaire fortement continu sur $L_2(\mathbb{R}, \mu)$. En vertu du théorème de Stone, nous savons qu'il existe un opérateur autoadjoint A de sorte que

$$U_a = e^{iaA}, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

De plus, l'opérateur A est tel que iA est le générateur infinitésimal de $\{U_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ et donc

$$iA\psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} U_t\psi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - I)\psi, \quad \psi \in \mathfrak{D}_A.$$

Par conséquent, pour $\psi \in \mathfrak{D}_A$,

$$\begin{aligned}(A\psi)(x) &= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\psi(x-t)-\psi(x)}{t}\\ &= -\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\psi(x-t)-\psi(x)}{-t}\\ &= -\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x).\end{aligned}$$

Pour des questions de dimensions physiques, l'opérateur P représentant l'observable quantité de mouvement se définit alors, pour tout $\psi \in \mathfrak{D}_A$, par :

$$(P\psi)(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

de sorte que $A = -\frac{1}{\hbar}P$ et

$$U_a = e^{-\frac{i}{\hbar}aP}, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

A. L'intégrale de Riemann-Stieltjes

A.1. Fonctions à variation bornée

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé et borné de la droite réelle. Une **partition** Π de $[a,b]$ est une suite finie de réels $(\lambda_k)_{k=0}^n$ telle que :

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = b.$$

Sa taille est le nombre $|\Pi|$ défini par

$$|\Pi| = \max_{k=1,\ldots,n} \lambda_k - \lambda_{k-1}.$$

Nous notons $\mathfrak{P}[a,b]$ l'ensemble des partitions de $[a,b]$.

Une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **à variation bornée** s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k) - f(\lambda_{k-1})| \leq C,$$

pour toute partition $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n \in \mathfrak{P}[a,b]$. Si ϕ est à variation bornée sur $[a,b]$ nous définissons pour $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$ la **variation totale** de ϕ sur $[x,y]$ par :

$$V_x^y(\phi) = \sup_{\Pi \in \mathfrak{P}[x,y]} \sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k) - f(\lambda_{k-1})|.$$

L'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ est un espace vectoriel, nous le notons $VB[a,b]$.

Les démonstrations des deux théorèmes que nous citons à présent peuvent être lues dans [Kolmogorov, 1980] aux pages 329 et 330.

Théorème A.1.1. *Soient $\phi \in VB[a,b]$. Si $a < c < d \leq b$, alors :*

$$V_a^d(\phi) = V_a^c(\phi) + V_c^d(\phi).$$

Théorème A.1.2. *Soit $\phi \in VB[a,b]$. Si ϕ est continue à gauche en un point de l'intervalle $[a,b]$, il en va de même de la fonction $x \mapsto V_a^x(\phi)$.*

A.2. Définition et existence

Considérons à présent une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et une fonction à variation bornée $\phi \in VB[a,b]$. Pour toute partition $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n$ et tout choix de réels

$$\mu_k \in [\lambda_k, \lambda_{k-1}] \quad k = 1, \dots, n,$$

nous formons la somme :

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{n} f(\mu_k)\big(\phi(\lambda_k) - \phi(\lambda_{k-1})\big).$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème A.2.1. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\phi \in VB[a,b]$ à variation bornée. Il existe un unique nombre réel $I \in \mathbb{R}$ ayant la propriété que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si Π est une partition de $[a,b]$ vérifiant $|\Pi| < \delta$, alors :*

$$|S_\Pi - I| < \varepsilon.$$

En outre, le réel I est indépendant du choix des points intermédiaires μ_k.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue. Il existe donc δ_ε tel que pour tous $x, y \in [a,b]$ si $|x-y| < \delta_\varepsilon$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2V_a^b(\phi)},$$

où $V_a^b(\phi)$ est la variation totale de ϕ sur $[a,b]$.

À présent, montrons que pour deux partitions $\Pi, \Pi' \in \mathfrak{P}[a,b]$ nous avons :

$$\text{si } \ |\Pi|, |\Pi'| < \delta_\varepsilon, \ \text{ alors } \ |S_\Pi - S_{\Pi'}| \leq \varepsilon, \tag{A.1}$$

ceci indépendamment du choix des points μ_k considérés pour former les sommes S_Π et $S_{\Pi'}$.

