



ÉCOLE POLYTECHNIQUE



THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

par

Dominique POULALHON

**PROBLÈMES ÉNUMÉRATIFS AUTOUR DES CARTES COMBINATOIRES
ET DES FACTORISATIONS DANS LE GROUPE SYMÉTRIQUE**

Soutenue le 17 décembre 2002 devant le jury composé de :

Mme Brigitte VALLÉE	Présidente
MM. Didier ARQUÈS Marc NOY	Rapporteurs
Robert CORI Dominique GOUYOU-BEAUCHAMPS Daniel KROB	Examineurs
Gilles SCHAEFFER	Invité



LABORATOIRE D'INFORMATIQUE
Unité mixte CNRS n°7650
École polytechnique 91128 Palaiseau Cedex FRANCE

Table des matières

1	Préliminaires	5
1.1	Généralités sur le groupe symétrique	5
1.2	Graphes et cartes	8
1.3	Produits de transpositions	11
1.4	Les différents types de factorisations	17
1.5	Factorisations transitives en transpositions	19
1.6	Factorisations transitives générales et constellations	21
I	Le point de vue algébrique	25
2	Factorisations d'un grand cycle	27
2.1	Énoncé du théorème principal	28
2.1.1	Résultats antérieurs	28
2.1.2	Énoncé du théorème	29
2.1.3	Discussion à propos du théorème 2.1	30
2.1.4	Schéma de la preuve	31
2.2	Un peu de théorie des caractères	31
2.2.1	Règle de Murnaghan-Nakayama	32
2.2.2	Diagrammes quasi-coloriés	33
2.2.3	Diagrammes coloriés redressés	34
2.3	Une sommation graphique	37
2.3.1	Graphes étoilés coloriés	37
2.3.2	Composantes connexes et parité	39
2.3.3	Une involution pour éliminer les contributions négatives	40
2.4	Orientabilité et énumération explicite	41
2.4.1	Fonction de parité et orientabilité	41

2.4.2	Fin de l'énumération	42
2.5	Résultats asymptotiques	45
2.5.1	Grand nombre de facteurs identiques	46
2.5.2	Grands facteurs	47
2.6	Premières valeurs	49
3	Liens entre cartes et factorisations dans d'autres groupes	51
3.1	Le groupe des permutations signées	51
3.2	Représentation par des constellations signées	53
3.3	Cas des factorisations de n -cycles signés en deux facteurs	54
3.4	Généralisations	57
4	Un opérateur sur les fonctions symétriques	61
4.1	Introduction	61
4.2	Central characters for partitions $r1^{n-r}$	63
4.3	Elementary operators	66
4.3.1	Symmetric functions	66
4.3.2	Restricted permutations	67
4.3.3	The operator $H_{\overline{\alpha}}$ and Katriel's notations	67
4.3.4	Families of connexion coefficients	70
4.4	Central characters for general partitions	70
II	Résultats bijectifs dans le cas planaire	73
5	Introduction à la conjugaison d'arbres	75
5.1	Rappels sur les résultats de Tutte	75
5.2	Les arbres sont des mots conjugués	77
5.3	... Et les cartes sont des arbres conjugués	82
5.3.1	Premier exemple : les cartes 4-régulières	82
5.3.2	Deuxième exemple : les cartes 4-régulières biparties	86
5.3.3	Un théorème général : les constellations planaires	88
5.4	Comment jongler avec les cartes	89
5.4.1	La dualité	89
5.4.2	La construction radiale	93
5.4.3	Les m -constellations quelconques	95
5.4.4	Une famille de cartes colorées	96

5.5	Applications à la génération aléatoire et au codage	98
6	Triangulations non séparables	99
6.1	Préliminaires	99
6.1.1	Rappels sur la connexité et la dualité	99
6.1.2	Triangulations d'un polygone sans point intérieur	101
6.1.3	Triangulations non séparables	102
6.1.4	La formule de Mullin	103
6.1.5	Triangulations enracinées	107
6.2	Construction de la formule	108
6.3	La clôture complète produit des cartes non séparables	115
6.3.1	Lemmes préliminaires sur la structure des arbres bourgeonnants	117
6.3.2	Étude des arêtes séparatrices	118
6.3.3	Cas du sommet spécial	122
6.4	La construction inverse	122
6.5	Génération aléatoire	127
7	Triangulations 3-connexes	129
7.1	Préliminaires	129
7.2	Des arbres aux triangulations	131
7.2.1	La construction	131
7.2.2	Qu'a-t-on construit ?	136
7.3	Application réciproque	140
7.3.1	Parcours en profondeur	140
7.3.2	Démonstration	140
7.4	Génération aléatoire	142
III	Fonctions de parking	143
8	Digression autour de n^{n-2}	145
8.1	Suites de parking	145
8.2	Bijection avec les factorisations minimales de $(1\ 2\ \dots\ n)$	147
8.3	Bijection avec les couples admissibles de permutations	148
9	Une généralisation : les multisuites de parking	153
9.1	Introduction	153

9.2	Definition	155
9.3	Characterization	156
9.3.1	In terms of parking functions	156
9.3.2	In terms of Łukasiewicz languages	157
9.4	Sandpiles on $K_{p,q,1}$	159
9.5	Enumeration by conjugacy	160
9.6	Increasing (p, q) -parking functions	162
9.7	Generalization	163

Table des figures

FIG. 1.1	Dessins divers d'un même graphe.	9
FIG. 1.2	Deux cartes enracinées non isomorphes.	10
FIG. 1.3	Exemple de carte combinatoire.	11
FIG. 1.4	Les deux cas extrémaux.	15
FIG. 1.5	Illustration de la bijection de P. Moszkowski.	16
FIG. 1.6	Exemple de 3-constellation planeaire enracinée à 8 polygones numérotés.	23
FIG. 2.1	Exemples de tableaux de rubans.	33
FIG. 2.2	Illustration de la bijection entre tableaux de rubans et diagrammes quasi-coloriés.	34
FIG. 2.3	Les différents redressements de la partition $(8, 7, 7, 6)$	36
FIG. 2.4	Un exemple de graphe étoilé colorié.	38
FIG. 3.1	Un 2-cactus signé numéroté planeaire.	54
FIG. 5.1	Deux arbres plans plantés.	78
FIG. 5.2	Mot de Łukasiewicz codant l'arbre de la figure 5.1(a).	79
FIG. 5.3	Énumération des arbres binaires complets.	81
FIG. 5.4	Un arbre binaire bourgeonnant à 8 nœuds, 10 feuilles et 8 bourgeons.	83
FIG. 5.5	Mot de bord de l'arbre bourgeonnant de la figure 5.4.	83
FIG. 5.6	Clôture partielle de l'arbre de la figure 5.4.	84
FIG. 5.7	Clôture complète d'un arbre bourgeonnant équilibré.	85
FIG. 5.8	Un exemple d'arbre ternaire bourgeonnant.	86
FIG. 5.9	Clôture partielle des arbres ternaires bourgeonnants.	87
FIG. 5.10	Clôture complète des arbres ternaires bourgeonnants.	88
FIG. 5.11	Énumération constructive des cartes 4-régulières.	90
FIG. 5.12	Énumération constructive des cartes 4-régulières biparties.	91
FIG. 5.13	Une carte planeaire (noire) et sa duale (grise).	92

FIG. 5.14	D'une carte bipartie 4-régulière à une quadrangulation bicolore.	92
FIG. 5.15	Une carte planaire (noire) et sa radiale (grise).	93
FIG. 5.16	Inverse de la construction radiale pour la carte de la figure 5.7.	94
FIG. 5.17	Inverse de la construction radiale pour la carte de la figure 5.12.	95
FIG. 5.18	Des cartes 4-régulières biparties aux cartes 3-eulériennes quelconques.	96
FIG. 5.19	Des cartes 4-régulières biparties aux cartes cubiques cycliquement colorées.	97
FIG. 6.1	Arêtes singulières dans les cartes.	100
FIG. 6.2	Scission d'un sommet.	100
FIG. 6.3	Cocycles, séparateurs et dualité.	101
FIG. 6.4	Les triangulations des premiers petits polygones.	101
FIG. 6.5	Bijection entre triangulations d'un k -gone et arbres binaires à $k - 2$ nœuds.	102
FIG. 6.6	Différents types de triangulations d'un hexagone.	102
TAB. 6.7	Formules énumératives pour diverses familles de triangulations.	103
FIG. 6.8	Décomposition récursive des triangulations non séparables.	104
FIG. 6.9	Trois triangulations enracinées d'un hexagone.	107
FIG. 6.10	La carte quasi-cubique duale de la triangulation de la figure 6.9.	108
FIG. 6.11	Dédoublage des nœuds génériques.	110
FIG. 6.12	Éclatement du nœud spécial.	111
FIG. 6.13	Bourgeonnement d'un arbre quasi-ternaire.	112
FIG. 6.14	Un exemple de clôture partielle d'un arbre bourgeonnant non équilibré.	113
FIG. 6.15	Clôture de l'arbre bourgeonnant équilibré de la figure 6.13(b).	114
FIG. 6.16	Énumération constructive des cartes quasi-cubiques non séparables	116
FIG. 6.17	Décomposition d'un arbre bourgeonnant N en l'une de ses arêtes e	117
FIG. 6.18	Entrantes relatives à l'arête e	117
FIG. 6.19	Clôture de deux bourgeons jumeaux.	118
FIG. 6.20	Décomposition de N selon deux arêtes.	120
FIG. 6.21	Décomposition d'un arbre bourgeonnant au niveau de son nœud spécial.	121
FIG. 6.22	Récurrence dans le cas d'une arête séparatrice.	124
FIG. 6.23	Récurrence dans le cas d'un unique sommet séparateur.	125
FIG. 6.24	Unique configuration avec un sommet pathologique sur la face infinie.	126
FIG. 6.25	Analyse du cas générique.	126
FIG. 6.26	Récurrence dans le cas générique.	127
FIG. 7.1	Les plus petites triangulations 3-connexes.	130

FIG. 7.2	Propriété locale d'un réalisateur.	130
FIG. 7.3	Les 9 arbres de l'ensemble \mathcal{B}_3	131
FIG. 7.4	Décomposition à la racine d'un élément de \mathcal{B} en deux éléments de \mathcal{F}	132
FIG. 7.5	Bijection entre \mathcal{F} et l'ensemble des arbres quaternaires.	132
FIG. 7.6	Premières étapes de la clôture partielle d'un élément de \mathcal{B}	133
FIG. 7.7	Mot de bord cyclique de la clôture partielle d'un élément de \mathcal{B}	133
FIG. 7.8	Schéma de la clôture complète d'un arbre équilibré.	134
FIG. 7.9	Énumération constructive des triangulations 3-connexes.	135
FIG. 7.10	Illustration de la règle de coloration sur l'arbre B de la figure 7.6.	136
FIG. 7.11	Étude des différents cas de clôture d'un bourgeon.	137
FIG. 7.12	Orientation et coloration des bords de la clôture partielle.	138
FIG. 7.13	Incohérence entre présence d'un cycle monochrome et règle de coloration.	139
FIG. 8.1	Exemple d'exécution de l'algorithme de parking.	146
FIG. 8.2	Exemple de parking circulaire.	147
FIG. 8.3	Arbre de la factorisation obtenue à l'exemple 8.2.	148
FIG. 8.4	Exemple d'exécution de l'algorithme de parking sauvage.	149
FIG. 9.1	The tripartite graph $K_{5,4,1}$	159
FIG. 9.2	Two topplings on the tripartite graph $K_{3,2,1}$	160

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'énumération de deux types d'objets intimement liés, à savoir les *cartes*, ou plongements de graphes dans des surfaces, et les factorisations de permutations, qui permettent de coder les caractéristiques topologiques des cartes. Les motivations pour une telle étude sont variées et issues de domaines très divers.

L'étude des factorisations de permutations, en lien avec celle des revêtements ramifiés de la sphère, remonte aux travaux de A. Hurwitz [73], à la fin du 19^e siècle. Il énumère alors les factorisations *transitives* de permutations quelconques en produit de transpositions, et obtient une expression d'une élégance indéniable, qui attend toujours une démonstration purement combinatoire. Ce lien a motivé de nombreuses tentatives d'énumération de factorisations de permutations selon des critères variés et plus ou moins restrictifs, se traduisant du point de vue des cartes par des contraintes locales de degré ou d'adjacence [3, 49, 60, 61, 80, 115]. Un important théorème dû à Belyi permettant de relier courbes algébriques et revêtements de surfaces de Riemann accentue encore l'intérêt que portent les mathématiciens aux cartes. Dans son *Esquisse d'un programme*, A. Grothendieck propose alors une approche entièrement neuve de l'étude du groupe de Galois absolu de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ à travers celle de *dessins d'enfant* [112], puisque, comme il l'explique, « il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre. »

Parallèlement, l'algorithmique des graphes a clairement montré l'importance du concept de planarité, et, plus généralement, des caractéristiques topologiques des représentations de graphes choisies : de très nombreux problèmes possèdent des solutions beaucoup plus efficaces pour les graphes planaires que pour les graphes généraux, à condition du moins de disposer d'un plongement planaire du graphe considéré [8, 32, 69, 70, 120]. La structure des cartes, plus complexe que celle des graphes, est par là-même plus explicite, et donc plus propre à l'algorithmique. C'est ce constat qui a poussé divers auteurs à étudier les propriétés combinatoires des cartes planaires, avec en particulier comme motivation la recherche d'une démonstration du théorème des quatre couleurs. Dans cette optique, des critères autres que les degrés des sommets ou des faces peuvent être intéressants, comme la connectivité ou le diamètre par exemple. Ces critères typiquement topologiques ne s'expriment alors pas naturellement en termes de permutations.

Les cartes sont également très étudiées en physique statistique [15, 24, 26, 71] : en tant que modélisations de surfaces *discrètes*, elles sont plus simples à étudier d'un point de vue aléatoire que les surfaces continues. Elles constituent donc des supports de choix pour les modèles d'Ising ou de particules dures ; les cartes étudiées dans le domaine de la *gravité quantique* 2-dimensionnelle sont donc toujours décorées d'une façon ou d'une autre, par exemple par l'ajout de spins sur les

sommets. Une méthode d'énumération de cartes extrêmement puissante a été développée dans ce cadre, à base d'*intégrales de matrices* [130]. Elle permet d'obtenir très rapidement et sans nécessiter d'intuition combinatoire des expressions de séries génératrices, et fournit ainsi des résultats exacts ou asymptotiques. Cette méthode a cependant le défaut de n'être pas toujours absolument rigoureuse, et n'est de toute façon pas tout à fait satisfaisante du point de vue combinatoire, en ce qu'elle ne permet pas de comprendre les éventuelles particularités des expressions obtenues (forme simple des coefficients, algébricité des séries...)



Les méthodes adéquates pour énumérer des familles de cartes varient selon les propriétés qui les définissent. Lorsque celles-ci peuvent être traduites en termes de factorisations de permutations, la puissance des outils algébriques est un atout indéniable. En particulier, des formules très élégantes peuvent être obtenues en termes de caractères du groupe symétrique ou de fonctions symétriques, pour des familles de cartes de genre quelconque, et même éventuellement non orientables. Ces méthodes ont cependant un champ d'action intrinsèquement limité aux contraintes portant sur des propriétés d'adjacence.

Dans le cadre planaire, W. T. Tutte a développé à partir des années 60 tout un arsenal de techniques énumératives d'une puissance et d'une élégance impressionnantes. La série d'articles intitulés « A census of... » [121, 122, 123] a ainsi posé les bases d'une approche novatrice reposant sur la décomposition récursive des cartes à énumérer ; cette décomposition, une fois traduite en termes de séries génératrices, fournit des équations auxquelles peut généralement être appliquée ce qu'on appelle la *méthode quadratique*. La méthode de W. T. Tutte, qui a été étendue en genre supérieur ainsi qu'à certains paramètres compatibles avec les décompositions récursives, a permis d'obtenir de très nombreux résultats exacts ou asymptotiques, y compris récemment [10, 11, 27, 28, 53, 124, 128].

Enfin, outre les méthodes d'intégrales de matrices citées plus haut, il convient encore de mentionner l'approche bijective, *i.e.* la démarche consistant à rechercher des bijections permettant de coder les cartes par des objets simples, facilement énumérables, tels les mots ou les arbres. Les premiers résultats de ce genre ont été obtenus par R. Cori [34] et D. Arquès [4], et ont permis de coder les cartes planaires par des arbres étiquetés. Outre le fait que les démonstrations basées sur cette approche sont particulièrement élégantes, elles ont souvent le mérite d'expliquer l'étonnante simplicité de certaines formules énumératrices, et de permettre de mieux appréhender la structure des objets. Ce qui peut aboutir à l'élaboration d'algorithmes constructifs, voire d'algorithmes de génération aléatoire, et ouvre donc les portes à l'analyse expérimentale de paramètres pour l'instant incontrôlables de manière exacte. Remarquons au passage la grande rareté d'algorithmes de génération aléatoire pour les *graphes* planaires.



La contribution de cette thèse se situe dans le cadre de deux de ces approches. D'une part, nous présentons des résultats basés sur une approche algébrique des factorisations dans le groupe symétrique, en particulier une énumération de *m-constellations* à une seule face mais de genre quelconque basée sur des évaluations de caractères du groupe symétrique. D'autre part, nous étudions des familles de triangulations planaires vérifiant certaines conditions de connexité, pour lesquelles l'approche bijective est mieux adaptée. Nous obtenons ainsi des démonstrations éclairantes

de formules précédemment connues, ainsi que des algorithmes de génération aléatoire uniforme particulièrement efficaces.



Ce manuscrit est constitué d'un chapitre préliminaire, suivi de trois parties distinctes.

Le chapitre préliminaire présente des rappels sur les factorisations de permutations et les cartes, certains résultats connus ainsi que les types de problèmes que l'on cherche à résoudre, en insistant notamment sur la complémentarité des visions algébrique et topologique.

La première partie traite de problèmes énumératifs en genre quelconque vus sous l'angle algébrique. Le résultat principal, exposé au chapitre 2, est une formule exprimant le nombre de factorisations dans \mathfrak{S}_n de la permutation cyclique $(1\ 2\ \dots\ n)$ en fonction des types cycliques imposés aux facteurs, ou, de façon équivalente, le nombre de *m-cactus* selon la distribution des degrés des sommets. Cette expression, obtenue par des manipulations combinatoires à partir de la formule donnée par la théorie des caractères, met en évidence le rôle primordial du *genre* de la factorisation (ou de la carte correspondante).

Le chapitre suivant décrit une variante « signée » des *m*-constellations, qui nous permet de représenter par des objets topologiques les factorisations dans les produits en couronne de \mathfrak{S}_n et d'un groupe abélien fini, notamment dans le groupe des permutations signées. Cette représentation rend simple et constructive l'énumération des factorisations de permutations signées en fonction des factorisations dans \mathfrak{S}_n de la permutation correspondante.

