
Examen MPRI 2015/2016
"Modélisation par automates finis"
Automates et semigroupes

Livres et ordinateurs interdits. Notes personnelles autorisées.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On considère les monoïdes

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{aba} = \mathbf{a} \rangle_+^1 \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbf{aba} = \mathbf{b} \rangle_+^1.$$

- 1.a Pour chacun, dessiner le fragment du graphe de Cayley restreint aux éléments de longueur au plus 3.
 - b Pour chacun, donner les premiers coefficients et une possible récurrence (au moins conjecturale) de sa fonction de croissance.
 - c Pour chacun, exhiber, si possible, une suite infinie $\dots \prec f_2 \prec f_1 \prec f_0$ de divisions propres à gauche (on a $f \prec g$ s'il existe $h \neq 1$ vérifiant $fh = g$).
 - d Pour chacun, décrire une famille de Garside (strictement incluse dans son monoïde).
-
- 2.a Pour chacun, donner un système de (deux) règles de réécriture, chacune de la forme $x_1x_2 \rightarrow x_3$ avec $x_i \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où \mathbf{c} est un nouveau générateur correspondant à l'élément représenté par \mathbf{ab} .
 - b Pour chacun, en déduire deux systèmes de réécriture quadratiques sur l'alphabet $\{1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ où 1 désigne l'unité (l'un avec deux, l'autre avec trois règles).
 - c Proposer une façon d'associer à tout système de réécriture quadratique un graphe sur lequel on puisse reconnaître s'il correspond à une normalisation quadratique et, auquel cas, calculer sa complexité.
Décrire des fragments pertinents de ceux associés aux systèmes de la question 2.b.
-
- 3.a Pour chacun, construire un automate de Mealy sur l'alphabet $\{1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.
 - b Expliciter des critères permettant de conclure qu'un tel automate de Mealy engendre (ou n'engendre pas) le monoïde initial.
Préciser lesquels s'appliquent aux automates de la question 3.a.
 - c Expliquer le lien entre de tels automates de Mealy (qu'ils engendrent le monoïde ou non) et les fonctions de croissance du monoïde (comme celle à la question 1.b).