Notons $(\lambda_k)_{k=0}^n$ la partition Π et considérons la partition $\overline{\Pi}$ qui est l'union des points de Π et de Π' indexée de la façon suivante :

$$\bar\lambda_0 = \lambda_0 < \bar\lambda_1 < \dots < \bar\lambda_{k_1} = \lambda_1 < \bar\lambda_{k_1+1} < \dots < \bar\lambda_{k_2} = \lambda_2 < \quad \cdots \quad < \bar\lambda_{k_n} = \lambda_n.$$

Fixons arbitrairement des réels $\mu_i \in [\lambda_i, \lambda_{i-1}]$ pour $k = 1, \dots, n$ et des réels $\bar\mu_j \in [\bar\lambda_j, \bar\lambda_{j-1}]$ pour $j = 1, \dots, k_n$. Nous avons alors

$$S_{\overline{\Pi}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\bar\mu_j)\left[\phi(\bar\lambda_j) - \phi(\bar\lambda_{j-1})\right].$$

Et puisque, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \phi(\bar\lambda_j) - \phi(\bar\lambda_{j-1}) = \phi(\bar\lambda_{k_i}) - \phi(\bar\lambda_{k_{i-1}}) = \phi(\lambda_i) - \phi(\lambda_{i-1}),$$

nous pouvons écrire S_Π comme :

$$S_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\mu_i) \left[\phi(\bar{\lambda}_j) - \phi(\bar{\lambda}_{j-1})\right].$$

Observons maintenant que, comme $|\Pi| < \delta_\varepsilon$, pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = k_{i-1} + 1, \ldots, k_i$, le fait que

$$|\bar{\mu}_j - \mu_i| < \lambda_i - \lambda_{i-1} < \delta_\varepsilon$$

implique que

$$|f(\bar{\mu}_j) - f(\mu_i)| < \frac{\varepsilon}{2V_a^b(\phi)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\bar{\mu}_j) - f(\mu_i)| \left|\phi(\bar{\lambda}_j) - \phi(\bar{\lambda}_{j-1})\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2V_a^b(\phi)} \sum_{j=1}^{k_n} \left|\phi(\bar{\lambda}_j) - \phi(\bar{\lambda}_{j-1})\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De la même façon, nous avons aussi $\left|S_{\Pi'} - S_{\overline{\Pi}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi nous avons comme annoncé :

$$|S_\Pi - S_{\Pi'}| \leq \left|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right| + \left|S_{\overline{\Pi}} - S_{\Pi'}\right| \leq \varepsilon.$$

Considérons maintenant une suite de partition $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Il existe donc $M \geq 1$ tel que pour tout $n \geq M$, nous avons $|\Pi_n| < \delta_\varepsilon$. Il découle alors de (A.1) que pour $n, m \geq M$, nous avons $|S_{\Pi_n} - S_{\Pi_m}| < \varepsilon$. Ainsi, la suite $(S_{\Pi_n})_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite $I \in \mathbb{R}$ et il existe $N \geq 1$ tel que $|S_{\Pi_N} - I| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Finalement par (A.1), nous avons que pour toute partition Π de taille inférieure à $\delta_{\frac{1}{2}\varepsilon}$:

$$|S_\Pi - I| \leq |S_\Pi - S_{\Pi_N}| + |S_{\Pi_N} - I| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Nous appelons la limite I du théorème précédent l'**intégrale de Riemann-Stieltjes** de f par rapport à ϕ. Nous la notons :

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) \quad \text{ou simplement} \quad \int_a^b f d\phi.$$

A.3. Quelques résultats

Les propriétés élémentaires suivantes s'obtiennent directement à l'aide de la définition et du Théorème A.2.1.

Propriétés A.3.1. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, $\phi, \psi \in VB[a,b]$, $c \in]a,b[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

a) $\int_a^b f d\phi = \int_a^c f d\phi + \int_c^b f d\phi$ *;*

b) $\int_a^b \alpha f d\phi = \alpha \int_a^b f d\phi$ *;*

c) $\int_a^b (f+g) d\phi = \int_a^b f d\phi + \int_a^b g d\phi$ *;*

d) $\int_a^b f d\phi + \int_a^b f d\psi = \int_a^b f d(\phi + \psi)$*.*

Le théorème de la moyenne dans le cas de l'intégrale de Riemann-Stieltjes s'énonce comme suit.