Le troisième chapitre de cette partie décrit un opérateur agissant sur les fonctions symétriques et permettant de modéliser l'action multiplicative des classes de conjugaison du groupe symétrique. L'introduction de cet opérateur est essentiellement motivée par le fait qu'un opérateur analogue, mais défini uniquement pour la classe des transpositions, s'est révélé parfaitement adapté à l'énumération de factorisations en transpositions [56, 59]. L'opérateur que nous décrivons illustre en particulier l'importance du type cyclique *réduit* des permutations : de même que l'action d'une transposition peut être décrite indépendamment de l'ordre du groupe symétrique dans lequel elle est plongée, l'action d'une permutation de type cyclique quelconque dépend essentiellement de ses cycles non triviaux, et non (du nombre) de ses points fixes.

La seconde partie traite quant à elle de problèmes énumératifs dans le cas planaire, pour des familles de cartes définies par des conditions de connectivité qui ne peuvent être décrites en termes algébriques. Nous utilisons donc ici une description topologique des cartes étudiées, auxquelles nous cherchons à appliquer une approche bijective.

Cette partie débute au chapitre 5 par une introduction à la notion de *conjugaison d'arbres*, proposée par G. Schaeffer pour expliquer la forme remarquablement simple de certaines des expressions obtenues par les méthodes d'énumération de W. T. Tutte. Cette méthode a également permis d'obtenir de nouveaux résultats énumératifs, que ce soit des formules closes [21], ou, plus récemment, des preuves d'algébricité de séries génératrices [23, 22].

Nous proposons ensuite dans les chapitres 6 et 7 des extensions de cette méthode permettant de prendre en compte un nouveau paramètre, le degré de connexité des cartes. Nous nous intéressons plus précisément à des familles de triangulations planes 2- ou 3- connexes, pour lesquelles nous obtenons, d'une part, une démonstration bijective des formules énumératrices, et, d'autre part, des

algorithmes de génération aléatoire uniforme *linéaires*. Ce qui est particulièrement remarquable dans le cas des triangulations 3-connexes, puisqu'il s'agit en fait d'un algorithme de génération aléatoire pour une famille de *graphes* planaires, en vertu du théorème d'unicité de plongement des cartes 3-connexes dû à H. Whitney [129]. Nos algorithmes garantissent que le tirage se fait exactement selon la distribution voulue (il s'agit d'algorithmes dits de « perfect sampling »). Au contraire, les algorithmes utilisés jusqu'ici, notamment en physique, engendrent les objets selon des distributions approximatives, dont la distance à l'objectif n'est même pas garantie [2]. Les algorithmes combinatoires que nous développons gagnent donc sur deux tableaux : la rapidité et la précision.

Enfin, la troisième partie présente une digression autour d'une famille d'objets énumérée par la même suite de nombres que les factorisations minimales de grands cycles en transpositions, la famille des *suites de parking*. Après un court chapitre présentant ces suites ainsi que deux bijections les mettant en jeu, le chapitre 9 en propose une généralisation, et en décrit quelques propriétés.



Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur le groupe symétrique

Cette section est destinée à récapituler certaines propriétés de base du groupe symétrique, et à fixer la terminologie et les notations qui seront employées dans la suite.

DÉFINITION 1.1 Soit n un entier strictement positif. Le produit de composition munit l'ensemble des *permutations* de $\llbracket 1, n \rrbracket$ d'une structure de groupe, appelé *groupe symétrique d'ordre n* et noté \mathfrak{S}_n . Ce groupe, d'ordre $n!$, est non abélien dès que $n \geq 3$.

Étant donné deux permutations π et σ dans \mathfrak{S}_n , on note $\pi\sigma$ la permutation $\pi \circ \sigma$ (qui à tout entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ associe l'entier $\pi(\sigma(i))$). La *notation en ligne* consiste à représenter σ par le mot $\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$.

EXEMPLE 1.1 Soit σ la permutation appartenant à \mathfrak{S}_9 donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma(1) = 5, \quad \sigma(2) = 8, \quad \sigma(3) = 2, \quad \sigma(4) = 4, \quad \sigma(5) = 1, \\ \sigma(6) = 9, \quad \sigma(7) = 3, \quad \sigma(8) = 7 \quad \text{et} \quad \sigma(9) = 6. \end{aligned}$$

Alors la représentation usuelle de σ est :

$$\sigma = 5 \ 8 \ 2 \ 4 \ 1 \ 9 \ 3 \ 7 \ 6.$$

DÉFINITION 1.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les images itérées de i par σ forment son *orbite*, qui est l'un des *cycles* de σ . Si ℓ est le plus petit entier strictement positif tel que $\sigma^\ell(i) = i$, alors le cycle $(i \ \sigma(i) \dots \sigma^{\ell-1}(i))$ est un ℓ -*cycle*, ou encore un *cycle de longueur ℓ* .

Plus généralement, la notation $(i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_\ell)$ est utilisée pour représenter la permutation qui envoie i_j sur i_{j+1} pour tout $j \in \llbracket 1, \ell - 1 \rrbracket$, i_ℓ sur i_1 , et laisse fixes tous les autres points. Une telle permutation est également appelée ℓ -*cycle*.

Toute permutation σ peut être considérée de façon unique comme le produit (commutatif) de cycles disjoints, ce qu'on appelle *représentation cyclique* de σ . La distribution des longueurs de

ces cycles est appelée *type cyclique* de la permutation σ .

EXEMPLE 1.2 La permutation σ définie précédemment se décompose en quatre cycles, un de longueur 4, deux de longueur 2, et un de longueur 1 :

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 8\ 7\ 3)(4)(6\ 9).$$

Permuter cycliquement les éléments à l'intérieur des cycles, ou réordonner les cycles, ne change pas la permutation ; les représentations suivantes sont donc équivalentes à la précédente :

$$\sigma = (3\ 2\ 8\ 7)(1\ 5)(6\ 9)(4) = (4)(1\ 5)(9\ 6)(7\ 3\ 2\ 8) = (9\ 6)(8\ 7\ 3\ 2)(5\ 1)(4)$$

ou même :

$$\sigma = (2\ 8\ 7\ 3)(1\ 5)(6\ 9).$$

En effet les cycles de longueur 1, également appelés *points fixes*, sont généralement omis.

La manière la plus commode de décrire le type cyclique d'une permutation consiste à faire appel à la notion de partition d'entier :

DÉFINITION 1.3 Une *partition* λ d'un entier n en k parts est un k -uplet décroissant $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ d'entiers naturels non nuls dont la somme vaut n :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n \quad \text{si} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n.$$

L'entier n est la *taille* de λ , notée $|\lambda|$, k sa *longueur*, notée $\ell(\lambda)$, et $n - k$ son *rang*, noté $r(\lambda)$:

$$|\lambda| = \ell(\lambda) + r(\lambda).$$

Si ℓ_i désigne le nombre de parts de taille i dans λ , on utilise également la *notation exponentielle*

$$\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}.$$

Le *diagramme de Ferrers* associé est composé de n *cellules* ou *cases* réparties en ℓ lignes de longueurs respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$.

EXEMPLE 1.3 Le type cyclique de la permutation σ introduite dans l'exemple 1.1 est donc donné par la partition

$$\lambda = (4, 2, 2, 1) = 1^1 2^2 3^0 4^1 5^0 6^0 7^0 8^0 9^0 = 1^1 2^2 4^1 = 1 2^2 4,$$

dont le diagramme de Ferrers est le suivant :

$$\begin{array}{l} \lambda_4 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \square & & & \\ \square & \square & & \\ \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square \end{array}$$

REMARQUE 1.1 Par un léger abus de langage, la terminologie et les notations concernant la taille, la longueur et le rang d'une partition seront également employées à propos des permutations pour désigner la taille, la longueur et le rang de la partition décrivant leur type cyclique.

NOTATION 1.4 Dans la suite, les partitions seront systématiquement désignées par des lettres grecques ; même lorsque cela ne sera pas explicitement précisé, la i -ème part sera notée par la même lettre munie de l'indice i , et le nombre de parts de taille i par la lettre latine correspondante, également munie de l'indice i . Par exemple, la i -ème part d'une partition α est notée α_i , et a_i désigne le nombre de parts de taille i dans α .

DÉFINITION 1.5 Dans un groupe G , deux éléments g et h sont dits *conjugués* s'il existe un élément $k \in G$ tel que $g = khk^{-1}$. Cela définit une relation d'équivalence sur les éléments de G , dont les classes sont appelées *classes de conjugaison*. En particulier, g est lui-même un de ses conjugués, et on définit son *centralisateur* Z_g comme le sous-groupe (non vide) de G suivant :

$$Z_g = \{k \in G \mid k g k^{-1} = g\}.$$

Soit π et σ deux permutations de \mathfrak{S}_n , avec, en notation cyclique,

$$\pi = (i_1 i_2 \dots i_\ell) \dots (i_m i_{m+1} \dots i_n).$$

Il est alors clair que

$$\sigma \pi \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_\ell)) \dots (\sigma(i_m) \sigma(i_{m+1}) \dots \sigma(i_n)).$$

En particulier, π et $\sigma \pi \sigma^{-1}$ ont même type cyclique quelles que soient les permutations π et σ considérées. La proposition suivante en découle immédiatement :

PROPOSITION 1.2 *Deux permutations π_1 et π_2 appartiennent à une même classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n si et seulement si elles ont le même type cyclique.*

Il existe donc une bijection naturelle entre les partitions de l'entier n et les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n . Pour toute partition λ de n , on note \mathcal{C}_λ la classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n naturellement associée à λ , et k_λ son cardinal.

PROPOSITION 1.3 *Si $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} 3^{\ell_3} \dots n^{\ell_n}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ a pour type cyclique λ , alors $|\mathcal{Z}_\sigma|$ ne dépend que de λ et*

$$z_\lambda := |\mathcal{Z}_\sigma| = 1^{\ell_1} \ell_1! 2^{\ell_2} \ell_2! 3^{\ell_3} \ell_3! \dots n^{\ell_n} \ell_n!$$

En conséquence :

$$k_\lambda = \frac{n!}{1^{\ell_1} \ell_1! 2^{\ell_2} \ell_2! 3^{\ell_3} \ell_3! \dots n^{\ell_n} \ell_n!}.$$

DÉMONSTRATION. Soit π un élément de \mathcal{Z}_σ ; π ne peut agir sur σ qu'en permutant entre eux des cycles de même longueur, ou¹ en opérant une permutation circulaire des éléments d'un même cycle. Il existe $\ell_i!$ actions du premier type sur l'ensemble des ℓ_i i -cycles de σ , et i actions du second type sur chacun d'eux. Ce qui donne la première formule, dont la seconde découle immédiatement. \square

— o —

¹non exclusif, naturellement

1.2 Graphes et cartes

Cette section contient des rappels très rapides sur les graphes et de cartes, restreints aux définitions et propriétés de base de ces objets, dans l'unique but de fixer certains points de vocabulaire. On pourra se reporter avec profit aux livres de C. Berge [13], J. L. Gross et T. W. Tucker [66] ou encore W. T. Tutte [126] pour des développements plus précis. Toutes les notions moins classiques auxquelles nous feront appel dans la suite seront définies lorsque cela s'avérera utile.

DÉFINITION 1.6 Un *graphe* (fini) Γ est un couple formé d'un ensemble fini de *sommets* S_Γ et d'un ensemble fini d'*arêtes* A_Γ , muni d'une application ι de A_Γ dans l'ensemble des paires d'éléments de S_Γ . Si $a \in A_\Gamma$ et $\iota(a) = \{s_1, s_2\}$, s_1 et s_2 sont appelés *extrémités* de a , a est *incidente* à chacune de ses extrémités (et réciproquement), et celles-ci sont *adjacentes*. Une arête dont les deux extrémités sont confondues est une *boucle*. Un ensemble d'arêtes ayant les mêmes extrémités forme une *arête multiple*. Un graphe ne possédant ni boucle ni arête multiple est dit *simple*. Le *degré* d'un sommet s est le nombre total d'incidences de s avec A_Γ .

DÉFINITION 1.7 Soit Γ et Γ' deux graphes, φ une bijection de S_Γ sur $S_{\Gamma'}$, et ψ une bijection de A_Γ sur $A_{\Gamma'}$. Le couple (φ, ψ) est un *isomorphisme de graphes* si ces bijections sont compatibles avec les relations d'incidence ι et ι' des deux graphes, *i.e.* si :

$$\iota' \circ \psi = \varphi \circ \iota.$$

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de graphes entre eux ; la relation ainsi définie est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées *classes d'isomorphisme de graphes*, *graphes abstraits*, ou encore *graphes non étiquetés*. Un isomorphisme de Γ sur lui-même est appelé *automorphisme* de Γ . L'ensemble des automorphismes de Γ , muni de l'opération de composition, a une structure de groupe, noté $\text{Aut}(\Gamma)$ et appelé *groupe d'automorphismes de Γ* .

De nombreuses propriétés des graphes étant invariantes par isomorphisme, on identifie fréquemment les graphes isomorphes. On utilise alors le simple terme de « graphe » pour qualifier une classe d'isomorphisme de graphes, ce qui amène naturellement à préciser parfois si un graphe est étiqueté ou non pour lever les ambiguïtés éventuelles. En particulier, on pourra s'autoriser à étiqueter seulement les sommets, ou seulement les arêtes, ou certains sommets, selon la pertinence d'un tel choix.



Une première définition des cartes repose sur la notion de *plongement* d'un graphe dans une surface \mathcal{S} , c'est-à-dire de représentation de ce graphe par la donnée d'un ensemble S de points de \mathcal{S} – les sommets – et d'un ensemble A d'arcs de Jordan ouverts disjoints – les arêtes – tels que chaque arc ait pour extrémités les points correspondant aux sommets extrémités de l'arête correspondante. Chaque composante connexe de $\mathcal{S} \setminus (S \cup A)$ est appelée *face* du plongement. Celui-ci est dit *2-cellulaire* si toutes ses faces sont simplement connexes, c'est-à-dire homéomorphes à un disque.

DÉFINITION 1.8 Une *carte topologique* est un plongement 2-cellulaire d'un graphe connexe dans

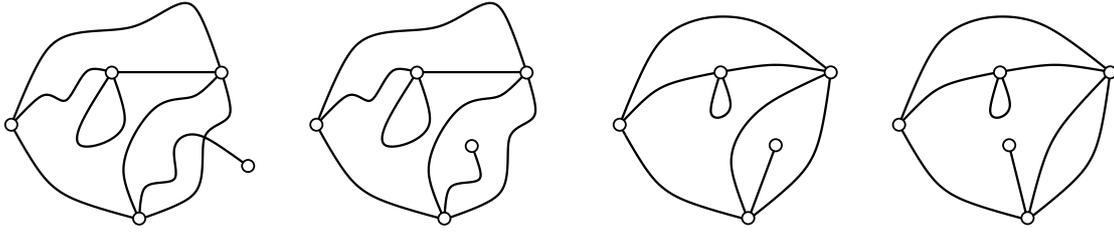


FIGURE 1.1 – Dessins divers d'un même graphe.

une surface compacte sans bord, à déformation continue près de la surface.

Nous ne considérerons dans la suite que des surfaces orientables ; les surfaces compactes orientables sans bord, ou *surfaces de Riemann*, sont entièrement classifiées, à homéomorphisme près, par leur *genre*, qui est un entier naturel égal au nombre de tores qu'il faut recoller pour obtenir une surface homéomorphe. On définit ainsi le *genre* d'une carte comme étant le genre de sa surface de plongement. Une carte est dite *planaire* si elle est de genre 0, c'est-à-dire dessinée sur la sphère : cette terminologie vient du fait que toute carte dessinée sur la sphère peut être dessinée dans le plan grâce à une projection stéréographique.

La figure 1.1 représente plusieurs dessins d'un même graphe dans le plan. Le premier n'en est pas un plongement, puisque deux arêtes se coupent. Les deux suivants sont des plongements correspondant à la même carte topologique, tandis que le dernier ne peut pas être obtenu à partir des précédents par déformation de la surface et correspond donc à une autre carte.

La notion d'incidence entre sommet et arête peut être étendue : un sommet s (resp. une arête a) et une face f sont dits incidents l'un à l'autre si s (resp. a) est contenu(e) dans la frontière de f . Toute arête est incidente à deux sommets (distincts ou non) et à deux faces (éventuellement deux fois la même). En revanche, un sommet (resp. une face) peut être incident(e) à un nombre arbitraire d'arêtes ou de faces (resp. de sommets), toujours compté(e)s avec multiplicité.

DÉFINITION 1.9 On appelle *degré* d'une face (resp. d'un sommet) le nombre d'incidences de cette face avec des arêtes ou, de façon équivalente, avec des sommets (resp. des faces). Un *coin* est une incidence entre une face et un sommet, et correspond donc à la succession de deux arêtes autour de la face ou du sommet concerné(e).

Une caractéristique très importante des cartes est donnée par la *formule d'Euler*, qui relie les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'une quelconque carte de genre g :

PROPOSITION 1.4 (FORMULE DE LA CARACTÉRISTIQUE D'EULER) *Les nombres d'arêtes $a(\mathcal{C})$, de sommets $s(\mathcal{C})$ et de faces $f(\mathcal{C})$ d'une carte \mathcal{C} de genre g vérifient la relation suivante :*

$$s(\mathcal{C}) - a(\mathcal{C}) + f(\mathcal{C}) = 2 - 2g.$$

On peut, comme pour les graphes, définir des *isomorphismes de cartes*, et distinguer les cartes *étiquetées* ou *non étiquetées*. Une notion particulièrement importante est celle d'*enracinement* : enracer une carte consiste à choisir une de ses arêtes et à orienter celle-ci pour obtenir un objet

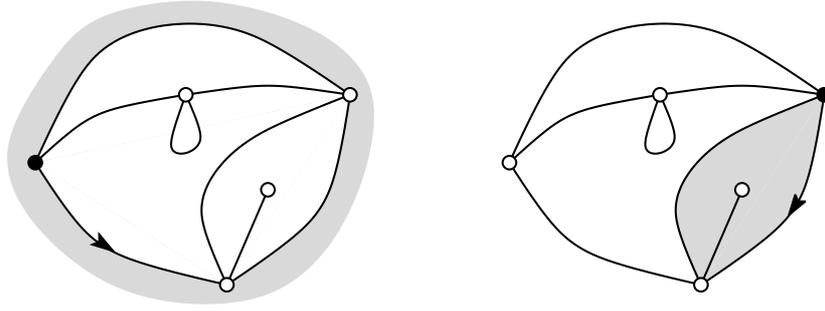


FIGURE 1.2 – Deux cartes enracinées non isomorphes.

dont le groupe d'automorphismes est trivial. Le sommet origine de l'arête racine est appelé *sommet racine*, et la face située à droite de l'arête racine est la *face racine*. La figure 1.2 représente deux enracinements différents d'un même carte (non enracinée); dans les deux cas, l'arête racine est repérée par une flèche, la face racine est la face grisée, et le sommet racine est le sommet noir.



