Examen MPRI 2016/2017
"Modélisation par automates finis"
Automates et semigroupes

Livres et ordinateurs interdits. Notes personnelles autorisées.

Exercice 1

Considérons les deux monoïdes suivants :

$$\mathbf{J} = \left\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} : \begin{array}{r} \mathtt{ab} = \mathtt{ba} \\ \mathtt{ac} = \mathtt{ca} \\ \mathtt{bc} = \mathtt{cb} \end{array} \right\rangle_{+}^{1} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{K} = \left\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} : \begin{array}{r} \mathtt{bab} = \mathtt{ba} \\ \mathtt{ac} = \mathtt{ca} \\ \mathtt{cbc} = \mathtt{cb} \end{array} \right\rangle_{+}^{1}.$$

1. Pour chacun, calculer explicitement sa famille de Garside minimale. Est-elle finie ?
2. Pour chacun, expliquer ce que l'on peut déduire : automaticité ? autosimilarité ? etc.

Considérons un troisième monoïde :

$$\mathbf{L} = \left\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} : \begin{array}{r} \mathtt{bab} = \mathtt{ba} \\ \mathtt{ac} = \mathtt{ca} \\ \mathtt{bc} = \mathtt{cbc} \end{array} \right\rangle_{+}^{1}.$$

3. Préciser ce qui distingue $\mathbf{L}$ de $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$? Proposer alors une démarche alternative.

Exercice 2

On souhaite énumérer les normalisations quadratiques sur un alphabet $\mathcal{Q}$ de taille donnée.

1. Donner un algorithme simple pour énumérer les fonctions idempotentes de $\mathcal{Q}^2$ dans $\mathcal{Q}^2$. Calculer le nombre de telles fonctions.
2. Proposer un algorithme qui permette alors de détecter si une telle fonction définit une normalisation quadratique tout en évaluant sa *complexité* quand c'est bien le cas.
3. Appliquer ces algorithmes dans le cas $\mathcal{Q} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ tout en réduisant par symétrie le nombre de cas à traiter.