Lemme A.3.2. *Soient $\phi \in VB[a,b]$ à variation bornée et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.*

$$\left| \int_a^b f d\phi \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \, V_a^b(\phi).$$

Démonstration. Soit $\Pi = (\lambda_k)_{k=0}^n$ une partition. Nous avons :

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \big[\phi(\lambda_k) - \phi(\lambda_{k-1}) \big] \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \sum_{k=1}^n |\phi(\lambda_k) - \phi(\lambda_{k-1})| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \, V_a^b(\phi).$$

Nous obtenons le résultat du lemme en prenant une suite de partition dont la taille tend vers zéro. □

Voici l'analogue du théorème de convergence uniforme pour l'intégrale de Riemann.

Théorème A.3.3. *Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions continues définies sur $[a,b]$ à valeurs réelles convergeant uniformément vers une fonction f. Nous avons*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n d\phi = \int_a^b f d\phi.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, comme f est continue en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues, l'intégrale de Riemann-Stieltjes de f par rapport à ϕ existe.

Fixons à présent $\varepsilon > 0$ arbitrairement. Puisque $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformément vers f, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons :

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{V_a^b(\phi)}.$$

Considérons une suite $(\Pi_m)_{m=1}^{\infty}$ de partitions de $[a,b]$ telle que $\lim_{m\to\infty}|\Pi_m| = 0$. Notons $(\lambda_k^m)_{k=1}^{l_m}$ la partition Π_m pour chaque $m \geq 1$. Pour tout $n \geq N$ et pour tout $m \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{l_m} f_n(\lambda_k^m)\big[\phi(\lambda_k^m)-\phi(\lambda_{k-1}^m)\big] - \sum_{k=1}^{l_m} f(\lambda_k^m)\big[\phi(\lambda_k^m)-\phi(\lambda_{k-1}^m)\big]\Big| \\ \leq \sum_{k=1}^{l_m} |f_n(\lambda_k^m)-f(\lambda_k^m)|\,\big|\phi(\lambda_k^m)-\phi(\lambda_{k-1}^m)\big| \\ \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\,V_a^b(\phi) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour $n \geq N$ fixé, nous pouvons laisser $m \to \infty$ pour obtenir, par le Théorème A.2.1,

$$\left|\int_a^b f_n d\phi - \int_a^b f d\phi\right| \leq \varepsilon.$$

□

Le théorème suivant est utilisé au Chapitre II.

Théorème A.3.4. *Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée et continue à gauche. Si pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f d\phi = 0,$$

alors $\phi(t) = \phi(a)$ pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration. Soit $t \in (a,b)$ et prenons $N \in \mathbb{N}$ de sorte que $t - \frac{1}{N} > a$. Pour tout $n \geq N$, nous définissons la fonction continue $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [a, t-\frac{1}{n}]; \\ -nx+nt & \text{si} \quad x \in [t-\frac{1}{n}, t]; \\ 0 & \text{si} \quad x \in [t,b]. \end{cases}$$

Nous avons alors pour tout $n \geq N$:

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b f_n d\phi &= \int_a^{t-\frac{1}{n}} 1 d\phi + \int_{t-\frac{1}{n}}^t (-nx+nt)d\phi(x) + \int_t^b 0 d\phi \\ &= \phi(t-\frac{1}{n}) - \phi(a) + \int_{t-\frac{1}{n}}^t (-nx+nt)d\phi(x). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Or par le Lemme A.3.2, nous avons pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq \left|\int_{t-\frac{1}{n}}^t (-nx+nt)d\phi(x)\right| \leq V_{t-\frac{1}{n}}^t(\phi).$$

Par le Théorème A.1.1, nous pouvons écrire la variation totale de ϕ sur $[t - \frac{1}{n}, t]$ comme :

$$V_{t-\frac{1}{n}}^{t}(\phi) = V_a^t(\phi) - V_a^{t-\frac{1}{n}}(\phi).$$

Ainsi puisque ϕ est continue à gauche, le Théorème A.1.2 nous assure que :

$$\lim_{n\to\infty} V_{t-\frac{1}{n}}^{t}(\phi) = V_a^t(\phi) - \lim_{n\to\infty} V_a^{t-\frac{1}{n}}(\phi) = 0.$$

Nous avons donc obtenu que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} (-nx + nt)d\phi(x) = 0.$$