Un plongement particulier d'un graphe dans une surface est caractérisé par l'ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet; ceux-ci déterminent donc une permutation de l'ensemble des extrémités d'arêtes. De même, l'ordre cyclique des arêtes autour des faces détermine une permutation de l'ensemble des côtés d'arêtes. Dans le cadre orientable, il est possible de confondre ces deux notions (extrémités ou côtés d'arêtes, *i.e.* incidences sommets – arêtes et faces – arêtes) en ce que nous appellerons *demi-arêtes* ou *brins*. Ceci permet de donner la définition alternative suivante :

DÉFINITION 1.10 Soit n un entier positif. Une *carte combinatoire* à n arêtes est un triplet $(\alpha, \sigma, \varphi)$ de permutations de l'ensemble $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ (dont les éléments sont appelés *brins*), vérifiant les conditions suivantes :

- α est une involution sans point fixe;
- $\alpha\sigma\varphi$ est la permutation identité;
- $\langle \alpha, \sigma, \varphi \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble des brins.

Les cycles des permutations α , σ et φ sont respectivement appelés *arêtes*, *sommets* et *faces* de la carte $(\alpha, \sigma, \varphi)$.

EXEMPLE 1.4 La figure 1.3 illustre cette définition, en représentant de manière « graphique » la carte combinatoire suivante :

$$\begin{cases} \alpha = (1\ 4)\ (2\ 8)\ (3\ 13)\ (5\ 12)\ (6\ 16)\ (7\ 15)\ (9\ 10)\ (11\ 14) \\ \sigma = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6\ 7)\ (8\ 9\ 10\ 11)\ (12\ 13\ 14\ 15)\ (16) \\ \varphi = (1\ 13\ 5)\ (2\ 4\ 15\ 11\ 9)\ (3\ 8\ 14)\ (6\ 12\ 7\ 16)\ (10) \end{cases}$$

Il s'agit d'une carte à 16 brins, 8 arêtes, 5 sommets et 5 faces. Les arêtes sont matérialisées par un sommet noir entre les deux brins correspondant. Les brins correspondant à la face grisée sont représentés en pointillé.

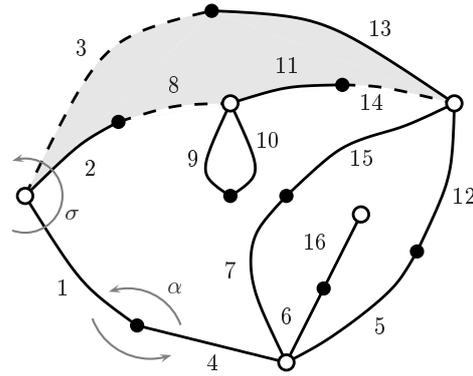


FIGURE 1.3 – Exemple de carte combinatoire.

Cette définition est la traduction, en termes de permutations, de la définition des cartes étiquetées. On peut également définir en ces termes les autres types de cartes. En particulier, une carte enracinée est une classe d'équivalence de la relation d'isomorphisme suivante : soit $\mathcal{C} = (\alpha, \sigma, \varphi)$ et $\mathcal{C}' = (\alpha', \sigma', \varphi')$ deux cartes combinatoires étiquetées. \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont isomorphes s'il existe une permutation ϑ de l'ensemble des brins dont 1 est un point fixe vérifiant $\alpha\vartheta = \vartheta\alpha'$, $\sigma\vartheta = \vartheta\sigma'$, et $\varphi\vartheta = \vartheta\varphi'$, autrement dit un réétiquetage des brins autres que le brin 1.

On pourra se reporter par exemple à [126] ou [35] pour plus de détails sur les cartes combinatoires, en particulier leurs automorphismes, ainsi que la notion d'orientabilité.



1.3 Produits de transpositions

Un ensemble générateur de \mathfrak{S}_n Une des classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n joue un rôle prépondérant : celle des cycles de longueur 2 ou *transpositions*. Leur première propriété, et non la moindre, est que ces permutations en quelque sorte « élémentaires » engendrent \mathfrak{S}_n en tant que groupe. Considérons en effet une permutation cyclique $\gamma = (i_1 i_2 i_3 \dots i_k)$. Alors γ peut s'écrire comme produit de $k - 1$ transpositions :

$$\gamma = (i_1 i_2) (i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k).$$

Comme toute permutation σ peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_\ell$, on obtient le lemme suivant :

LEMME 1.5 *Toute permutation σ peut s'écrire comme produit de $r(\sigma)$ transpositions.*

Un tel produit n'a naturellement aucune raison d'être unique, puisque les cycles eux-mêmes possèdent plusieurs factorisations qui ne diffèrent pas seulement par l'ordre des facteurs ; ainsi,

par exemple,

$$\begin{aligned}
 (i_1 i_2 i_3 \dots i_k) &= (i_1 i_2) (i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k) \\
 &= (i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k) (i_k i_1) \\
 &= (i_3 i_4) \dots (i_k i_1) (i_1 i_2) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Il s'agit là de k factorisations distinctes du cycle $\gamma = (i_1 i_2 i_3 \dots i_k)$, puisque les facteurs utilisés ne sont pas les mêmes. Des esprits chagrins pourraient cependant arguer qu'ils ne sont pas intrinsèquement différents, puisqu'ils se déduisent les uns des autres en conjuguant chaque facteur par le cycle γ lui-même :

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \gamma\gamma\gamma^{-1} = \gamma(i_1 i_2)\gamma^{-1} \gamma(i_2 i_3)\gamma^{-1} \dots \gamma(i_{k-1} i_k)\gamma^{-1} \\
 &= (i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k) (i_k i_1).
 \end{aligned}$$

Les factorisations suivantes devraient les satisfaire :

$$\begin{aligned}
 (i_1 i_2 i_3 \dots i_k) &= (i_1 i_k) (i_1 i_{k-1}) \dots (i_1 i_3) (i_1 i_2) \\
 &= (i_1 i_j) \dots (i_1 i_2) (i_j i_{j+1}) \dots (i_{k-1} i_k) \\
 &= (i_1 i_j) \dots (i_1 i_2) (i_j i_k) \dots (i_j i_{j+1})
 \end{aligned}$$

chacune d'entre elles pouvant naturellement se décliner de manière variée comme la précédente. Le lemme 1.5 n'affirme donc bien que l'*existence* d'une factorisation et non son unicité, et donne de plus une borne sur le nombre de transpositions nécessaires. Réciproquement, on peut se demander s'il est possible de factoriser une permutation σ donnée en moins de $r(\sigma)$ transpositions. Le lemme suivant répond à cette question :

LEMME 1.6 *Soit σ une permutation quelconque, et τ la transposition $(i j)$. Alors les permutations $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$ ont*

- un cycle de plus que σ si i et j appartiennent au même cycle de σ
- un cycle de moins que σ sinon.

Donc $r(\sigma\tau) = r(\tau\sigma) = r(\sigma) \pm 1$. En particulier, un produit de k transpositions de \mathfrak{S}_n possède au moins $n - k$ cycles, i.e. son rang est au plus k , et a même parité que k .

DÉMONSTRATION. Pour toutes suites d'entiers $\bullet \bullet \bullet$ et $\circ \circ \circ$ (éventuellement vides), les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (i \bullet \bullet \bullet j \circ \circ \circ) (i j) = (i \circ \circ \circ) (j \bullet \bullet \bullet) \\
 (i \bullet \bullet \bullet) (j \circ \circ \circ) (i j) = (i \circ \circ \circ j \bullet \bullet \bullet) \\
 (i j) (i \bullet \bullet \bullet j \circ \circ \circ) = (i \bullet \bullet \bullet) (j \circ \circ \circ) \\
 (i j) (i \bullet \bullet \bullet) (j \circ \circ \circ) = (i \bullet \bullet \bullet j \circ \circ \circ)
 \end{array} \right.$$

ce qui montre la première partie du lemme. Un raisonnement par récurrence sur k montre immédiatement la seconde partie : la propriété est évidente pour $k = 0$, et d'après ce qui précède,

tout produit de transpositions $\tau_k \dots \tau_2 \tau_1$ a au plus un cycle de moins que $\tau_{k-1} \dots \tau_2 \tau_1$, qui, par hypothèse de récurrence, a au moins $n - k + 1$ cycles ; $\tau_k \dots \tau_2 \tau_1$ a donc au moins $n - k$ cycles. \square

Ces propriétés justifient la terminologie de *longueur transpositionnelle* qui est souvent utilisée pour désigner le rang d'une permutation. D'autre part, le lien entre le rang d'une permutation σ et la parité des longueurs des produits de transpositions égaux à σ rend bien défini le morphisme appelé *signature* :

DÉFINITION 1.11 Une permutation est dite *paire* ou *impaire* selon la parité de son rang, *i.e.* selon la parité de la longueur d'une quelconque de ses factorisations en produit de transpositions. L'ensemble des permutations paires de \mathfrak{S}_n forme un groupe appelé *groupe alterné d'ordre n* , noté \mathcal{A}_n .

PROPOSITION 1.7 Il existe un unique morphisme non trivial de \mathfrak{S}_n dans $\{\pm 1\}$; il est appelé signature, noté ε et vérifie, pour toute transposition τ , $\varepsilon(\tau) = -1$, ce qui le définit entièrement : pour toute permutation σ ,

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r(\sigma)}.$$

En particulier, $\text{Ker } \varepsilon = \mathcal{A}_n$, et \mathcal{A}_n est donc un sous-groupe d'indice 2 de \mathfrak{S}_n .

Remarquons que l'utilisation de la notation ε (plutôt que ε_n) pour désigner la signature dans \mathfrak{S}_n ne constitue pas un abus de langage ; en effet, toute permutation σ appartenant à \mathfrak{S}_n peut également être considérée comme un élément de \mathfrak{S}_m pour tout entier $m \geq n$, en posant $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \llbracket n+1, m \rrbracket$. Et il est clair qu'alors $\varepsilon_n(\sigma) = \varepsilon_m(\sigma)$, de même que $r_n(\sigma) = r_m(\sigma)$.

On dira qu'une partition λ est *paire* ou *impaire* selon la parité des permutations de type cyclique λ , et on étendra la terminologie *signature*, ainsi que la notation ε , aux partitions.



Lien avec les graphes

DÉFINITION 1.12 Soit \mathcal{T} un ensemble de transpositions de \mathfrak{S}_n ; le *graphe associé* à \mathcal{T} est le graphe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ dont les sommets sont *étiquetés* $\{1, \dots, n\}$ et dont les arêtes sont les éléments de \mathcal{T} .

Soit $\tau_\ell \dots \tau_2 \tau_1$ un produit quelconque de transpositions ; le *graphe associé* à ce produit est le graphe dont les sommets sont *étiquetés* $\{1, \dots, n\}$ et les arêtes – éventuellement multiples – sont *numérotées* $\{1, \dots, \ell\}$, l'arête numérotée i ayant pour extrémités les sommets transposés par τ_i .

PROPOSITION 1.8 Un ensemble de transpositions \mathcal{T} engendre \mathfrak{S}_n si et seulement si le graphe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est connexe.

DÉMONSTRATION. Si \mathcal{T} engendre \mathfrak{S}_n , pour tout couple (i, j) d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe des éléments τ_1, \dots, τ_ℓ de \mathcal{T} tels que

$$(i j) = \tau_\ell \dots \tau_2 \tau_1.$$

Pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les sommets k et $\tau(k)$ de $\Gamma_{\mathcal{T}}$ sont soit confondus, soit adjacents. Les sommets $i, \tau_1(i), \tau_2 \tau_1(i), \dots, \tau_\ell \dots \tau_2 \tau_1(i)$ forment donc un chemin de i à j dans $\Gamma_{\mathcal{T}}$; i et j appartiennent donc à la même composante connexe de $\Gamma_{\mathcal{T}}$, et cela pour tous sommets i et j . $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est donc connexe.

Réciproquement, si $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est connexe, entre tous sommets i et j , il existe un chemin

$$i_0 = i, i_1, i_2, \dots, i_\ell, i_{\ell+1} = j.$$

Par définition de $\Gamma_{\mathcal{T}}$, cela signifie que, pour tout $k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$, la transposition $\tau_k = (i_k i_{k+1})$ appartient à \mathcal{T} . Or, avec cette notation,

$$(i j) = \tau_0 \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{\ell-1} \tau_\ell \tau_{\ell-1} \dots \tau_2 \tau_1 \tau_0.$$

Le sous-groupe de \mathfrak{S}_n engendré par \mathcal{T} contient donc l'ensemble des transpositions de \mathfrak{S}_n ; il s'agit donc de \mathfrak{S}_n lui-même. \square

Les ensembles générateurs minimaux sont donc formés de $n - 1$ transpositions, et le graphe qui leur est associé est un arbre. Un de ces ensembles est particulièrement remarquable : celui des transpositions *élémentaires* $\tau_i = (i i+1)$ pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. \mathfrak{S}_n admet la présentation de groupe suivante :

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid \tau_i^2 = 1; \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \text{ si } |i - j| \geq 2; \tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j \text{ si } |i - j| = 1 \rangle.$$

— o —

Factorisations minimales de grands cycles On peut déduire de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 (DÉNES [41]) *Le produit de $n - 1$ transpositions de \mathfrak{S}_n est un n -cycle si et seulement si le graphe associé est un arbre.*

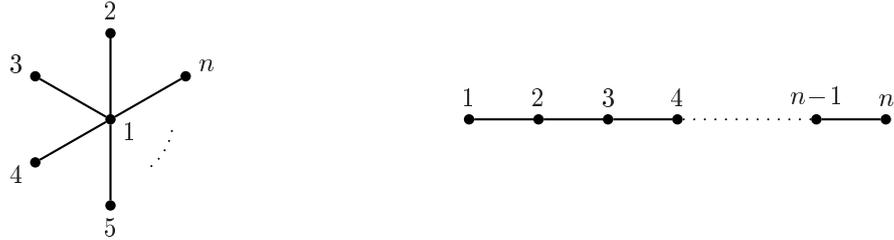
La formule donnant le nombre d'arbres étiquetés sur les sommets est connue depuis Cayley, et peut par exemple être démontrée à l'aide du codage de Prüfer :

THÉORÈME 1.2 (CAYLEY) *Le nombre d'arbres à n sommets étiquetés $1, 2, \dots, n$ est égal à n^{n-2} .*

Un ensemble de $n - 1$ transpositions correspond à $(n - 1)!$ produits distincts, obtenus en numérotant les arêtes du graphe associé de toutes les manières possibles. Or $(n - 1)!$ est également le nombre de permutations circulaires dans \mathfrak{S}_n , et chacune a naturellement le même nombre de factorisations minimales en produit de transpositions. D'où le théorème suivant, corollaire immédiat des deux précédents :

THÉORÈME 1.3 (DÉNES [41]) *Le nombre de décompositions minimales en produit de transpositions d'une permutation circulaire de n éléments est n^{n-2} .*

Noter que cela ne signifie absolument pas qu'à chaque arbre, *i.e.* à chaque ensemble de $n - 1$ transpositions engendrant \mathfrak{S}_n , correspond une des factorisations d'un grand cycle donné. Un arbre ne peut pas, dans le cas général, être numéroté de manière à engendrer l'ensemble des $(n - 1)!$ grands cycles de \mathfrak{S}_n . La bijection décrite ci-dessus n'est qu'une bijection entre l'ensemble de *toutes* les factorisations minimales de *tous* les n -cycles de \mathfrak{S}_n et l'ensemble de *toutes* les numérotations de *tous* les arbres de Cayley à n sommets. La figure 1.4 montre les deux cas extrêmes de l'arbre en étoile et de l'arbre filiforme.



(a) Les $(n - 1)!$ numérotations de l'arbre « étoile » donnent $(n - 1)!$ produits différents.

(b) Les $(n - 1)!$ numérotations de l'arbre « filiforme » n'en donnent que 2^{n-2} .

FIGURE 1.4 – Les deux cas extrêmes.

Intuitivement, on sent que moins l'arbre est ramifié, plus les facteurs sont susceptibles de commuter, et donc plus le nombre de permutations circulaires distinctes obtenues par produit des transpositions est faible. Plus précisément :

THÉORÈME 1.4 (EDEN-SCHÜTZENBERGER [48]) *Si \mathcal{T} est un arbre dont le sommet étiqueté i , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, a pour degré d_i , alors le nombre de permutations circulaires obtenues comme produit de ses $n - 1$ arêtes est :*

$$\prod_{i=1}^n d_i!$$

Nous décrivons cependant au paragraphe suivant une application bijective de l'ensemble des factorisations minimales d'un grand cycle dans l'ensemble des arbres de Cayley. Nous proposons de plus au chapitre 8 une démonstration bijective alternative du théorème 1.3 à l'aide de suites de parking.

— o —

Lien avec les cartes Une démonstration bijective du théorème 1.3 a été donnée par P. Moszkowski [99]. En voici une reformulation. Considérons un arbre A à n sommets, numéroté mais non étiqueté, et dont l'un des sommets r est distingué. A peut être canoniquement étiqueté en donnant à r l'étiquette n , puis à chaque sommet s le numéro de l'arête incidente à s appartenant à l'unique chemin reliant r et s . En oubliant la numérotation des arêtes et l'enracinement de A , on obtient un arbre étiqueté. Cette construction étant manifestement bijective, cela montre que les arbres enracinés numérotés à n sommets sont comptés par la formule n^{n-2} .

Ce sont ces arbres que la construction de P. Moszkowski met en bijection avec les factorisations en transpositions d'un grand cycle donné de \mathfrak{S}_n , par exemple $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$. Pour toute

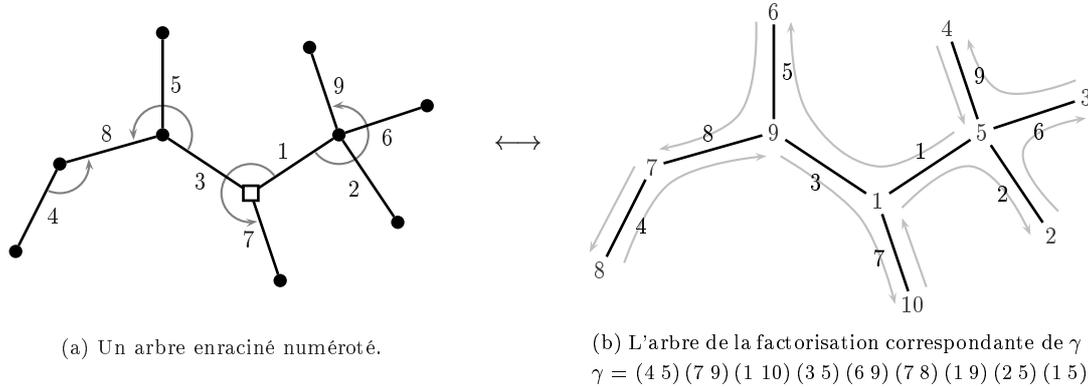


FIGURE 1.5 – Illustration de la bijection de P. Moszkowski.

factorisation $\mathcal{T} = \tau_{n-1} \dots \tau_2 \tau_1$ de γ , l'arbre obtenu à partir de l'arbre $\Gamma_{\mathcal{T}}$ en marquant le sommet étiqueté 1, puis en supprimant les étiquettes, est un arbre enraciné numéroté à n sommets.

