Examen MPRI 2017/2018

"Modélisation par automates finis"

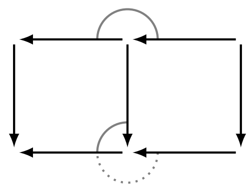
Automates et semigroupes

Livres et ordinateurs interdits. Notes personnelles autorisées.

Exercice 1

On rappelle que, pour toute famille Q d'un monoïde M, une décomposition $q_2q_1 \in Q^2$ est dite *Q-normale*, ce que l'on note $\xleftarrow{q_1} \frown \xleftarrow{q_2}$ quand, pour tout $q \in Q$, pour tout $f \in M$, si q divise q_2q_1f à droite, alors q divise q_1f à droite.

0. Représenter le diagramme sur lequel figurent ainsi les flèches pour q_1, q_2, q, f et d'autres.
1. Montrer que, si $q_2q_1 \in Q^2$ est Q-normale, alors p_2p_1 l'est aussi, pour tout $p_1 \in Q$ multiple à droite de q_1 et tout $p_2 \in Q$ diviseur à droite de q_2.
2. Démontrer alors la *propriété du domino* correspondant au diagramme ci-dessous (où les hypothèses figurent en traits pleins et la conclusion en pointillés) :



3. Préciser le lien entre la propriété du domino et la complexité $(4, 3)$ pour une normalisation quadratique.

Exercice 2

On considère les monoïdes

$$\mathbf{L} = \langle\, \mathtt{a}, \mathtt{b} : \mathtt{ab} = \mathtt{ba} = \mathtt{aa} = \mathtt{bb} \,\rangle^{\mathtt{1}}_{+}$$

$$\mathbf{W} = \langle\, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c} : \mathtt{aa} = \mathtt{cc} = \mathtt{bc}, \mathtt{ba} = \mathtt{cb} = \mathtt{ab}, \mathtt{bb} = \mathtt{ca} = \mathtt{ac} \,\rangle^{\mathtt{1}}_{+}.$$

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Et, dans chacune,
les questions (b) et (c) peuvent également être traitées indépendamment.

0. Prouver que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{W}$ sont infinis.

1.(a) Énumérer les normalisations quadratiques sur $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ associées à $\mathbf{L}$. On notera que l'alphabet choisi ici *n'est pas* $\{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. En choisir une.

(b) Calculer sa complexité. On pourra pour cela construire le graphe associé.

(c1) Dessiner l'automate de Mealy $\mathcal{L}$ associé à cette normalisation quadratique.

(c2) Dessiner le carré $\mathcal{L}^2$, puis minimiser $\mathcal{L}^2$.

(d) Conclure d'une phrase synthétique.

2.(a) Proposer une normalisation quadratique $\textsc{n}$ sur $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ associée à $\mathbf{W}$ pour laquelle $\mathtt{bc}$, $\mathtt{ab}$ et $\mathtt{ac}$ sont $\textsc{n}$-normaux. On notera que l'alphabet choisi ici *n'est pas* $\{\mathtt{1}, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$.

(b) Calculer la complexité de $\textsc{n}$. On pourra pour cela construire le graphe associé.

(c1) Dessiner l'automate de Mealy $\mathcal{W}$ associé à la normalisation quadratique $\textsc{n}$.

(c2) Dessiner la séquence de $\mathfrak{md}$-réduction pour $\mathcal{W}$.

(d) Conclure d'une phrase synthétique.

3. En vous appuyant sur l'argument donné pour la question 0 et les réponses aux questions 1 et 2, préciser les effets possibles de l'absence de l'unité $\mathtt{1}$ dans l'alphabet choisi.