Il s'ensuit qu'en laissant $n \to \infty$ dans (A.2), nous obtenons par la continuité à gauche de ϕ que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \phi(t - \frac{1}{n}) - \phi(a) = \phi(t) - \phi(a).$$

Comme $t \in (a, b)$ est quelconque, nous avons obtenu que $\phi(t) = \phi(a)$ pour tout $t \in [a, b)$ et donc nous avons aussi :

$$\phi(b) = \lim_{x\nearrow b} \phi(x) = \phi(a). \qquad \square$$

B. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

B.1. Mesure de Lebesgue-Stieltjes

La mesure de Lebesgue-Stieltjes est la mesure de Lebesgue associée à une fonction croissante et continue à gauche.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue à gauche. Nous notons $F(\lambda + 0) = \lim_{\mu \searrow \lambda} F(\mu)$ pour tout $\lambda \in R$. Le théorème suivant nous assure l'existence et l'unicité d'une mesure μ_F au sens de Lebesgue définie sur les boréliens $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ qui prend les valeurs suivantes sur les intervalles bornés :

$$\begin{aligned}
\mu_F[a,b) &= F(b) - F(a) \\
\mu_F(a,b] &= F(b+0) - F(a+0) \\
\mu_F(a,b) &= F(b) - F(a+0)
\end{aligned}$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et

$$\mu_F[a,b] = F(b+0) - F(a),$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

Nous nous contentons d'énoncer ce théorème dont la démonstration peut être lue dans [Stein, 2005] à la page 282.

Théorème B.1.1. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et continue à gauche. Il existe une unique mesure μ_F définie sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu_F[a,b) = F(b) - F(a)$ si $a < b$.*

Nous appelons **mesure de Lebesgue-Stieltjes** associée à la fonction croissante et continue à gauche F, la mesure μ_F que nous procure le précédent théorème. La mesure μ_F peut en fait être étendue sur une σ-algèbre plus grande que celle des Boréliens. Nous considérons cependant qu'elle est définie sur les boréliens. En particulier, un borélien $B \in \mathcal{B}$ est aussi dit **μ_F-mesurable** puisqu'il appartient au domaine de la mesure μ_F. Observer que si F est l'identité sur $\mathbb{R}$, alors μ_F est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de cette appendice, μ_F se réfère toujours à la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à une fonction croissante et continue à gauche F.

Remarque B.1.2. Les mesures de Lebesgue-Stieltjes sur $\mathbb{R}$ ne forment pas un type particulier de mesure. Cette notion réfère plutôt à une façon particulière de construire des mesures sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut montrer [1] que si μ est une mesure sur $\mathcal{B}$ qui est finie sur les intervalles bornés, alors la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} -\mu[-x, 0), & \text{si} \quad x < 0; \\ 0, & \text{si} \quad x = 0; \\ \mu[0, x), & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

est croissante et continue à gauche.

B.2. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes est définie comme l'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue-Stieltjes.

Soit F une fonction croissante et continue à gauche. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à F est simplement l'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue-Stieltjes μ_F engendrée par F. Nous rappelons très brièvement les étapes importantes de l'une de ses constructions possibles dans le cas particulier qui nous intéresse. Nous adoptons essentiellement l'approche de [Kolmogorov, 1980] et nous invitons le lecteur à se référer à cette ouvrage pour les détails omis dans cette section.

Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borélien, une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite **μ_F-mesurable** ou aussi dans notre cas **Borel-mesurable**, si :

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B} \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}.$$

La première étape consiste à définir l'intégrale pour les fonctions simples. Un **fonction simple** sur un ensemble borélien A est une fonction μ_F-mesurable $f : A \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs distinctes. Il est aisé de voir qu'une fonction simple s sur A peut toujours s'écrire de manière unique sous la forme :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}, \tag{B.1}$$

où χ_B dénote la fonction indicatrice (sur A) de l'ensemble B, les A_k sont μ_F-mesurables, inclus dans A et disjoints deux à deux, et les $y_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \geq 1$ sont distincts.

Soit alors $A \subseteq \mathbb{R}$ μ_F-mesurable et $s = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}$ une fonction simple sur A(écrite sous la forme de (B.1)). Nous disons que s est **Lebesgue-Stieltjes intégrable par rapport à F** ou μ_F-intégrable sur A si la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu_F(A_k) \quad \text{converge absolument.}$$

1. voir [Stein, 2005] p.282.