Réciproquement, soit A un arbre à n sommets, enraciné et numéroté. La construction inverse consiste à étiqueter les sommets de A pour obtenir l'arbre d'une factorisation de γ . Pour cela, affecter l'étiquette 1 au sommet racine r , poser $e = 2$, puis considérer le plus long chemin s_0, s_1, \dots, s_k dans A d'origine $s_0 = r$ vérifiant :

pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'arête $a_i = (s_{i-1}, s_i)$ est l'arête d'extrémité s_{i-1} possédant le plus petit numéro strictement supérieur aux numéros des arêtes a_1, \dots, a_{i-1} .

Affecter alors à s_k l'étiquette $e = 2$, incrémenter e , puis itérer le procédé précédent à partir du sommet s_k , tant que $e \leq n$. On obtient ainsi un arbre étiqueté et numéroté, et le produit de transpositions correspondant est manifestement une factorisation de γ . La figure 1.5 illustre cette construction.

Cette manière de voir les choses met en lumière le lien étroit entre produits de transpositions et cartes ; considérons en effet l'unique plongement de l'arbre A satisfaisant la propriété suivante :

l'ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet respecte leur numérotation

– c'est-à-dire l'unique plongement de A tel que, pour chaque sommet s , si les indices des arêtes incidentes sont $i_1 < i_2 < \dots < i_d$, alors ces arêtes apparaissent, en tournant en sens direct autour de s , dans l'ordre i_1, i_2, \dots, i_d , avec une unique *descente* par sommet. Alors, comme l'illustre la figure 1.5, le produit des transpositions se lit littéralement en suivant le bord de l'arbre à main gauche² : chaque sommet s est envoyé sur son voisin par l'arête de plus petit indice qui lui est incidente, puis réexpédié le long de la plus petite arête d'indice supérieur, jusqu'à arriver sur un sommet t *via* l'arête d'indice maximal incidente à t : t est alors l'image de s par le cycle produit γ .

— o —

Factorisations minimales d'une permutation quelconque De ce qui précède découle immédiatement une formule énumérative pour le nombre de décompositions d'une permutation σ de type cyclique donné α quelconque en un produit de $r(\sigma)$ transpositions :

²c'est-à-dire en « tenant l'arbre de la main gauche »

PROPOSITION 1.9 *Le nombre de décompositions minimales en transpositions d'un élément quelconque de la classe de conjugaison \mathcal{C}_α de \mathfrak{S}_n est :*

$$\binom{r(\alpha)}{\alpha_1-1, \dots, \alpha_\ell-1} \alpha_1^{\alpha_1-2} \dots \alpha_k^{\alpha_k-2}.$$

— o —

1.4 Les différents types de factorisations

D'une façon plus générale, une *factorisation ordonnée* de longueur m d'une permutation σ appartenant à \mathfrak{S}_n est un m -uplet $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ d'éléments de \mathfrak{S}_n tel que

$$\sigma = \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_2 \sigma_1.$$

Les propriétés des factorisations ordonnées d'une permutation donnée sont très étudiées – et en particulier leurs propriétés énumératives. Les motivations très variées font que diverses conditions peuvent être imposées aux facteurs. Nous décrivons ici les contraintes les plus courantes.

— o —

Le type cyclique des facteurs Une manière de généraliser ce qui a été vu à la section précédente concernant les factorisations en transpositions consiste à imposer à chaque facteur de faire partie d'une classe de conjugaison donnée de \mathfrak{S}_n . Le problème est alors le suivant : étant donné une permutation σ appartenant à la classe de conjugaison \mathcal{C}_α de \mathfrak{S}_n , combien existe-t-il de factorisations $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ de σ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \sigma_i \in \mathcal{C}_{\alpha_i} \quad ?$$

On se place alors dans le cadre d'un problème de théorie des groupes auquel une réponse très générale est fournie par la théorie des représentations. La formule obtenue est cependant peu utilisable en pratique, et nous en proposons au chapitre 2 une dérivation nettement plus parlante dans le cas des factorisations de permutations cycliques.

Remarquons que, d'après le lemme 1.6, pour toutes permutations σ et τ ,

$$r(\sigma\tau) \leq r(\sigma) + r(\tau).$$

Ceci entraîne en particulier que les types cycliques imposés aux facteurs doivent vérifier l'inégalité suivante pour qu'il puisse exister des factorisations de σ :

$$\sum_{i=1}^m r(\alpha_i) \geq r(\alpha). \tag{1.1}$$

Il ne s'agit bien entendu pas d'une condition suffisante : en particulier, la signature de σ ajoute une condition sur la parité de $\sum_{i=1}^m r(\alpha_i)$. L'une des qualités de la formule énoncée au chapitre 2 est que les cas de nullité sont immédiatement repérables.

— o —

La minimalité On peut également s'intéresser au cas extrême

$$\sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = r(\sigma), \quad (1.2)$$

en imposant éventuellement également le type cyclique des facteurs : c'est ce que nous avons considéré à la section précédente, d'abord pour les grands cycles, puis pour les permutations de type cyclique quelconque, en imposant aux facteurs d'être des transpositions.

— o —

La transitivité Cette condition impose que le groupe $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle$ engendré par les facteurs agisse transitivement sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cette condition est motivée par l'interprétation qui peut être faite des factorisations de permutations en termes de revêtements ramifiés de surfaces de Riemann, et découle de la connexité de celles-ci. Pour une présentation plus précise des liens entre produits de permutations et revêtements de surfaces, on pourra se reporter par exemple à [3, 49, 73, 80, 115, 131, 132].

Dans le cas où les facteurs sont des transpositions, la transitivité du groupe engendré se traduit par l'existence d'un chemin entre tout couple de sommets du graphe associé, *i.e.* par la connexité du graphe; la transitivité est donc une condition équivalente, d'après la proposition 1.8, à la condition

$$\langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \rangle = \mathfrak{S}_n.$$

Les factorisations de grands cycles en transpositions vérifient donc cette condition, tandis que les factorisations minimales en transpositions d'une quelconque autre permutation ne la vérifient pas.

— o —

La transitivité impose donc en général une condition sur les rangs des facteurs plus restrictive que la condition 1.1. Considérons le cas des factorisations en transpositions. Soit $\mathcal{T} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ une factorisation transitive d'une permutation σ appartenant à \mathfrak{S}_n . Alors $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est connexe et $m \geq n - 1$. Considérons l'arbre couvrant $A_{\mathcal{T}}$ de $\Gamma_{\mathcal{T}}$ formé des arêtes τ_i dont l'ajout diminue le nombre de composantes connexes du graphe associé à $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{i-1})$. Par construction, les $n - 1$ arêtes τ_i de $A_{\mathcal{T}}$ sont telles que

$$r(\tau_i \dots \tau_2 \tau_1) = r(\tau_{i-1} \dots \tau_2 \tau_1) + 1.$$

Or $r(\tau_m \dots \tau_2 \tau_1) = r(\sigma) = n - \ell(\sigma)$; la factorisation \mathcal{T} contient donc au minimum $n - 1 - r(\sigma)$ (*i.e.* $\ell(\sigma) - 1$) transpositions τ_j telles que

$$r(\tau_j \dots \tau_2 \tau_1) = r(\tau_{j-1} \dots \tau_2 \tau_1) - 1.$$

Ces transpositions ne peuvent appartenir à $A_{\mathcal{T}}$, d'où la contrainte suivante :

$$m \geq 2n - r(\sigma) - 2 = n + \ell(\sigma) - 2. \quad (1.3)$$

Cette borne inférieure peut être atteinte, comme on le verra au paragraphe suivant. Remarquons que cette inégalité peut être réécrite de la manière suivante :

$$r(\sigma) + \sum_{i=1}^m r(\tau_i) \geq 2n - 2,$$

qui présente l'avantage de pouvoir être étendue immédiatement aux factorisations transitives à facteurs quelconques ; en effet, si $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle$ agit transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est *a fortiori* le cas également du groupe engendré par tout m -uplet $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_m)$ de factorisations minimales de $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ en transpositions. Comme on l'a vu précédemment, un tel m -uplet contient moins de $r(\sigma_1) + \dots + r(\sigma_m)$ transpositions, en tenant compte des éventuelles redites. D'où, en utilisant 1.3, l'inégalité suivante, vérifiée par toute factorisation transitive $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ d'une permutation σ de \mathfrak{S}_n :

$$r(\sigma) + \sum_{i=1}^m r(\sigma_i) \geq 2n - 2, \quad (1.4)$$

la différence entre les deux termes étant de plus nécessairement paire.

— o —

La minimalité transitive – autrement dit, la condition que la somme des rangs des facteurs soit minimale compte tenu de la contrainte de transitivité. Montrons tout d'abord que, pour toute permutation σ , il existe une factorisation transitive en $n + \ell(\sigma) - 2$ transpositions. Soit donc i_1, i_2, \dots, i_ℓ un système de représentants des supports des cycles de σ . Alors la permutation conjuguée $\sigma' = (i_\ell \dots i_2 i_1) \sigma (i_1 i_2 \dots i_\ell)$ est de même type cyclique que σ , et possède donc une factorisation minimale en $r(\sigma)$ transpositions. Les cycles $(i_\ell \dots i_2 i_1)$ et $(i_1 i_2 \dots i_\ell)$ peuvent, eux, être factorisés en $\ell(\sigma) - 1$ transpositions chacun. Il en découle une factorisation de $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_\ell) \sigma' (i_\ell \dots i_2 i_1)$ en $r(\sigma) + 2\ell(\sigma) - 2$ transpositions, soit $n + \ell(\sigma) - 2$. Cette factorisation est naturellement transitive puisque le graphe associé à l'une ou l'autre des factorisations sous-jacentes de $(i_1 i_2 \dots i_\ell) \sigma'$ ou $\sigma' (i_\ell \dots i_2 i_1)$ est un arbre.

Il existe donc des factorisations transitives $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ de toute permutation σ de \mathfrak{S}_n vérifiant la condition extrême

$$r(\sigma) + \sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = 2n - 2. \quad (1.5)$$

— o —

1.5 Factorisations transitives en transpositions

Lien avec les cartes Le lien évoqué page 15 entre factorisations minimales d'un grand cycle et arbres plans considérés comme des cartes peut être étendu à toute factorisation transitive $\mathcal{T} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ quelconque : considérons l'unique carte $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ dont $\Gamma_{\mathcal{T}}$ est le graphe sous-jacent vérifiant la condition d'ordre cyclique autour de chaque sommet. Il ne s'agit naturellement pas nécessairement d'une carte plane, mais éventuellement d'une carte de genre supérieur. Cela ne change rien au fait que le produit des transpositions peut alors se lire le long des faces de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ de la même manière que le long de l'unique face de l'arbre plan représenté figure 1.5. En particulier, chaque cycle du produit est lu le long d'une face ; réciproquement, les indices des transpositions ne peuvent croître sans cesse le long d'une face donnée, et présentent donc au moins une descente. Chaque face correspond donc exactement à un cycle de la permutation produit. La carte possède donc n sommets, m arêtes et $\ell(\sigma)$ faces, et la formule d'Euler détermine le genre g de $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$:

$$n - m + \ell(\sigma) = 2 - 2g.$$

On retrouve ainsi la formule 1.4. En particulier, les factorisations minimales sont exactement celles dont la carte est planaire.



Factorisations transitives minimales d’une permutation quelconque En vue d’étendre le théorème 1.3 pour énumérer des familles de factorisations transitives les plus générales possible, une première direction naturelle consiste à considérer les factorisations minimales en transpositions d’une permutation quelconque, autrement dit les factorisations en transpositions dont la carte est planaire. Ce problème a été résolu par A. Hurwitz [73], qui obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5 (A. HURWITZ) *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ une partition de $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le nombre de factorisations transitives minimales en transpositions d’une permutation de type cyclique λ est :*

$$n^{\ell-3} (n + \ell - 2)! \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{(\lambda_i - 1)!}.$$

La preuve qu’il propose, très calculatoire (voir également [58, 119]), ne rend pas compte de la simplicité de cette formule, où apparaissent de façon « magique » des facteurs dont il est tentant de chercher une interprétation combinatoire. Une nouvelle preuve découle du théorème d’énumération des constellations planaires de M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer dont il sera question plus loin, mais en utilisant un argument d’inclusion – exclusion qui, à nouveau, masque la signification des différents facteurs.



Factorisations (transitives) de genre quelconque d’un grand cycle Une seconde direction, orthogonale, consiste à étudier les factorisations d’un grand cycle (nécessairement transitives comme on l’a mentionné précédemment) faisant intervenir un nombre arbitrairement grand (mais fixé) de facteurs. Ce problème a notamment été considéré par I. P. Goulden [56], qui obtient l’expression suivante :

THÉORÈME 1.6 (I. P. GOULDEN) *Le nombre de factorisations d’un n -cycle donné de \mathfrak{S}_n en m transpositions est donné par :*

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left[\binom{n}{2} - nk \right]^m.$$

Comme le théorème précédent, celui-ci est obtenu par des manipulations analytiques d’opérateurs qui laissent peu de place à l’intuition topologique. Malheureusement, le calcul n’aboutit pas ici à une formule aussi parlante : les cas particuliers tels $m = n - 1$ y sont difficiles à lire, les cas d’annulation ($m < n - 1$ ou $m \equiv n \pmod{2}$) ne s’en déduisent pas de manière immédiate, et enfin cette expression ne traduit pas ce que l’intuition suggère, à savoir que le genre doit d’une certaine façon contrôler la complexité du problème énumératif. La formule suivante, équivalente à la précédente, est de ce point de vue plus satisfaisante :

COROLLAIRE 1.10 *Le nombre de factorisations d'un n -cycle donné de \mathfrak{S}_n en $n - 1 + 2g$ transpositions est donné par :*

$$\frac{n^{n-1+2g}}{n! 2^{2g}} \sum_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \models g} \binom{n-1+2g}{2c_1+1, \dots, 2c_{n-1}+1},$$

où la notation $c \models g$ désigne une composition³ c à termes positifs ou nuls de l'entier g .

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que l'expression donnée par le théorème 1.6 peut se réécrire

$$\frac{n^m}{n! 2^m} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{n-1}{k} k^i (n-1-k)^{m-i} (-1)^{i+k}.$$

Elle compte donc, à un coefficient près, des coloriages de m cases en $n - 1$ couleurs, affectés d'un signe; les ensembles de cases et de couleurs peuvent tous deux être partitionnés en deux sous-ensembles qui se correspondent : les i cases *claires* sont coloriées à l'aide des k couleurs *claires*, les $m - i$ cases *foncées* à l'aide des $n - 1 - k$ couleurs *foncées*. Un coloriage x est *positif* si i et k ont même parité et *négatif* sinon.

Considérons l'involution ϑ suivante : pour tout coloriage, on choisit la couleur de plus petit indice apparaissant un nombre pair de fois (s'il en existe), et on la change de sous-ensemble ainsi que les cases qu'elle colore. Les points fixes de ϑ sont les coloriages *impairs*, c'est-à-dire ceux dans lesquels toutes les couleurs sont utilisées un nombre impair de fois. Pour les autres coloriages, ϑ change la parité de k et pas celle de i , donc x et $\vartheta(x)$ sont de signe opposé. La somme des signes des différents coloriages est égale à la somme des signes des points fixes de ϑ . Or dans le cas des coloriages impairs, i est somme de k entiers impairs, et a donc même parité que k .

On est donc ramené au dénombrement des coloriages de m cases avec $n - 1$ couleurs apparaissant chacune un nombre impair de fois, et pouvant chacune être claire ou foncée, ce qui donne l'expression annoncée. \square

Nous démontrons au chapitre 2 un théorème généralisant celui-ci.



1.6 Factorisations transitives générales et constellations

Nous allons décrire ici une famille de cartes permettant de donner une interprétation topologique aux factorisations transitives quelconques de permutations.

DÉFINITION 1.13 Soit $m \geq 2$ et $g \geq 0$. Une m -constellation (enracinée) de genre g est une carte (enracinée) de genre g dont les faces sont bicolorées en noir et blanc de telle sorte que :

- deux faces quelconques de même couleur ne sont pas adjacentes ;
- les faces noires – appelées *polygones* – sont de degré m ;
- les faces blanches sont de degré multiple de m ;
- si la carte est enracinée, la face racine est blanche.

³Une *composition* à k termes d'un entier n est un k -uplet d'entiers dont la somme vaut n .

Il est toujours possible d'étiqueter les sommets d'une constellation avec les entiers $\llbracket 1, m \rrbracket$ de sorte que les sommets de chaque polygone soient étiquetés $1, \dots, m$ en sens direct. Si la m -constellation est enracinée, l'étiquetage est unique si on impose l'étiquette m au sommet racine. Cet étiquetage est appelé *étiquetage canonique* de la constellation. On appellera *polygone racine* le polygone contenant l'arête racine.

Alors :

PROPOSITION 1.11 *Soit $n \geq 1$ et $m \geq 2$; il existe une bijection entre l'ensemble des m -uplets $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ d'éléments de \mathfrak{S}_n tel que $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ agit transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et l'ensemble des m -constellations enracinées à n polygones numérotés de 1 à n , le polygone racine étant numéroté 1.*

De plus, le genre g de la constellation vérifie :

$$r(\sigma_m \dots \sigma_1) + \sum_{i=1}^m r(\sigma_i) = 2n + 2g - 2,$$

et, pour tout ℓ , le nombre de faces blanches de degré $m\ell$ est égal au nombre de cycles de longueur ℓ de $\sigma_m \dots \sigma_1$.

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{C} une m -constellation enracinée, formée de n polygones numérotés de 1 à n . Considérons l'étiquetage canonique des sommets de \mathcal{C} par les entiers de 1 à m ; pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on définit la permutation σ_i de \mathfrak{S}_n comme la permutation dont chaque cycle est donné par la succession des polygones autour d'un des sommets étiquetés i , en tournant en sens *direct*. Cette définition est valide du fait que chaque polygone est incident à exactement un sommet de chaque étiquette.

\mathcal{C} étant connexe, $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ agit alors transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. De plus, chaque face blanche F de degré $m\ell$ est incidente à ℓ sommets de chaque étiquette. Soit P_1, \dots, P_ℓ les ℓ polygones adjacents à F via une arête étiquetée $(m, 1)$, ordonnés en tournant en sens *indirect* autour de F . Alors la permutation $\sigma_m \dots \sigma_1$ envoie P_j sur P_{j+1} : chaque cycle de longueur ℓ de $\sigma_m \dots \sigma_1$ correspond ainsi à une face blanche de \mathcal{C} de degré $m\ell$.

Réciproquement, étant donné un m -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ de permutations de \mathfrak{S}_n transitif, on peut construire une constellation à partir de n polygones numérotés et dont les sommets sont étiquetés, en sens direct, de 1 à m , en recollant les sommets de même étiquette selon les cycles des permutations σ_i . La transitivité du m -uplet assure la connexité de l'objet construit, et la surface de plongement de cette constellation a alors pour caractéristique d'Euler :

$$2 - 2g = \sum_{i=1}^m \ell(\sigma_i) - mn + n + \ell(\sigma_m \dots \sigma_1),$$

ce qui donne la relation annoncée. □

Remarquons de plus que la distribution des types cycliques des facteurs correspond à celle des degrés des sommets de la constellation.

EXEMPLE 1.5 Soit \mathcal{C} la 3-constellation enracinée représentée à la figure 1.6, dont les polygones sont numérotés. L'étiquetage canonique des sommets de \mathcal{C} permet de définir les trois permutations

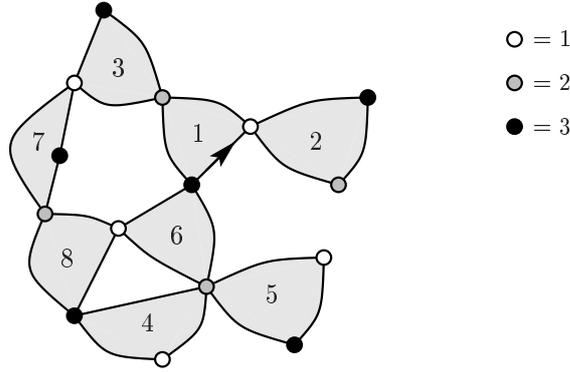


FIGURE 1.6 – Exemple de 3-constellation planaire enracinée à 8 polygones numérotés.

suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = (1\ 2)\ (3\ 7)\ (4)\ (5)\ (6\ 8) \\ \sigma_2 = (1\ 3)\ (2)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8) \\ \sigma_3 = (1\ 6)\ (2)\ (3)\ (4\ 8)\ (5)\ (7). \end{cases}$$

Les cycles du produit $\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ (6\ 7)\ (8)$ correspondent aux faces de \mathcal{C} ; ils ont pour longueur respective 5, 2 et 1, et les faces correspondantes de \mathcal{C} ont degré 15, 6 et 3.

Le résultat de M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer [21] exposé au cours du chapitre 5 (section 5.3.3) fournit une formule énumérative pour l'ensemble des constellations enracinées *planaires* ayant une distribution de degrés fixée sur les faces blanches. En termes de factorisations, chaque constellation enracinée à n polygones pouvant être numérotée de $(n-1)!$ façons différentes, cela se traduit par une formule énumérative pour l'ensemble des factorisations transitives minimales de permutations appartenant à une classe de conjugaison \mathcal{C}_λ donnée, sans condition de type cyclique sur les facteurs. On peut naturellement en déduire une expression pour le nombre de factorisations transitives minimales d'une permutation σ donnée, en divisant la formule précédente par le cardinal de la classe de conjugaison de σ .

DÉFINITION 1.14 On appelle *cactus* (de genre g) une constellation (de genre g) à une seule face blanche.

De [21] découle en particulier le nombre de m -cactus planaires à n polygones :

$$\frac{1}{(m-1)n+1} \binom{mn}{n},$$

également obtenu par M. Bousquet [19, 20] en établissant une bijection simple avec les arbres m -aires. D'autre part, I. P. Goulden et D. M. Jackson [58] en ont donné un raffinement selon le type cyclique des facteurs, c'est-à-dire, en termes de cactus, selon la distribution des degrés des sommets de chaque étiquette. Ils obtiennent la belle formule close suivante :

THÉORÈME 1.7 *Le nombre de factorisations transitives d'un n -cycle de \mathfrak{S}_n fixé en produit de m*

permutations de type cyclique respectif α_i vérifiant la condition de minimalité

$$r(\alpha_1) + \cdots + r(\alpha_m) = n - 1$$

est donné par la formule :

$$n^{m-1} \prod_{i=1}^m \frac{(\ell(\alpha_i) - 1)!}{a_{i1}! \cdots a_{in}!}$$

où a_{ij} désigne le nombre de parts de taille j dans α_i .

Le nombre de grands cycles de \mathfrak{S}_n étant égal à $(n - 1)!$, comme le nombre de numérotations distinctes d'une constellation à n polygones, cette formule donne également le nombre de m -cactus enracinés planaires selon la distribution des degrés de leurs sommets de même étiquette canonique. Nous présentons au chapitre 2 une généralisation de ce résultat en genre quelconque.

— o —

Première partie

Le point de vue algébrique

Chapitre 2

Factorisations d'un grand cycle

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'énumération des factorisations (transitives) d'un n -cycle de \mathfrak{S}_n en un produit de m facteurs, en fonction du type cyclique de ceux-ci. Comme on le verra plus loin, la théorie des caractères permet de répondre à cette question, mais d'une façon qui n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, l'intuition topologique suggère que la complexité de la situation doit croître avec le genre, et on est donc en droit d'espérer un résultat énumératif qui mette en lumière l'importance de ce paramètre, si tel est réellement le cas. Or, dans le cas général, l'expression classique sous forme de sommation de produits d'évaluations des caractères irréductibles du groupe symétrique est sujette à de nombreuses simplifications, ce qui cache l'influence du genre, et ôte tout espoir de pouvoir en tirer des estimations asymptotiques. De plus, l'évaluation de ces caractères repose sur l'utilisation d'une règle appelée *règle de Murnaghan-Nakayama* qui est plus un algorithme d'évaluation qu'une formule à proprement parler, d'où ne peut être tirée aucune formule particulière à une sous-famille infinie.

Il a été observé dans [58, 76] que la formule exprimant les constantes de structure en termes de caractères se traduit par une expression remarquablement simple de leur série génératrice en termes de fonctions de Schur. Cependant, extraire des coefficients de ces séries génératrices fait également intervenir des sommes de termes à signes alternants, et cela revient plus ou moins au même que le calcul direct via les caractères. Le cas des factorisations des grands cycles est moins compliqué, mais même dans ce cas l'extraction de coefficients reste peu exploitable.

Pourtant, outre les transpositions de Hurwitz, quelques autres familles de constantes de structure possèdent une formule explicite simple, parmi lesquelles la plus étonnante est sans doute la suivante :

$$c_{(n),(n-1,1)}^\alpha = \begin{cases} 2(n-2)! & \text{si } \alpha \text{ est impaire} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De nombreux résultats de ce type ont été obtenus au début des années 80 par G. Boccara [17], Bertram et Wei [14], R. P. Stanley [116] ou encore D. W. Walkup [127], puis plus tard par D. M. Jackson [75], I. P. Goulden [56], A. Goupil [63] ou G. Jones [79]. Ils concernent presque tous des familles très restrictives de décompositions d'un n -cycle, et ne reposent sur aucune intuition topologique.

Notre propos dans ce chapitre est d'utiliser la formule classique basée sur les évaluations de caractères pour obtenir une expression généralisant les résultats connus sur les factorisations de

grands cycles. Ce travail a été effectué en collaboration avec G. Schaeffer [105].

— ○ —

2.1 Énoncé du théorème principal

Définitions et notations Soit n et m deux entiers strictement positifs ; nous considérons dans ce chapitre $m + 1$ partitions de n notées respectivement $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et β . Par commodité, on s'autorise à utiliser les notations ℓ_i et r_i en lieu et place de $\ell(\alpha_i)$ et $r(\alpha_i)$.

On note $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\beta$ le nombre d'éléments de $\mathcal{C}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{\alpha_m}$ – c'est-à-dire le nombre de m -uplets de permutations appartenant à \mathfrak{S}_n de type cyclique respectif $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – dont le produit est un élément donné de la classe de conjugaison \mathcal{C}_β , c'est-à-dire une permutation de type cyclique β . Autrement dit, pour toute permutation τ de type cyclique β ,

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\beta = |\{(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{C}_{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{\alpha_m} \mid \sigma_1 \cdots \sigma_m = \tau\}|.$$

— ○ —

2.1.1 Résultats antérieurs

Notre résultat généralise essentiellement trois résultats précédemment connus, traitant respectivement les restrictions suivantes : d'abord le cas minimal $g = 0$; puis le cas des transpositions : pour tout i , $\alpha_i = 1^{n-2}$; enfin, le cas où le nombre de facteurs est restreint : $m = 2$. Rappelons tout d'abord ces résultats.

— ○ —

Factorisation minimale La formule obtenue par I. P. Goulden et D. M. Jackson dans le cas minimal, citée au chapitre précédent, a constitué un progrès très important dans l'étude de ces factorisations [9, 58] : pour toutes partitions $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de n telles que $r_1 + \dots + r_m = n - 1$,

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = n^{m-1} \prod_{i=1}^m \frac{1}{\ell_i} \binom{\ell_i}{a_{i,1}, \dots, a_{i,n}} = n^{m-1} \prod_{i=1}^m \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)}$$

où, pour toute partition $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell) = 1^{b_1} \dots n^{b_n}$, $\text{Aut}(\beta) = b_1! \cdots b_n!$ désigne le nombre de permutations σ appartenant à \mathfrak{S}_ℓ telles que $\beta_{\sigma(i)} = \beta_i$ pour tout i dans $[[1, \ell]]$. Remarquons que cette formule généralise la formule de Cayley $c_{(1^{n-2})_{n-1}}^{(n)} = n^{n-2}$.

— ○ —

Factorisation en transpositions Comme on l'a vu au chapitre précédent (théorème 1.6), I. P. Goulden [56] a obtenu dans ce cas une expression sous forme de sommation alternée, qui peut être réécrite au moyen d'une manipulation combinatoire sous la forme suivante :

$$c_{\mathcal{T}^{n-1+2g}}^{(n)} = \frac{n^{n-1+2g}}{n! 2^{2g}} \sum_{(c_1, \dots, c_{n-1}) \models g} \binom{n-1+2g}{2c_1+1, \dots, 2c_{n-1}+1},$$

où \mathcal{T} désigne la classe des transpositions.

— ○ —

Factorisations en deux facteurs Une analyse détaillée des cas de petit genre a ensuite amené A. Goupil à introduire les polynômes symétriques suivants, définis pour tous g et ℓ entiers positifs :

$$S_g(x_1, \dots, x_\ell) = \sum_{p_1 + \dots + p_\ell = g} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{x_j} \binom{x_j}{2p_j + 1}.$$

Ils possèdent la fonction génératrice suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{g \geq 0} S_g(x_1, \dots, x_\ell) t^{2g} &= \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{x_j t} \sum_{p \geq 0} \binom{x_j}{2p + 1} t^{2p+1} \\ &= \prod_{j=1}^{\ell} \frac{(1+t)^{x_j} - (1-t)^{x_j}}{2x_j t}. \end{aligned}$$

À l'aide des ces polynômes symétriques, A. Goupil et G. Schaeffer [65] ont étendu le résultat de I. P. Goulden et D. M. Jackson en genre quelconque dans le cas particulier $m = 2$: pour toutes partitions α_1 et α_2 de n ,

$$c_{\alpha_1, \alpha_2}^{(n)} = \frac{n}{2^{2g}} \prod_{i=1}^2 \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)} \sum_{g_1 + g_2 = g} \prod_{i=1}^2 \ell_i^{(2g_i)} S_{g_i}(\alpha_i), \quad (2.1)$$

où $g = \frac{1}{2}(n - 1 - r_1 - r_2)$, et $x^{(k)}$ désigne la k -ième *factorielle montante* de x :

$$x^{(k)} = x(x+1) \dots (x+k-1).$$

— o —

2.1.2 Énoncé du théorème

Au vu des formules de I. P. Goulden et D. M. Jackson d'une part, et de A. Goupil et G. Schaeffer d'autre part, il semble naturel de conjecturer une extension immédiate de 2.1 à $m \geq 2$. Malheureusement, celle-ci se révèle fautive, à cause de l'existence d'un facteur P trivial pour $m = 2$. Pour définir ce facteur, fixons quelques notations.

Les *fonctions symétriques élémentaires* sont définies par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}$$

et

$$\forall \mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell), \quad e_\mu = e_{\mu_1} \dots e_{\mu_\ell}.$$

Les *factorielles descendantes* sont définies, pour tout entier k , par

$$(x)_k = x(x-1) \dots (x-k+1)$$

et l'application

$$\mathcal{D} : x^k \mapsto (x)_k$$

peut être étendue multiplicativement aux monômes en variables distinctes, puis linéairement aux fonctions symétriques.

Enfin, pour toute partition $\mu = 1^{m_1} \dots n^{m_n}$, on notera $2\mu + 1$ la partition $\widehat{\mu} = 3^{m_1} 5^{m_2} \dots (2n + 1)^{m_n}$ – c'est-à-dire la partition dont les parts sont telles que, pour tout i , $\widehat{\mu}_i = 2\mu_i + 1$.

Avec ces notations, nous pouvons définir les fonctions symétriques P_g en posant $P_0 = 1$, et, pour tout g strictement positif,

$$P_g = \sum_{\mu \vdash g} \frac{\mathcal{D}(e_{2\mu+1})}{\text{Aut}(\mu)}.$$

Le théorème que nous allons montrer s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME 2.1 *Soit n un entier strictement positif, et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des partitions quelconques de n , avec, pour tout i , $\alpha_i = 1^{a_{i,1}} \dots n^{a_{i,n}}$, $\ell(\alpha_i) = \ell_i$ et $r(\alpha_i) = r_i$. Soit g l'entier défini par $r_1 + \dots + r_m = n - 1 + 2g$. Alors :*

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{n^{m-1}}{2^{2g}} \cdot \prod_{i=1}^m \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)} \cdot \sum_{g_0 + \dots + g_m = g} \left(P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m \ell_i^{(2g_i)} S_{g_i}(\alpha_i) \right) \quad (2.2)$$

où $\mathbf{r} - 2\mathbf{g} = (r_1 - 2g_1, \dots, r_m - 2g_m)$.

— o —

2.1.3 Discussion à propos du théorème 2.1

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, étudions certaines des propriétés de la formule 2.2 obtenue :

Tout d'abord, il s'agit d'une somme de termes *positifs*, ce qui n'est pas le cas de la formule mettant directement en jeu les caractères du groupe symétrique. Une part substantielle de notre travail a consisté à construire une involution qui, comme pour la démonstration du corollaire 1.10, permet d'éliminer de la sommation les contributions négatives. Cela permet, entre autres, d'obtenir des résultats asymptotiques à genre fixé inaccessibles à partir de la formule initiale (voir la section 2.5).

Le polynôme symétrique $P_g(x_1, \dots, x_m)$ a pour degré $3g$; le nombre de termes intervenant dans sa sommation est donc un polynôme en m de degré $3g$. Les premières valeurs de P_g et S_g sont données à la section 2.6.

Le polynôme symétrique $S_g(x_1, \dots, x_\ell)$ a pour degré $2g$ et le nombre de termes intervenant dans sa sommation est $\binom{\ell+2g-1}{2g}$, *i.e.* un polynôme en ℓ de degré $2g$. Puisque

$$S_g(x_1, \dots, x_\ell) = S_g(x_1, \dots, x_\ell, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

l'évaluation de $S_g(\alpha_i)$ ne dépend que de la partition $\overline{\alpha_i} = 2^{a_{i,2}} \dots k^{a_{i,k}}$. (En fait, elle ne dépend pas non plus des parts de taille 2).

La correction due au genre apportée à la formule de Goulden et Jackson

$$\sum_{g_0 + \dots + g_m = g} P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m \ell_i^{(2g_i)} S_{g_i}(\alpha_i)$$

est, pour g, m, n et les ℓ_i fixés, un polynôme en les parts $\alpha_{i,j}$. En d'autres termes, la dépendance en les multiplicités $a_{i,j}$ (*i.e.* en le fait que des parts peuvent être égales) est entièrement capturée par le facteur $\text{Aut}(\alpha_i)$.

De plus, en termes de partitions *réduites* $\overline{\alpha}_i = 2^{a_{i,2}} \dots k^{a_{i,k}}$ (*i.e.* en oubliant les parts de taille 1), la correction s'écrit, en tenant compte des égalités $\ell_i = \left(\sum_{j \neq i} r_j\right) + 1 - 2g$, et $r(\alpha_i) = r(\overline{\alpha}_i)$,

$$\sum_{g_0 + \dots + g_m = g} P_g(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j \neq i} r(\overline{\alpha}_j) + 1 - 2g \right)^{(2g_i)} S_{g_i}(\overline{\alpha}_i),$$

et il s'agit, pour g, m et les $\ell(\overline{\alpha}_i)$ fixés mais indépendamment de n , d'un polynôme de degré total $4g$ en les parts des partitions réduites.

En résumé, le théorème 2.1 montre l'influence déterminante du genre g sur la complexité du calcul des coefficients $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\beta$: le nombre de termes intervenant dans la sommation est polynomial à g fixé, mais croît exponentiellement avec g . Des phénomènes similaires ont été observés par I. P. Goulden *et al.* [59, 61], en considérant les factorisations transitives *en transpositions* de permutations de type cyclique β quelconque.

— o —

2.1.4 Schéma de la preuve

Comme nous l'avons exposé au chapitre précédent, les factorisations de grands cycles correspondent aux constellations à une face, les cactus. Une démonstration du théorème 2.1 reposant sur des manipulations de cactus pourrait déboucher sur une preuve constructive. Ce n'est malheureusement pas le cas, et notre théorème ne permet pas de construire effectivement les factorisations comptées par $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)}$.

La preuve repose sur la même approche que celle appliquée dans le cas – nettement plus simple – $m = 2$ par A. Goupil et G. Schaeffer dans [65]. Dans la section 2.2, nous interprétons la formule issue de la théorie des représentations comme une somme pondérée portant sur certains objets combinatoires. Puis, dans la section 2.3, nous développons une autre interprétation en termes de *graphes étoilés* : ce sont les éléments-clés qui nous permettent de procéder de façon analogue au cas $m = 2$, bien que les objets manipulés soient plus complexes. Nous appliquons un principe d'involution pour éliminer les contributions négatives et obtenir une somme pondérée faisant intervenir les nombres cyclomatiques des graphes (théorème 2.2). Enfin, la section 2.4 est consacrée au calcul explicite de cette somme.