Dans ce cas, nous définissons l'**intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à F** de la fonction simple s sur A comme :

$$\int_A s d\mu_F = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu_F(A_k).$$

L'intérêt des fonctions simples provient notamment de leur relation avec les fonctions mesurables. C'est ce que montre le théorème suivant que nous donnons sans démonstration. La preuve peut être lue dans [Kolmogorov, 1980] à la page 286.

Théorème B.2.1. *Une fonction f est μ_F-mesurable si et seulement s'il existe une suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions simples qui converge uniformément vers f.*

Cela motive la définition suivante qui étend la notion d'intégrale de Lebesgue-Stieltjes au-delà des fonctions simples.

Définition B.2.2. Soit A un ensemble μ_F-mesurable. Une fonction μ_F-mesurable f est dite **Lebesgue-Stieltjes intégrable par rapport à F** ou **μ_F-intégrable** sur A, s'il existe une suite de fonctions simples μ_F-intégrable sur A qui converge uniformément vers f. Nous appelons, dans ce cas, **intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à F** de la fonction f sur A, la limite :

$$\int_A f d\mu_F = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\mu_F.$$

On montre en particulier que la précédente limite existe, est finie et ne dépend pas de la suite de fonctions simples μ_F-intégrables choisie. Nous n'exposons pas ces détails qui légitime cette définition. Ils peuvent être lus dans [Kolmogorov, 1980] à la page 296.

Dans le cas d'une fonction complexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, considérons sa partie réelle et sa partie imaginaire de sorte que $f = g + ih$. Nous disons que f est **Lebesgue-Stieltjes intégrable par rapport à F** ou **μ_F-intégrable** sur A si g et h le sont. L'**intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à F** de f sur A est alors comprise comme :

$$\int_A f d\mu_F = \int_A g d\mu_F + i \int_A h d\mu_F.$$

Le théorème suivant nous assure que l'intégrale de Riemann-Stieltjes et l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes coïncident pour les fonctions continues.

Théorème B.2.3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue à gauche. L'intégrale de Riemann-Stieltjes et celle de Lebesgue-Stieltjes coïncident dans le sens où :*

$$\int_a^b f dF = \int_{[a,b)} f d\mu_F.$$

Démonstration. Considérons une suite $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ de partitions de $[a,b]$ donnée par :

$$\Pi_n : \quad a = \lambda_0^n < \lambda_1^n < \cdots < \lambda_{m_n-1}^n < \lambda_{m_n}^n = b,$$

et telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Définissons alors pour tout $n \geq 1$ une fonction simple $\psi_n : [a,b) \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_n(x) = f(\lambda_k^n) \quad \text{si } x \in [\lambda_k^n, \lambda_{k-1}^n) \quad \text{pour } k = 0, \ldots, m_n - 1.$$

Chaque ψ_n est μ_F-intégrable sur $[a,b)$ et il est aisé de voir en utilisant la continuité uniforme de f que la suite $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers f. Par ailleurs, nous avons clairement l'égalité :

$$S_{\Pi_n} = \int_{[a,b)} \psi_n d\mu_F,$$

et par conséquent, en laissant $n \to \infty$ nous obtenons par le Théorème A.2.1 et par la définition de l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes :

$$\int_a^b f dF = \int_{[a,b)} f d\mu_F.$$

□

Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions telle qu'il existe un ensemble μ_F-mesurable N avec $\mu_F(N) = 0$ pour lequel

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash N,$$

nous disons que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge μ_F presque partout** vers la fonction f et nous écrivons $f_n \to f$ presque partout.

Nous avons alors les théorèmes de convergence suivants.

Théorème B.2.4 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions μ_F-mesurables telle que $f_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Si $f_n \to f$ presque partout, alors*

$$\int f d\mu_F \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu_F.$$

La preuve de cette formulation du Lemme de Fatou se trouve dans [Stein, 2005] à la page 61.

Théorème B.2.5 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n \to f$ presque partout. S'il existe une fonction g μ_f-intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \geq 1$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu_F = 0$$

et ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_F = \int f d\mu_F.$$

La preuve de ce théorème peut par exemple se lire dans [Stein, 2005] à la page 67. Une formulation équivalente se trouve dans [Kolmogorov, 1980] à la page 303.