— o —

2.2 Un peu de théorie des caractères

La théorie des caractères fournit une expression pour $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)}$. Pour toute partition β de n , le cardinal z_β du centralisateur d'une permutation quelconque appartenant à \mathcal{C}_β est égal à $1^{b_1} b_1! 2^{b_2} b_2! \dots n^{b_n} b_n!$. Par commodité, on s'autorisera à utiliser la notation z_i pour z_{α_i} . Pour toute partition γ de n , soit χ^γ le caractère irréductible de \mathfrak{S}_n correspondant, χ_β^γ y son évaluation

sur la classe de conjugaison \mathcal{C}_β , et f^γ son degré. Alors la formule de Frobenius (voir par exemple [114, p68]) affirme :

PROPOSITION 2.1 Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et β des partitions d'un entier n strictement positif. Alors :

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\beta = \frac{n!^{m-1}}{z_1 \dots z_m} \sum_{\gamma \vdash n} \frac{\chi_{\alpha_1}^\gamma \dots \chi_{\alpha_m}^\gamma}{(f^\gamma)^{m-1}} \chi_\beta^\gamma.$$

Cette formule motive la recherche d'une expression satisfaisante des évaluations des caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n . Dans ce qui suit, nous rappelons d'abord une règle classique permettant leur calcul à l'aide de diagrammes de Ferrers, puis nous nous intéressons aux simplifications dues au cas particulier $\beta = (n)$.

— o —

2.2.1 Règle de Murnaghan-Nakayama

Soit α et β deux partitions d'un entier strictement positif n . Un *tableau de rubans* de type (α, β) est un diagramme de Ferrers de forme α rempli d'entiers strictement positifs de telle sorte que, pour tout indice $i \in [1, \ell(\beta)]$,

- les cellules contenant un entier compris entre i et $\ell(\beta)$ forment un diagramme de Ferrers de taille $\beta_i + \dots + \beta_{\ell(\beta)}$,
- les β_i cellules contenant un i forment un *ruban*, c'est-à-dire un ensemble connexe sans motif

du type $\begin{array}{|c|c|} \hline i & i \\ \hline i & i \\ \hline \end{array}$.

En d'autres termes, un tableau de rubans de type (α, β) peut être considéré comme un diagramme de forme α rempli avec les lignes de β en respectant la condition que chaque ligne de β forme un ruban de α .

La *hauteur* d'un ruban est le nombre de ses lignes moins 1. Le poids $W(T)$ d'un tableau de rubans T est la somme des hauteurs de ses rubans, autrement dit le nombre de motifs de la forme

$$\begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

qui s'y trouvent.

EXEMPLE 2.1 La figure 2.1 représente deux tableaux de rubans :

- le premier est de type $((5, 4, 3, 1), (6, 4, 3))$, et possède trois rubans de hauteur respective 2, 2 et 0; il est donc de poids 4;
- le second est de type $((6, 5, 4, 2, 1, 1), (6, 5, 4, 2, 2))$, et ses rubans ont respectivement pour hauteur 2, 3, 1, 1 et 0; il est donc de poids 7.

Ces définitions permettent d'énoncer la règle suivante pour calculer les évaluations des caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n [108] :

PROPOSITION 2.2 (RÈGLE DE MURNAGHAN-NAKAYAMA) Soit α et β deux partitions d'un entier strictement positif n . Alors :

$$\chi_\beta^\alpha = \sum_T (-1)^{W(T)}$$

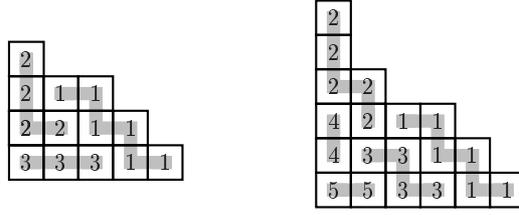


FIGURE 2.1 – Exemples de tableaux de rubans.

où la sommation porte sur l'ensemble de tableaux de rubans de type (α, β) .

Les évaluations des caractères irréductibles de \mathfrak{S}_n sur la classe des n -cycles se déduisent immédiatement de cette règle, puisque seules les équerres peuvent être remplies avec un unique ruban :

PROPOSITION 2.3

$$\chi_{(n)}^\gamma = \begin{cases} (-1)^r & \text{si il existe } r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ tel que } \gamma = 1^r(n-r), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci ramène la sommation apparaissant dans la proposition 2.1 à une simple sommation sur les équerres. De plus, la règle de Murnaghan-Nakayama permet d'obtenir une formule explicite pour f^γ lorsque γ est une équerre :

$$\forall r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^{1^r(n-r)} = \chi_{1^n}^{1^r(n-r)} = \binom{n-1}{r}.$$

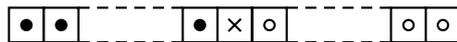
On peut donc réécrire la proposition 2.1 de la façon suivante :

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{n!^{m-1}}{z_1 \dots z_m} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r}^{1-m} (-1)^r \chi_{\alpha_1}^{1^r(n-r)} \dots \chi_{\alpha_m}^{1^r(n-r)}. \tag{2.3}$$

— o —

2.2.2 Diagrammes quasi-coloriés

Pour obtenir une interprétation combinatoire de la formule (2.3), nous déduisons de la règle de Murnaghan-Nakayama une autre expression des caractères concernés. On appelle *diagramme (bien) colorié* de forme α un diagramme de Ferrers dont les cases sont coloriées en noir ou blanc (\bullet ou \circ) de telle sorte que chaque ligne est monochrome. Un *diagramme quasi-colorié* est tel que les cases sont noires ou blanches sauf une, qui est cochée (\times), et toutes les lignes sont monochromes sauf la dernière qui est de la forme :



i.e. $\bullet^p \times \circ^q$ pour un certain couple d'entiers positifs ou nuls (p, q) . Soit $\hat{\alpha}$ un diagramme quasi-colorié de forme α ; alors $|\hat{\alpha}|_\bullet$ désigne le nombre de ses cases noires, et $\ell_\bullet(\hat{\alpha})$ celui de ses lignes entièrement noires (la dernière ligne, qui contient nécessairement la case cochée, n'est pas entièrement noire).

PROPOSITION 2.4 Soit n un entier strictement positif; soit r un élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une partition de n . Alors les tableaux de rubans de type $(1^r(n-r), \alpha)$ sont en bijection avec les diagrammes quasi-coloriés de forme α avec r cases noires.

DÉMONSTRATION. Les cases blanches de α sont celles qui remplissent la partie horizontale de l'équerre $1^r(n-r)$, les noires celles qui remplissent la partie verticale, et la case cochée correspond à la position de la case formant le coin de $1^r(n-r)$. \square

EXEMPLE 2.2 La figure 2.2 montre un tableau de rubans de type $(1^6 14, 4^2 5 7)$ et le quasi-coloriage de la partition $4^2 5 7$ associé.

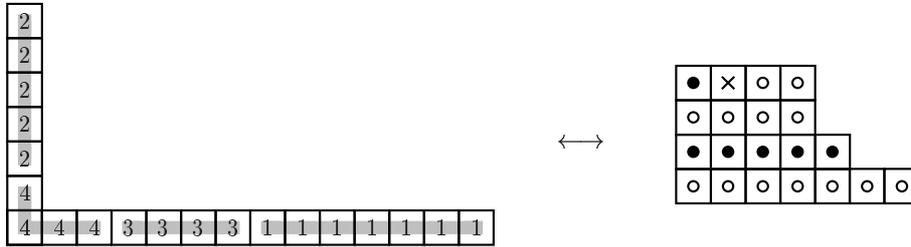


FIGURE 2.2 – Illustration de la bijection entre tableaux de rubans et diagrammes quasi-coloriés.

Nous obtenons donc la reformulation suivante de la règle de Murnaghan-Nakayama en termes de quasi-coloriages, pour le cas particulier de $\chi_\alpha^{1^r(n-r)}$:

PROPOSITION 2.5 Soit n un entier strictement positif; soit r un élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ une partition de n . Alors :

$$\chi_\alpha^{1^r(n-r)} = \sum_{\hat{\alpha}} (-1)^{r-\ell(\hat{\alpha})},$$

où la sommation porte sur les quasi-coloriages $\hat{\alpha}$ de α comportant r cases noires.

— o —

2.2.3 Diagrammes coloriés redressés

Dans cette section, nous déduisons de la proposition 2.5 une expression des caractères $\chi_\alpha^{1^r(n-r)}$ faisant intervenir des diagrammes bien coloriés à la place des quasi-coloriés.

Soit $\{\bullet, \circ\}^k$ l'ensemble des mots de longueur k sur l'alphabet $\{\bullet, \circ\}$, et $\mathfrak{S}(\bullet^p \circ^q)$ le sous-ensemble de $\{\bullet, \circ\}^{p+q}$ formé des mots comportant exactement p lettres \bullet (et donc q lettres \circ).

Avec ces notations, le lemme suivant est immédiat :

LEMME 2.6 (LEMME DE MÉLANGE) Soit p et q deux entiers strictement positifs. On définit l'ap-

plication φ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \{\bullet, \circ\}^{p+q+1} &\longrightarrow \{\bullet, \circ\}^* \times \{\bullet, \circ\}^* \\ u &\mapsto (v, w) \end{aligned}$$

où $vw = u$ et v est le plus long préfixe de u satisfaisant les conditions :

$$|v|_{\bullet} \leq p \text{ et } |v|_{\circ} \leq q.$$

Alors φ envoie $\{\bullet, \circ\}^{p+q+1}$ bijectivement sur

$$\bigcup_{i=1}^p (\mathfrak{S}(\bullet^i \circ^q) \times \circ \{\bullet, \circ\}^{p-i}) \cup \bigcup_{j=1}^q (\mathfrak{S}(\bullet^p \circ^j) \times \bullet \{\bullet, \circ\}^{q-j}).$$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell})$ une partition d'un entier n strictement supérieur à 1. Le redressement d'ordre 0 de α est la partition telle que :

$$\alpha^0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_{\ell}-1 \text{ fois}}),$$

et pour tout entier k compris entre 1 et α_{ℓ} ,

$$\alpha^k = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}, k, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_{\ell}-1-k \text{ fois}}).$$

La partition $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1})$ est notée α^* , et la partition $1^{\alpha_{\ell}-1-k} k$ est appelée *équerre redressée* de α ; $1^{\alpha_{\ell}-1-k}$ est sa *partie verticale* et (k) (si $k \neq 0$) sa *partie horizontale*.

EXEMPLE 2.3 Considérons la partition $\alpha = (8, 7, 7, 6)$. La partition $\alpha^* = (8, 7, 7)$ ainsi que les différents redressements de α sont représentés à la figure 2.3. Les parties verticale et horizontale de chaque équerre redressée y sont matérialisées par des rubans.

Avec ces notations et le lemme 2.6, la proposition 2.5 devient :

PROPOSITION 2.7 Soit n un entier strictement positif, $r \in [0, n-1]$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}) \vdash n$.

Alors :

$$\chi_{\alpha}^{1^r(n-r)} = \sum_{k=0}^{\alpha_{\ell}-1} 2^{\ell-\ell(\alpha^k)-1} \sum_{\widehat{\alpha^k}} (-1)^{r-\ell \cdot (\widehat{\alpha^k})},$$

où la sommation interne porte sur les diagrammes bien coloriés $\widehat{\alpha^k}$ de forme α^k possédant r cases noires.

Remarquons que tout coloriage $\widehat{\alpha^k}$ induit un coloriage $\widehat{\alpha^*}$ de α^* ; en particulier, $\ell \cdot (\widehat{\alpha^*})$ est bien défini et est égal à $\ell \cdot (\widehat{\alpha^k})$.

DÉMONSTRATION. La sommation de la proposition 2.5 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}^{1^r(n-r)} &= \frac{1}{2^{\alpha_{\ell}}} \sum_{\widehat{\alpha}} \sum_{u \in \{\bullet, \circ\}^{\alpha_{\ell}}} (-1)^{r-\ell \cdot (\widehat{\alpha})} \\ &= \frac{1}{2^{\alpha_{\ell}}} \sum_{\widehat{\alpha}} \sum_{u \in \{\bullet, \circ\}^{\alpha_{\ell}}} (-1)^{r-\ell \cdot (\widehat{\alpha^*})}. \end{aligned}$$

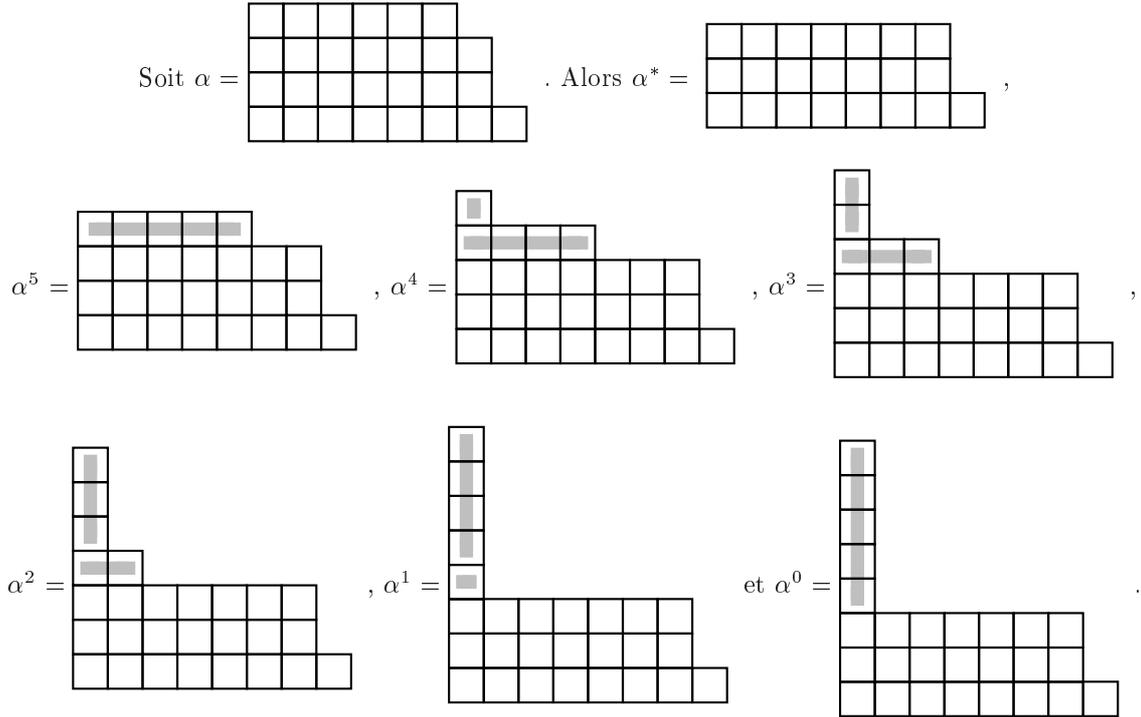


FIGURE 2.3 – Les différents redressements de la partition (8, 7, 7, 6).

On veut définir une bijection entre les couples $(\hat{\alpha}, u)$ formés d'un quasi-coloriage de α et d'un mot u appartenant à $\{\bullet, \circ\}^{\alpha_\ell}$, et les triplets $(k, \hat{\alpha}^k, w')$ formés d'un entier positif k strictement inférieur à α_ℓ , d'un coloriage de α^k et d'un mot de longueur $k + \delta_k^0$, où δ_k^0 désigne le symbole de Kronecker.

Étant donné un coloriage $\hat{\alpha}$ de α , soit p et q tels que la dernière ligne de $\hat{\alpha}$ soit $\bullet^p \times \circ^q$. Pour tout mot u , soit $(v, w) = \varphi(u)$ défini comme dans le lemme précédent, et soit $k = |w| - 1$. Alors le diagramme colorié redressé correspondant $\hat{\alpha}^k$ est défini de la façon suivante :

- le coloriage des lignes d'indice 1 à $\ell - 1$ de α induit un coloriage des lignes correspondantes de α^k ,
- la couleur de la partie horizontale de l'équerre redressée, si elle existe, *i.e.* si $k \neq 0$, n'est pas la première lettre de w ,
- la couleur des autres cellules est donnée par le mot v .

Enfin, le mot w' est égal à w si $k = 0$, et à w privé de sa première lettre sinon.

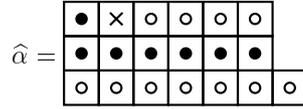
L'application ainsi définie réalise une bijection de l'ensemble des couples $(\hat{\alpha}, u)$ sur celui des triplets $(k, \hat{\alpha}^k, w')$, et, de plus, préserve le nombre de cases noires. L'égalité précédente peut donc être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^{1^r(n-r)} &= \frac{1}{2^{\alpha_\ell}} \sum_{k=0}^{\alpha_\ell-1} \sum_{\hat{\alpha}^k} \sum_{w' \in \{\bullet, \circ\}^{k+\delta_k^0}} (-1)^{r-\ell \cdot (\hat{\alpha}^*)} \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha_\ell-1} 2^{-\alpha_\ell+k+\delta_k^0} \sum_{\hat{\alpha}^k} (-1)^{r-\ell \cdot (\hat{\alpha}^*)}, \end{aligned}$$

où la sommation interne porte sur les diagrammes bien coloriés de forme α^k possédant r cases

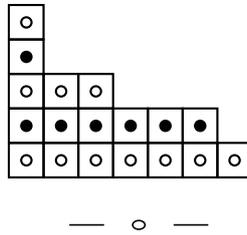
noires. Pour obtenir l'expression annoncée, il suffit de remarquer que $1 + \ell(\alpha^k) - \ell = \alpha_\ell - k - \delta_k^0$.
 \square

EXEMPLE 2.4 Considérons le diagramme quasi-colorié suivant :



D'après les conventions précédentes, $p = 1$ et $q = 4$.

Soit $u = \circ \bullet \bullet \circ \circ \bullet \in \{\bullet, \circ\}^6$, alors $\varphi(u) = (\circ \bullet, \bullet \circ \circ \bullet)$, $k = 3$, et le coloriage correspondant de α^3 est :



2.3 Une sommation graphique

Pour tout m -uplet \mathbf{a} de partitions $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,\ell_i})$ d'un entier donné n , soit $I_{\mathbf{a}}$ l'ensemble $\llbracket 0, \alpha_{1,\ell_1} - 1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 0, \alpha_{m,\ell_m} - 1 \rrbracket$. Alors, pour tout élément $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ de $I_{\mathbf{a}}$, on note $\mathbf{a}^{\mathbf{k}}$ le m -uplet $(\alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_m^{k_m})$, et $\ell_i^{\mathbf{k}} = \ell(\alpha_i^{k_i})$.

Nous sommes maintenant en mesure de déduire de la formule (2.3) une nouvelle expression de la constante de structure $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)}$. Chaque évaluation d'un caractère fait appel à une sommation sur les diagrammes bien coloriés à r cases noires. En développant ces sommations, on est amené à sommer sur les configurations de m diagrammes bien coloriés possédant le même nombre r de cases noires ; on obtient :

$$\frac{n^{m-1}}{z_1 \cdots z_m} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\mathbf{k} \in I_{\mathbf{a}}} \sum_{\widehat{\mathbf{a}}^{\mathbf{k}}} \left(\prod_{i=1}^m 2^{\ell_i - \ell_i^{\mathbf{k}} - 1} (-1)^{r - \ell \cdot (\widehat{\alpha}_i^{\mathbf{k}})} \right) (-1)^r [r!(n-1-r)!]^{m-1}, \quad (2.4)$$

où la sommation interne porte sur les coloriages $\widehat{\mathbf{a}}^{\mathbf{k}}$ de $\mathbf{a}^{\mathbf{k}}$ à r cases noires dans chaque diagramme $\alpha_i^{k_i}$.



2.3.1 Graphes étoilés coloriés

Le facteur $[r!(n-1-r)!]^{m-1}$ qui apparaît dans l'expression (2.4) peut facilement être interprété combinatoirement. Pour obtenir également une description naturelle des autres facteurs, nous introduisons le modèle suivant :

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des partitions d'un entier strictement positif p , avec $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,\ell_i})$ pour chaque indice i appartenant à $\llbracket 1, m \rrbracket$. Un *graphe étoilé* de type $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est un graphe biparti Γ vérifiant les conditions suivantes :

- ses deux types de sommets sont, d'une part, $\ell_1 + \dots + \ell_m$ *sommets-lignes*, et, d'autre part, p *sommets-étoiles*,
- les sommets-lignes correspondent bijectivement aux lignes des diagrammes,
- pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, \ell_i \rrbracket$, le sommet-ligne (i, j) a pour degré α_{ij} ,
- les sommets-étoiles ne sont pas étiquetés et ont tous degré m ,
- les arêtes incidentes au sommet-ligne (i, j) sont numérotées de 1 à α_{ij} ,
- pour tout sommet-étoile s et tout indice $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe exactement un indice $j \in \llbracket 1, \ell_i \rrbracket$ tel que le sommet-ligne (i, j) est incident à s .

Un graphe étoilé $\widehat{\Gamma}$ est dit *colorié* si ses sommets sont coloriés en noir et blanc de telle sorte que deux sommets adjacents ont la même couleur. Si la couleur des sommets-lignes est donnée par celle des lignes de $\widehat{\mathbf{a}}$, alors $\widehat{\Gamma}$ est dit *de type $\widehat{\mathbf{a}}$* . L'ensemble des graphes étoilés de type \mathbf{a} est noté $\mathcal{G}(\mathbf{a})$ et celui des graphes étoilés coloriés dont le type est un coloriage de \mathbf{a} est noté $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{a})$.

EXEMPLE 2.5 Considérons les partitions $\alpha_1 = 1^4$, $\alpha_2 = 1^2 2$, $\alpha_3 = 1 3$. La figure 2.4 représente un graphe étoilé colorié sur $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

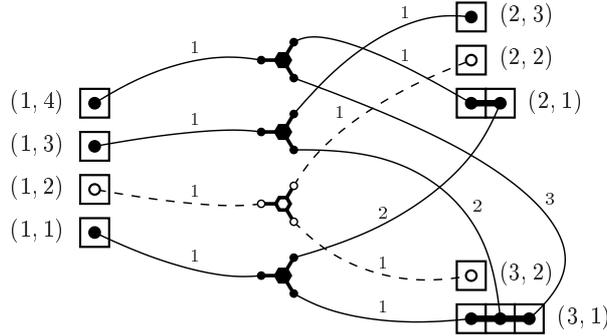


FIGURE 2.4 – Un exemple de graphe étoilé colorié.

Considérons m diagrammes coloriés à p cases noires et q cases blanches chacun. Tout graphe étoilé construit sur ces diagrammes a p sommets étoilés noirs et q blancs *indiscernables*. Chaque case noire (resp. blanche) d'un diagramme donné est adjacente à une étoile noire (resp. blanche) distincte, et le nombre de tels diagrammes est donc

$$\frac{1}{p! q!} (p! q!)^m.$$

PROPOSITION 2.8 Soit \mathbf{a} un m -uplet de partitions d'un entier strictement positif n , et $\widehat{\mathbf{a}}^k$ un redressement colorié de \mathbf{a} à r cases noires dans chaque diagramme. Alors le nombre de graphes étoilés coloriés de type $\widehat{\mathbf{a}}^k$ est

$$[r!(n-1-r)!]^{m-1}.$$

Cela fournit une interprétation du facteur $[r!(n-1-r)!]^{m-1}$ apparaissant dans l'expression 2.4

en termes de graphes étoilés coloriés de type $\widehat{\mathbf{a}^k}$. Réécrivons cette expression en ces termes ; la sommation sur r se traduit par une sommation sur tous les coloriages, et nous obtenons donc :

PROPOSITION 2.9

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{n^{m-1}}{z_1 \dots z_m} \sum_{\mathbf{k} \in I_{\mathbf{a}}} \sum_{\widehat{\Gamma} \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k)} 2^{\kappa(\Gamma) - c(\Gamma)} (-1)^{(m-1)\rho(\Gamma) - \sum_i \ell_i \cdot (\widehat{\alpha}_i^*)} \quad (2.5)$$

où $\rho(\Gamma)$ désigne le nombre d'étoiles noires de Γ , et $\kappa(\Gamma)$ son nombre cyclomatique

$$\kappa(\Gamma) = e(\Gamma) - v(\Gamma) + c(\Gamma),$$

où $e(\Gamma)$, $v(\Gamma)$ et $c(\Gamma)$ désignent respectivement le nombre d'arêtes, de sommets et de composantes connexes.

DÉMONSTRATION. Remarquons que $\rho(\Gamma) = r$, si bien que, pour déduire la formule (2.5) de la formule (2.4), il suffit de montrer :

$$\prod_{i=1}^m 2^{\ell_i - \ell_i^k - 1} = 2^{\kappa(\Gamma) - c(\Gamma) - 2g}.$$

D'après la définition de g , $\sum_{i=1}^m (\ell_i - 1) = (m-1)(n-1) - 2g$. Le nombre $r(\Gamma)$ de sommets-lignes de Γ est $\sum_{i=1}^m \ell_i^k$, le nombre $s(\Gamma)$ de ses sommets-étoiles est $n-1$, et le nombre de ses arêtes est $m(n-1)$, si bien que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \ell_i - \ell_i^k - 1 &= [(m-1)(n-1) - 2g] - \sum_{i=1}^m \ell_i^k \\ &= [e(\Gamma) - s(\Gamma) - 2g] - r(\Gamma) \\ &= \kappa(\Gamma) - c(\Gamma) - 2g. \end{aligned}$$

□

— o —

2.3.2 Composantes connexes et parité

Soit Γ un graphe étoilé de type $\mathbf{a}^k = (\alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_m^{k_m})$, et $\Gamma^{(1)} \sqcup \dots \sqcup \Gamma^{(c(\Gamma))}$ sa décomposition en composantes connexes. Celle-ci induit une décomposition de chaque partition $\alpha_i^{k_i}$.

La proposition suivante découle immédiatement de la définition des graphes étoilés coloriés :

PROPOSITION 2.10 *Soit $\widehat{\Gamma}$ un graphe étoilé colorié. Alors chaque composante connexe de $\widehat{\Gamma}$ est monochrome. En d'autres termes, les graphes étoilés coloriés sont en bijection avec les couples formés d'un graphe étoilé (non colorié) Γ et d'un sous-ensemble \mathcal{B} de l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma)$ de ses composantes – les noires.*

On peut donc déduire de la proposition 2.10 une nouvelle formulation de la sommation interne de l'équation (2.5) :

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(\mathbf{a}^k)} 2^{\kappa(\Gamma) - c(\Gamma)} \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\Gamma)} (-1)^{\varepsilon(\mathcal{B})},$$

où $\varepsilon(\mathcal{B})$ est défini de la façon suivante : soit $e(\Gamma^{(c)})$, $s(\Gamma^{(c)})$, $r(\Gamma^{(c)})$ et $h(\Gamma^{(c)})$ respectivement le nombre d'arêtes, de sommets-étoiles, de sommets-lignes et de sommets-lignes redressés appartenant à la composante connexe $\Gamma^{(c)}$; on associe à chaque composante connexe le paramètre suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\Gamma^{(c)}) &= (m-1) s(\Gamma^{(c)}) - \sum_{i=1}^m \ell(\alpha_i^{*(c)}) \\ &= [e(\Gamma^{(c)}) - s(\Gamma^{(c)})] - [r(\Gamma^{(c)}) - h(\Gamma^{(c)})] \\ &= \kappa(\Gamma^{(c)}) - 1 + h(\Gamma^{(c)}),\end{aligned}$$

et cette notation est étendue aux sous-ensembles de $\mathcal{C}(\Gamma)$:

$$\forall \mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\Gamma), \varepsilon(\mathcal{B}) = \sum_{c \in \mathcal{B}} \varepsilon(\Gamma^{(c)}).$$

Un graphe étoilé est dit *totalelement pair* si $\varepsilon(\Gamma^{(c)})$ est pair pour tout $c \in \mathcal{C}(\Gamma)$. On note $\mathcal{E}(\mathbf{a}^k)$ l'ensemble de graphes étoilés totalelement pairs de type \mathbf{a}^k .

— ○ —

2.3.3 Une involution pour éliminer les contributions négatives

LEMME 2.11 *Soit $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathbf{a}^k)$. Alors*

$$\sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\Gamma)} (-1)^{\varepsilon(\mathcal{B})} = \begin{cases} 2^{\varepsilon(\Gamma)} & \text{si } \Gamma \text{ est totalelement pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Le premier cas est évident. Dans l'autre cas, soit c le plus petit indice tel que $\varepsilon(\Gamma^{(c)})$ est impair. Considérons l'involution ϑ sur l'ensemble des parties de $\mathcal{C}(\Gamma)$ qui envoie $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ sur la différence symétrique $\mathcal{B} \Delta \{c\}$. Alors ϑ est une involution sans point fixe, et pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\Gamma)$, $\varepsilon(\mathcal{B}) \not\equiv \varepsilon(\vartheta(\mathcal{B})) \pmod{2}$, si bien que les contributions des sous-ensembles s'annulent deux à deux. \square

La contribution d'un graphe étoilé est donc $2^{\kappa(\Gamma)}$ s'il est totalelement pair et 0 sinon, ce qui achève la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 2.2 *Soit \mathbf{a} un m -uplet de partitions d'un entier strictement positif n . Alors :*

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{n^{m-1}}{z_1 \dots z_m 2^{2g}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}_{\mathbf{a}}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{a}^{\mathbf{k}})} 2^{\kappa(\Gamma)}.$$

On peut déduire des formules closes pour certains cas particuliers directement de cette première formulation du théorème. Pour cela, observons que, pour tout graphe étoilé Γ construit sur un redressement de \mathbf{a} ,

$$\begin{aligned}\sum_{c \in \mathcal{C}(\Gamma)} \varepsilon(\Gamma^{(c)}) &= (m-1)s(\Gamma) - \sum_{i=1}^m (\ell_i - 1) \\ &= (m-1)(n-1) - [(m-1)(n-1) - 2g] \\ &= 2g.\end{aligned}$$

Cela (re)donne en particulier une preuve de ce que $c_{\mathbf{a}}^{(n)}$ est nul sauf si g est entier : en effet, si tel n'est pas le cas, aucun graphe étoilé totalement pair ne peut être construit sur un redressement de \mathbf{a} , et la sommation est donc vide.

Supposons maintenant que \mathbf{a} est tel que $g \in \mathbb{N}$, et considérons un graphe étoilé Γ connexe, $\Gamma \in \mathcal{G}(\mathbf{a}^k)$. Alors son nombre cyclomatique ne dépend que de \mathbf{a}^k :

$$\kappa(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma) + 1 - h(\Gamma) = 2g + 1 + \sum_{i=1}^m (k_i + \delta_{k_i}^0 - \alpha_{i,\ell_i}).$$

Si \mathbf{a} a la propriété que tout graphe étoilé construit sur l'un de ses redressements est connexe, alors, selon le théorème 2.2,

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{2}{z_1 \dots z_m} n^{m-1} \sum_{\mathbf{k} \in I_{\mathbf{a}}} \text{card}(\mathcal{G}(\mathbf{a}^k)) 2^{k_i + \delta_{k_i}^0 - \alpha_{i,\ell_i}}.$$

Or $\text{card}(\mathcal{G}(\mathbf{a}^k)) = (n-1)!^{m-1}$, et pour tout entier p , $\sum_{k=0}^{p-1} 2^{k+\delta_k^0} = 2^p$. On obtient donc le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.12 *Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est tel que tout graphe étoilé construit sur l'un de ses redressements est connexe, alors soit $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = 0$, soit :*

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{2}{n!} \prod_{i=1}^m \text{card}(\mathcal{C}_{\alpha_i}).$$

En particulier, cette condition de connexité est satisfaite si l'une des partitions vaut $(n-1, 1)$. Cette formule généralise donc le résultat classique suivant : pour toute partition $\alpha \vdash n$ impaire,

$$c_{(n), (n-1, 1)}^{\alpha} = 2(n-2)! \quad .$$

— o —

2.4 Orientabilité et énumération explicite

2.4.1 Fonction de parité et orientabilité

Soit Γ un graphe, et S son ensemble de sommets. On appelle *fonction de parité* sur Γ toute application $\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}$. Le cardinal de l'ensemble $\varphi^{-1}(0)$ est appelé *poide* de la fonction φ et noté $w(\varphi)$. Une orientation des arêtes de Γ est dite *φ -compatible* si le degré sortant de tout sommet $v \in S$ a même parité que $\varphi(v)$. Un graphe Γ possédant une telle orientation est dit *φ -orientable*.

PROPOSITION 2.13 *Un graphe connexe Γ est φ -orientable si et seulement si*

$$\kappa(\Gamma) \not\equiv w(\varphi) \pmod{2}.$$

Dans ce cas, il a exactement $2^{\kappa(\Gamma)}$ orientations φ -compatibles.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que $\kappa(\Gamma) = 0$, autrement dit que Γ est un arbre, et démontrons le résultat par récurrence sur le nombre de sommets de Γ .

Le cas de l'arbre Γ réduit à un unique sommet s (et donc sans arête) est évident : la seule orientation possible de Γ est l'orientation vide, et Γ est donc φ -orientable si et seulement si $\varphi(s) = 0$, *i.e.* $w(\varphi) = 1$, *i.e.* $w(\varphi) \not\equiv \kappa(\Gamma) \pmod{2}$.

Si Γ a plusieurs sommets, il possède une feuille f , adjacente à un sommet s . Soit Γ' l'arbre obtenu en supprimant f dans Γ . Pour toute fonction de parité φ sur Γ , on définit de la façon suivante la fonction de parité φ' correspondante sur Γ' :

$$\varphi' : v \mapsto \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \neq s \\ \varphi(s) + \varphi(f) + 1 & \text{si } v = s. \end{cases}$$

Γ est alors φ -orientable si et seulement si Γ' est φ' -orientable, et chaque orientation φ -compatible de Γ correspond à exactement une orientation φ' -compatible de Γ' . De plus, $w(\varphi') \equiv w(\varphi) \pmod{2}$, donc Γ est φ -orientable si et seulement si $w(\varphi) \equiv 1 \pmod{2}$, et a alors une unique orientation φ -compatible. Ceci prouve le cas $\kappa(\Gamma) = 0$.

Prouvons maintenant le cas général par récurrence sur $\kappa(\Gamma)$: supposons $\kappa(\Gamma) \geq 1$, Γ possède alors un cycle simple (s_1, \dots, s_k) pour un certain $k \geq 3$. Soit (s_1, s_2) une arête de ce cycle, et Γ' le graphe obtenu à partir de Γ en supprimant cette arête. Soit φ' la fonction de parité sur Γ' définie par :

$$\varphi' : v \mapsto \begin{cases} \varphi(v) & \text{si } v \neq s_1 \\ \varphi(s_1) + 1 & \text{si } v = s_1. \end{cases}$$

Considérons les orientations φ -compatibles de Γ pour lesquelles (s_1, s_2) est orientée de s_1 vers s_2 . Les restrictions à Γ' de ces orientations sont exactement les orientations φ' -compatibles. Alors $\kappa(\Gamma') < \kappa(\Gamma)$, et l'hypothèse de récurrence peut être appliquée à Γ' : de telles orientations existent si et seulement si $\kappa(\Gamma') \not\equiv w(\varphi') \pmod{2}$, et elles sont alors au nombre de $2^{\kappa(\Gamma')}$. Puisque φ et φ' ont des poids de parité opposée, ces conditions se traduisent de la façon suivante en termes de Γ et φ : il existe des orientations φ -compatibles de Γ avec une orientation donnée de l'arête (s_1, s_2) si et seulement si $\kappa(\Gamma) \not\equiv w(\varphi) \pmod{2}$, et ces orientations sont alors au nombre de $2^{\kappa(\Gamma)-1}$, ce qui porte le nombre total d'orientations φ -compatibles de Γ à $2^{\kappa(\Gamma)}$. CQFD. \square

— o —

2.4.2 Fin de l'énumération

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents aux graphes étoilés à l'aide d'une fonction de parité judicieusement choisie : soit \mathbf{a} un m -uplet de partitions de n , \mathbf{a}^k un de ses redressements, et Γ un graphe étoilé appartenant à $\mathcal{G}(\mathbf{a}^k)$. Considérons la fonction de parité φ nulle exactement sur les sommets-lignes correspondant aux équerres redressées. On note $\varphi^{(c)}$ la restriction de cette fonction φ à chaque composante connexe $\Gamma^{(c)}$ de Γ .

PROPOSITION 2.14 Γ est totalement pair si et seulement s'il est φ -orientable.

DÉMONSTRATION. Un graphe étoilé Γ est totalement pair si et seulement si, pour chacune de ses composantes connexes $\Gamma^{(c)}$, $\varepsilon(\Gamma^{(c)}) \equiv 0 \pmod{2}$. D'autre part, il est φ -orientable si et seulement si, pour chaque $\Gamma^{(c)}$, $\kappa(\Gamma^{(c)}) \not\equiv w(\varphi^{(c)}) \pmod{2}$. Or le poids $w(\varphi^{(c)})$ est par définition le nombre de lignes provenant d'une équerre redressée appartenant à la c -ième composante, autrement dit $h(\Gamma^{(c)})$. L'égalité $\varepsilon(\Gamma^{(c)}) = \kappa(\Gamma^{(c)}) - 1 + h(\Gamma^{(c)})$ permet d'achever la démonstration. \square

L'ensemble des orientations φ -compatibles des graphes appartenant à $\mathcal{G}(\mathbf{a}^k)$ sera noté $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k)$.