B.3. L'espace $L_2(\mathbb{R}, \mu_F)$

L'espace $L_2(\mathbb{R}, \mu_F)$ se définit de façon analogue au cas où μ_F est la mesure de Lebesgue. Il est constitué des classes d'équivalence de fonctions μ_F-mesurables f dont le module au carré est μ_F-intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la relation d'équivalence $f \sim_{\mu_F} g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ μ_F presque partout. Ces fonctions satisfont :

$$\int |f|^2 \, d\mu_F < \infty,$$

où nous adoptons la convention qu'une intégrale dont le domaine n'est pas indiqué est comprise comme une intégrale sur tout $\mathbb{R}$. Comme dans le cas où μ_F est la mesure de Lebesgue, nous ne distinguons pas deux fonctions $f, g \in L_2(\mathbb{R}, \mu_F)$ qui coïncident presque partout dans le sens où il existe un ensemble N μ_F-mesurable tel que $\mu_F(N) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash N$. Cet ensemble est un espace vectoriel complexe et muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R}, \mu_F)} = \int f \bar{g} d\mu_F \quad \text{pour tous } f, g \in L_2(\mathbb{R}, \mu_F),$$

c'est un espace de Hilbert.

Nous appelons **fonction en escalier** une fonction $t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ du type :

$$t = \sum_{k=0}^{n} c_k \chi_{I_k}$$

où les I_k sont des intervalles de la forme :

$$(a_k, b_k), \quad [a_k, b_k), \quad (a_k, b_k], \quad [a_k, b_k],$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tels que $a_k \leq b_k$ et avec $c_k \in \mathbb{C}$.

Le résultat suivant est à la base de la définition de l'intégrale d'une fonction par rapport à une famille spectrale. Sa démonstration est faite dans [Weidmann, 1980, p. 25]. Elle peut également se déduire de la preuve du théorème assurant la séparabilité de $L_2(\mathbb{R})$ dans [Stein, 2005, p. 160].

Théorème B.3.1. *Les fonctions en escalier sont denses dans $L_2(\mathbb{R}, \mu_F)$.*

C. Intégrale de Riemann à valeur dans un espace de Banach

Dans toute cette appendice, nous considérons un espace de Banach $\mathcal{B}$ et une fonction continue $F : [a, b] \to \mathcal{B}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

C.1. Définition et existence

La fonction F étant continue entre les espaces métriques $[a, b]$ et $\mathcal{B}$ et puisque $[a, b]$ est compact, elle est uniformément continue. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toux $t, s \in [a, b]$

$$\text{si } |t - s| < \delta \text{ alors } \|F(t) - F(s)\| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, une fonction continue $F : [a, b] \to \mathcal{B}$ est bornée dans le sens où

$$\sup_{t \in [a,b]} \|F(t)\| < \infty.$$

Pour voir cela, notons $M = \sup_{t \in [a,b]} \|F(t)\|$ où possiblement $M = \infty$ et observons qu'il existe une suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $[a, b]$ avec $\lim_{n\to\infty} \|F(t_n)\| = M$. Par la compacité de $[a, b]$, il existe alors une sous-suite $(t_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de la suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ qui converge vers un élément $t \in [a, b]$. Par conséquent, par la continuité de la norme et de la fonction F,

$$M = \lim_{k\to\infty} \|F(t_{n_k})\| = \|F(t)\| < \infty.$$

En analogie complète avec le cas de l'intégrale de Riemann à valeur dans $\mathbb{R}$, pour toute partition Π de $[a, b]$ donnée par

$$\Pi : \quad a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{m-1} < \lambda_m = b,$$

et pour toute suite de points

$$\mu_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k] \quad \text{pour tout } k = 1, \ldots, m,$$

nous formons alors la somme

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) F(\mu_k).$$

Nous montrons dans le prochain théorème que lorsque l'on prend des partitions de taille arbitrairement petite, on s'approche arbitrairement près d'un élément de $\mathcal{B}$.

Théorème C.1.1. *Soit $F : [a,b] \to \mathcal{B}$ continue. Il existe un unique élément $Y \in \mathcal{B}$ avec la propriété que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition Π de $[a,b]$ avec $|\Pi| < \delta$, alors*

$$\|S_\Pi - Y\| < \varepsilon.$$

Nous appelons l'élément $Y \in \mathcal{B}$, décrit dans ce théorème, l'**intégrale de Riemann** de F sur $[a,b]$ et nous le notons

$$Y = \int_a^b F(t)dt.$$

La démonstration de ce résultat est, *mutatis mutandis*, la réplique de celle du Théorème A.2.1 et du Lemme II.3.2. Ces trois démonstrations sont en fait des adaptations du résultat similaire pour l'intégrale de Riemann à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, il serait possible de démontrer le résultat dans un cadre commun à ces quatre situations.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme déjà observé, F est uniformément continue. Il existe donc δ_ε tel que pour tous $t, s \in [a,b]$ avec $|t-s| < \delta_\varepsilon$, alors

$$\|F(x) - F(y)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{C.1}$$

À présent, montrons que pour deux partitions Π et Π' de $[a,b]$, nous avons :

$$\text{si } |\Pi|, |\Pi'| < \delta_\varepsilon, \text{ alors } |S_\Pi - S_{\Pi'}| \leq \varepsilon. \tag{C.2}$$

Cela indépendamment du choix des points μ_k considérés pour former les sommes S_Π et $S_{\Pi'}$.

Notons $(\lambda_k)_{k=0}^n$ la partition Π et considérons la partition $\overline{\Pi}$ qui est l'union des points de Π et de Π' indexée de la façon suivante :

$$\bar\lambda_0 = \lambda_0 < \bar\lambda_1 < \cdots < \bar\lambda_{k_1} = \lambda_1 < \bar\lambda_{k_0+1} < \cdots < \bar\lambda_{k_2} = \lambda_2 < \quad \cdots \quad < \bar\lambda_{k_n} = \lambda_n.$$

Fixons arbitrairement des réels $\mu_i \in [\lambda_i, \lambda_{i-1}]$ pour $k = 1, \ldots, n$ et des réels $\bar\mu_j \in [\bar\lambda_j, \bar\lambda_{j-1}]$ pour $j = 1, \ldots, k_n$. Nous avons alors,

$$S_{\overline{\Pi}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (\bar\lambda_j - \bar\lambda_{j-1}) F(\bar\mu_j).$$

Et puisque, pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (\bar\lambda_j - \bar\lambda_{j-1}) = \bar\lambda_{k_i} - \bar\lambda_{k_{i-1}} = \lambda_i - \lambda_{i-1},$$

nous pouvons écrire S_Π comme :

$$S_\Pi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_{j-1}) F(\mu_i).$$

Observons maintenant que comme $|\Pi| < \delta_\varepsilon$, pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = k_{i-1}+1, \ldots, k_i$, le fait que

$$|\bar{\mu}_j - \mu_i| < \lambda_i - \lambda_{i-1} < \delta_\varepsilon$$

implique par (C.1) que

$$\|F(\bar{\mu}_j) - F(\mu_i)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_{j-1}) \|F(\bar{\mu}_j) - F(\mu_i)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{k_n} (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_{j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De la même façon, nous avons aussi $\left|S_{\Pi'} - S_{\overline{\Pi}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi nous avons comme annoncé :

$$|S_\Pi - S_{\Pi'}| \leq \left|S_\Pi - S_{\overline{\Pi}}\right| + \left|S_{\overline{\Pi}} - S_{\Pi'}\right| \leq \varepsilon.$$

Considérons maintenant une suite de partition $(\Pi_n)_{n=1}^\infty$ telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Il existe donc $M \geq 1$ tel que pour tout $n \geq M$, nous avons $|\Pi_n| < \delta_\varepsilon$. Il découle alors de (A.1) que pour $n, m \geq M$, nous avons $|S_{\Pi_n} - S_{\Pi_m}| < \varepsilon$. Ainsi, la suite $(S_{\Pi_n})_{n=1}^\infty$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}$. Elle admet donc une limite $I \in \mathcal{B}$ et il existe $N \geq 1$ tel que $|S_{\Pi_N} - I| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Finalement par (A.1), nous avons que pour toute partition Π de taille inférieure à $\delta_{\frac{1}{2}\varepsilon}$:

$$|S_\Pi - I| \leq |S_\Pi - S_{\Pi_N}| + |S_{\Pi_N} - I| < \varepsilon.$$

□

Notre intégrale ainsi définie est évidemment linéaire. C'est-à-dire, si $F, G : [a, b] \to \mathcal{B}$ sont des fonctions continues et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \big(\alpha F(t) + \beta G(t)\big) dt = \alpha \int_a^b F(t) dt + \int_a^b \beta G(t) dt.$$

De plus, il est facile de voir que

$$\left\|\int_a^b F(t) dt\right\| \leq \int \|F(t)\| \, dt.$$

C.2. Quelques résultats

Lemme C.2.1. *Soient $T \in \mathcal{L}(B)$ et $F : [a,b] \to \mathcal{B}$ continue. La composition $T \circ F$ est continue et*

$$T \int_a^b F(t)dt = \int_a^b TF(t)dt$$

Preuve. La continuité de la composition de F avec T découle simplement du fait que

$$\|TF(t) - TF(s)\| = \|T(F(t) - F(s)\| \leq \|T\| \, \|F(t) - F(s)\| .$$

Considérons maintenant une suite $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ de partitions de $[a,b]$ que nous écrivons

$$\Pi_n : \quad a = \lambda_0^n < \lambda_1^n < \cdots < \lambda_{m_n-1}^n < \lambda_{m_n}^n = b,$$

et telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} TS_{\Pi_n} &= T \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) F(\lambda_k^n) \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) TF(\lambda_k^n), \end{aligned}$$

et donc par la continuité de T et le Théorème C.1.1, nous obtenons le résultat annoncé en laissant $n \to \infty$. □

Théorème C.2.2. *Soient $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $T : [a,b] \to \mathcal{B}$ des fonctions continues. Le produit ϕT défini par $\phi T(t) = \phi(t)T(t)$ est continu et*

$$\left\| \int \phi(t)T(t)dt \right\| \leq \int |\phi(t)| \, dt \sup_{s\in[a,b]} \|T(s)\| .$$

Preuve. La continuité de ϕT découle simplement du fait que

$$\begin{aligned} \|\phi(t)T(t) - \phi(s)T(s)\| &\leq \|\phi(t)T(t) - \phi(s)T(t)\| + \|\phi(s)T(t) - \phi(s)T(s)\| \\ &\leq |\phi(t) - \phi(s)| \, \|T(t)\| + |\phi(s)| \, \|T(t) - T(s)\| . \end{aligned}$$

Considérons maintenant une suite $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ de partitions de $[a,b]$ que nous écrivons

$$\Pi_n : \quad a = \lambda_0^n < \lambda_1^n < \cdots < \lambda_{m_n-1}^n < \lambda_{m_n}^n = b,$$

et telle que $\lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \left\|S_{\Pi_n}\right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) \phi(\lambda_k^n) F(\lambda_k^n) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) \, |\phi(\lambda_k^n)| \, \|F(\lambda_k^n)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) \, |\phi(\lambda_k^n)| \sup_{s\in[a,b]} \|F(s)\| , \end{aligned}$$

et donc, en laissant $n \to \infty$, le résultat annoncé découle de la continuité de la norme, du Théorème C.1.1 et du fait que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (\lambda_k^n - \lambda_{k-1}^n) \, |\phi(\lambda_k^n)| = \int_a^b |\phi(t)| \, dt.$$

□

Nous avons alors un théorème de convergence uniforme.

Théorème C.2.3. *Soient $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions continues $F_n : [a,b] \to \mathcal{B}$ et une fonction continue $F : [a,b] \to \mathcal{B}$. Si $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément vers F, i.e. si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$*

$$\sup_{s\in[a,b]} \|F_n(s) - F(s)\| < \varepsilon,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt.$$

Preuve. Par le Théorème C.2.2 appliqué à $\phi(s) \equiv 1$, nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\left\| \int_a^b F_n(t)dt - \int_a^b F(t)dt \right\| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|F_n(s) - F(s)\| \, .$$

Le résultat annoncé découle alors simplement de la convergence uniforme de la suite $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ vers F. □

Bibliographie

[Friedman, 1982] Friedman, A. (1982). *The Foundations of Modern Analysis*. Dover Publications, Inc. NEW YORK.

[Kolmogorov, 1980] Kolmogorov, A.N. et Fomin, S. (1980). *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc. NEW YORK.

[Riesz, 1955] Riesz, Frédéric et Sz-Nagy, B. (1955). *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Paris et Akadémiai Kiadó, Budapest.

[Stein, 2005] Stein, Elias M. et Shakarchi, R. (2005). *REAL ANALYSIS, Volume III, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press.

[Weidmann, 1980] Weidmann, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer Verlag.