On peut immédiatement déduire l'égalité suivante du lemme 2.11 et des propositions 2.13 et 2.14 :

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{a}^k)} 2^{\kappa(\Gamma)} = \text{card} \left(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k) \right).$$

Le théorème 2.2 devient donc :

THÉORÈME 2.3

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)} = \frac{n^{m-1}}{z_1 \dots z_m 2^{2g}} \sum_{\mathbf{k} \in I_{\mathbf{a}}} \text{card} \left(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k) \right).$$

Le problème se ramène donc au dénombrement de l'ensemble $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k)$. Partitionnons cet ensemble selon la distribution des degrés sortants des différents sommets, décrite par :

- la partition $\hat{\mu}$ dont les parts sont les degrés sortants des sommets-étoiles,
- l'application ψ qui associe à chaque sommet-ligne α_{ij} son degré sortant ψ_{ij} .

Nous considérons $\hat{\mu}$ comme une partition du fait de l'indiscernabilité des sommets-étoiles.

Alors :

$$\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k) = \bigcup_{(\psi, \hat{\mu})} \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k, \psi, \hat{\mu}).$$

PROPOSITION 2.15 *Par construction, ψ et $\hat{\mu}$ satisfont les propriétés suivantes :*

- φ valant 1 sur chaque sommet-étoile, la partition $\hat{\mu}$ n'a pas de part paire. En conséquence, $|\hat{\mu}| \geq n - 1$ et $|\hat{\mu}| \equiv n - 1 \pmod{2}$. Les sommets-étoiles de degré sortant égal à 1 sont dits simples, les autres, de degré sortant au moins égal à 3, sont dits complexes.
- pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, le nombre d'indices j tels que φ_{ij} vaut 1 est exactement $\ell_i - 1$. Ceci implique entre autres que $\sum_{j \geq 1} \psi_{ij} \geq \ell_i - 1$ et $\sum_{j \geq 1} \psi_{ij} \equiv \ell_i - 1 \pmod{2}$.
- chaque arête du graphe contribue exactement une fois au degré sortant d'un sommet, donc $|\hat{\mu}| + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{j \geq 1} \psi_{ij} = m(n - 1)$.

Pour tout $i \geq 1$, soit m_i le nombre de parts de taille $2i + 1$ de $\hat{\mu}$, et soit μ la partition $1^{m_1} 2^{m_2} \dots$; on notera $\hat{\mu} = 2\mu + 1$. Soit $g_0 = |\mu|$, c'est-à-dire la moitié de l'excédent¹ d'arêtes sortantes pour les sommets-étoiles, et g_i la moitié de l'excédent d'arêtes sortantes pour les sommets-lignes correspondant au diagramme α_i . Autrement dit,

$$|\hat{\mu}| = n - 1 + 2g_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \sum_{j \geq 1} \psi_{ij} = \ell_i - 1 + 2g_i.$$

¹relativement au cas minimum d'une sortante par étoile

Calculons tout d'abord $\text{card}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k, \psi, \hat{\mu}))$ pour ψ et μ donnés. Il faut choisir dans chaque ligne α_{ij} la position des ψ_{ij} arêtes sortantes. Cela donne lieu à $\prod_{j \geq 1} \binom{\alpha_{ij}}{\psi_{ij}}$ possibilités pour chaque diagramme.

Il faut ensuite choisir quelles cellules sont reliées à des sommets-étoiles complexes, et comment. Avec les notations décrites dans la section 2.1, cela donne

$$\frac{(\mathcal{D}(e_{2\mu+1})) (n-1 - \sum_j \psi_{1j}, \dots, n-1 - \sum_j \psi_{mj})}{\text{Aut}(\mu)}$$

choix possibles, *i.e.*

$$\frac{(\mathcal{D}(e_{2\mu+1})) (r_1 - 2g_1, \dots, r_m - 2g_m)}{\text{Aut}(\mu)}.$$

Relier les dernières cases entrantes aux sommets-étoiles simples – non numérotées, donc non discernables les unes des autres – ne permet aucun choix supplémentaire, donc il ne reste qu'à relier les cases sortantes aux sommets étoiles de telle manière que chaque diagramme soit adjacent à chaque étoile. Cela donne lieu, pour chaque diagramme α_i , à un choix parmi $(\sum_j \psi_{ij})!$ possibilités.

Le cardinal de $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k, \psi, \hat{\mu})$ est donc égal à :

$$\prod_{i,j} \binom{\alpha_{ij}}{\psi_{ij}} \cdot \prod_i \left(\sum_j \psi_{ij} \right)! \cdot \frac{(\mathcal{D}(e_{2\mu+1})) (\mathbf{r} - 2\mathbf{g})}{\text{Aut}(\mu)}.$$

Sommons maintenant sur ψ avec un m -uplet (g_1, \dots, g_m) fixé. Puisque ψ_{ij} est impair si et seulement si $j < \ell_i$, on obtient :

$$\frac{(\mathcal{D}(e_{2\mu+1})) (\mathbf{r} - 2\mathbf{g})}{\text{Aut}(\mu)} \cdot \prod_{i=1}^m \left((\ell_i - 1 + 2g_i)! \sum_{p_1 + \dots + p_{\ell_i} = g_i} \binom{k_i}{2p_{\ell_i}} \prod_{j=1}^{\ell_i-1} \binom{\alpha_{ij}}{2p_j + 1} \right).$$

Sommer sur les m -uplets (g_1, \dots, g_m) et sur μ donne $\text{card}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{a}^k))$:

$$\sum_{g_0 + \dots + g_m = g} P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m \left((\ell_i - 1 + 2g_i)! \sum_{p_1 + \dots + p_{\ell_i} = g_i} \binom{k_i}{2p_{\ell_i}} \prod_{j=1}^{\ell_i-1} \binom{\alpha_{ij}}{2p_j + 1} \right).$$

Selon le théorème 2.3, il ne reste plus qu'à sommer sur \mathbf{k} . L'identité

$$\sum_{k_i=0}^{\alpha_{i\ell_i}-1} \binom{k_i}{2p_{\ell_i}} = \binom{\alpha_{i\ell_i}}{2p_{\ell_i} + 1},$$

permet alors d'obtenir l'expression suivante de $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{(n)}$:

$$\frac{n^{m-1}}{z_1 \dots z_m 2^{2g}} \sum_{g_0 + \dots + g_m = g} P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m \left((\ell_i + 2g_i - 1)! \sum_{p_1 + \dots + p_{\ell_i} = g_i} \prod_{j=1}^{\ell_i} \binom{\alpha_{ij}}{2p_j + 1} \right),$$

qui est équivalente au théorème 2.1. □

2.5 Résultats asymptotiques

La formule (2.2) permet d'obtenir des résultats asymptotiques à genre fixé. Nous allons considérer ici deux façons différentes de faire tendre le poids des partitions mises en jeu vers l'infini.

La plupart des résultats asymptotiques sur les constantes de structure concernent le cas où, à n fixé, le nombre de facteurs m tend vers l'infini. Ce qui implique en particulier que le genre tend lui aussi vers l'infini. Ces résultats sont particulièrement intéressants pour l'étude des marches aléatoires dans le groupe symétrique [102], mais, en vue d'interprétations topologiques, les résultats à genre fixé peuvent s'avérer plus pertinents. Dans ce cadre, les parts de taille 1 ne sont pas intéressantes, puisqu'elles correspondent aux points réguliers par opposition aux points critiques, et il est donc plus naturel de faire porter les contraintes sur le genre et les types cycliques réduits. Considérons donc des partitions réduites $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ² et un genre g fixé ; on pose $n = \sum_i r_i + 1 - 2g$, $a_i = n - |\alpha_i|$ et

$$f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^g = \begin{cases} c_{1^{a_1} \alpha_1, \dots, 1^{a_m} \alpha_m}^{(n)} & \text{si } n > \max_i(|\alpha_i|), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^g$ est le nombre de factorisations de genre g d'un grand cycle en m permutations de types cycliques réduits respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

La formule 2.2 est utile pour obtenir des estimations asymptotiques des constantes de structure lorsque n tend vers l'infini à g fixé. Comme illustration, nous prouvons les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 2.16 (GRAND NOMBRE DE FACTEURS) *Soit g un entier positif et $\alpha = 2^{a_2} \dots k^{a_k}$ une partition sans parts égales à 1, de rang r et de longueur ℓ . Alors il existe une constante $c(g, \alpha)$ (donnée dans la preuve) telle que, lorsque m tend vers l'infini*

$$f_{(\alpha)^m}^g \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} c(g, \alpha) \cdot \frac{(\ell - 1)!^m}{\text{Aut}(\alpha)^m} \cdot (mr)^{m\ell - 1 + 3g}.$$

En particulier, dans le cas des produits de transpositions, on obtient une généralisation de la formule de Cayley :

$$f_{(2)^m}^g \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m^{m-1+3g}}{24^g g!},$$

qui s'étend élégamment aux involutions à k cycles :

$$f_{(2^k)^m}^g \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(km)^{km-1+3g}}{k^m 24^g g!},$$

ou encore aux k -cycles :

$$f_{(k)^m}^g \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} c(g, k) \cdot ((k-1)m)^{m-1+3g}.$$

COROLLAIRE 2.17 (GRANDS FACTEURS) *Soit g un entier positif ; on considère m partitions $\alpha_i = 1^{a_{i,1}} \dots k^{a_{i,k}}$. Soit $x \cdot \alpha_i$ la partition $x^{a_{i,1}} \dots (kx)^{a_{i,k}}$. Pour x tendant vers l'infini, il existe une constante $c(g; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (donnée dans la preuve) telle que :*

$$f_{x \cdot \alpha_1, \dots, x \cdot \alpha_m}^g \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} c(g; \alpha_1, \dots, \alpha_m) \cdot x^{4g-1+\sum_i \ell_i}.$$

— o —

²c'est-à-dire sans parts égales à 1

2.5.1 Grand nombre de facteurs identiques

Dans un premier temps, faisons tendre le nombre m de facteurs vers l'infini avec n , en considérant des facteurs (de type cyclique) identique(s). Le cas particulier le plus simple est celui des transpositions : soit $\mathcal{T} = 1^{n-2} 2$, et $\alpha_i = \mathcal{T}$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Alors $m = n - 1 + 2g$, et :

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{T}^{n-1+2g}}^{(n)} &= \frac{n^{n-2+2g}}{2^{2g}} P_g(1, \dots, 1) \\ &= \frac{n^{n-2+2g}}{2^{2g}} \sum_{\mu \vdash g} \frac{1}{\text{Aut}(\mu)} \binom{n-1+2g}{\ell(\mu)+2g} \binom{\ell(\mu)+2g}{2\mu_1+1, \dots, 2\mu_{\ell(\mu)}+1} \\ &= \frac{n^{n-2+2g}}{2^{2g}} \sum_{\ell=0}^g \binom{n-1+2g}{\ell+2g} \sum_{\substack{\mu \vdash g \\ \ell(\mu)=\ell}} \frac{1}{\text{Aut}(\mu)} \binom{\ell+2g}{2\mu_1+1, \dots, 2\mu_{\ell}+1}, \end{aligned}$$

si bien que $c_{\mathcal{T}^{n-1+2g}}^{(n)}$ est un polynôme de degré $n - 2 + 5g$ en n .

Un fait surprenant à remarquer est que le coefficient de $\binom{n-1+2g}{\ell+2g}$ est le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, \ell+2g\}$ en ℓ sous-ensembles de cardinal impair supérieur ou égal à 3. Il serait intéressant d'en trouver une interprétation combinatoire.

Remarquons aussi que cette formule découle aussi, moyennant quelques calculs, des résultats présentés dans [56, 115], qui fournissent la formulation suivante (théorème 1.6) :

$$c_{\mathcal{T}^{n-1+2g}}^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left[\binom{n}{2} - ni \right]^{n-1+2g}.$$

Une manière efficace de calculer des valeurs exactes pour n grand consiste à utiliser cette dernière formule pour calculer les g premières évaluations, en déduire les g coefficients du polynôme, et utiliser ensuite notre expression.

Asymptotiquement, la contribution dominante est clairement obtenue pour $\mu = 1^g$, si bien que le nombre de factorisations de genre g en $m = n - 1 + 2g$ transpositions est équivalent à :

$$c_{\mathcal{T}^{n-1+2g}}^{(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{n-2+5g}}{24^g g!}, \quad \text{ou encore } c_{\mathcal{T}^m}^{(n)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m^{m-1+3g}}{24^g g!}.$$

— o —

Plus généralement, considérons des factorisations de genre g en m facteurs de type $1^p \alpha$, où $\alpha = 2^{a_2} \dots k^{a_k}$ désigne une partition d'un entier n_0 fixé sans part de taille 1, de longueur ℓ et de rang r . La relation $mr = n_0 + p - 1 + 2g$ détermine le nombre de points fixes $p = mr - n_0 + 1 - 2g$, si bien que de telles factorisations existent dès que $m > \frac{n_0 + 2g - 1}{r}$.

Alors, puisque $S_{g_i}(1^p \alpha) = S_{g_i}(\alpha)$,

$$c_{(1^p \alpha)^m}^{(n_0+p)} = \frac{n^{m-1}}{2^{2g}} \frac{(p+\ell-1)!^m}{(p! \text{Aut}(\alpha))^m} \sum_{g_0+\dots+g_m=g} P_{g_0}(\mathbf{r}-2\mathbf{g}) \prod_{i=1}^m (\ell+p)^{(2g_i)} S_{g_i}(\alpha)$$

où $\mathbf{r} - 2\mathbf{g} = (r - 2g_1, \dots, r - 2g_m)$. Les contributions des compositions (g_1, \dots, g_m) possédant la même partition sous-jacente ν sont égales, et seuls les facteurs correspondant à $g_i > 0$ sont non

triviaux. Donc :

$$c_{(1^p \alpha)^m}^{(n_0+p)} = \frac{n^{m-1}}{2^{2g}} \frac{(p + \ell - 1)^m}{(p! \operatorname{Aut}(\alpha))^m} \sum_{\left\{ \substack{(g_0, \nu) \vdash g \\ \nu = 1^{n_1} \dots g^{n_g} \right\}} \binom{m}{\ell(\nu)} \binom{\ell(\nu)}{n_1, \dots, n_g} P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\nu) \prod_{i=1}^{\ell(\nu)} (\ell + p)^{(2\nu_i)} S_{\nu_i}(\alpha)$$

où $\mathbf{r} - 2\nu$ désigne le m -uplet $(r - 2\nu_1, \dots, r - 2\nu_{\ell(\nu)}, r, \dots, r)$.

Considérons tout d'abord $P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\nu)$. Pour m tendant vers l'infini, le terme dominant est le terme de degré maximal, à savoir $3g_0$, de $\mathcal{D}(e_{3g_0})/g_0!$:

$$g_0! P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\nu) \sim r^{3g_0} \binom{m - \ell(\nu)}{3g_0} \binom{3g_0}{3, \dots, 3} \sim \frac{(mr)^{3g_0}}{3!^{g_0}}.$$

Dans la sommation à g_0 fixé, le produit contribue avec un polynôme en p de degré $2(g - g_0)$, *i.e.* ne dépend pas de ν . La plus grande contribution est donc déterminée par le degré de $\binom{m}{\ell(\nu)}$ et donnée par $\nu = 1^{g-g_0}$. En conséquence, puisque $n \sim p \sim mr$, nous obtenons l'équivalent suivant :

$$c_{(1^p \alpha)^m}^{(n_0+p)} \underset{m, p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p^{m\ell-1}}{2^{2g}} \frac{(\ell - 1)^m}{\operatorname{Aut}(\alpha)^m} \sum_{g_0+g_1=g} \frac{m^{g_1}}{g_1!} \frac{(mr)^{3g_0}}{6^{g_0} g_0!} p^{2g_1} S_1(\alpha)^{g_1} \underset{m, p \rightarrow \infty}{\sim} (mr)^{m\ell-1+3g} \frac{(\ell - 1)^m}{\operatorname{Aut}(\alpha)^m} \sum_{g_0+g_1=g} \frac{S_1(\alpha)^{g_1}}{r^{g_1} 4^g 6^{g_0} g_0! g_1!}.$$

Ce qui mène au corollaire 2.16. Observons que $S_1(\alpha) = \frac{1}{6} \sum_i (\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)$, et la constante $c(g, a)$ peut donc également être exprimée comme

$$\frac{1}{24^g} \sum_{g_0+g_1=g} \frac{1}{r^{g_1} g_0! g_1!} \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2).$$

Les cas particuliers s'obtiennent de la manière suivante : en ce qui concerne les involutions à k cycles, $\alpha = 2^k$, $r = \ell = k$, $p = k(m - 2) + 1 - 2g$, et $S_1(\alpha) = 0$, ce qui donne :

$$c_{(1^p 2^k)^m}^{(2k+p)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(km)^{km-1+3g}}{k^m 24^g g!}.$$

En ce qui concerne les k -cycles, le résultat est immédiat. Par exemple, pour $k = 3$, $\alpha = 3$, $r = 2$, et $\ell = 1$, ce qui donne plus précisément :

$$c_{(1^p 3)^m}^{(3+p)} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2m)^{m-1+3g}}{24^g} \sum_{g_0=0}^g \frac{1}{g_0!(g-g_0)!} \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2m)^{m-1+3g}}{12^g g!}.$$

— o —

2.5.2 Grands facteurs

Fixons maintenant m , et faisons tendre les parts non triviales vers l'infini homothétiquement. Pour cela, choisissons m partitions $\alpha_i = 1^{a_{i,1}} 2^{a_{i,2}} \dots k^{a_{i,k}}$ de poids respectifs n_i . On notera $x \cdot \alpha_i$ la partition $x^{a_{i,1}} (2x)^{a_{i,2}} \dots (kx)^{a_{i,k}}$. Considérons le nombre de factorisations de genre g en

permutations de types cycliques réduits respectifs $x \cdot \alpha_1, \dots, x \cdot \alpha_m$, et faisons tendre x vers l'infini. Selon la relation de genre, ces permutations doivent posséder des points fixes supplémentaires pour que le nombre total d'éléments sur lesquels elles agissent vérifie l'égalité :

$$n = \sum_{i=1}^m r(x \cdot \alpha_i) + 1 - 2g,$$

où $r(x \cdot \alpha_i) = xn_i - \ell_i$. Donc, en notant $n_0 = n_1 + \dots + n_m$ et $\ell_0 = \ell_1 + \dots + \ell_m$, n doit vérifier :

$$n = xn_0 - \ell_0 + 1 - 2g.$$

Considérons tout d'abord le comportement des polynômes $S_g(x \cdot \beta)$ pour une partition β et un entier g donnés : les points fixes de $x \cdot \beta$ n'entrent pas en ligne de compte, et donc :

$$S_g(x \cdot \beta) = \sum_{p_1 + \dots + p_\ell = g} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{x\beta_j} \binom{x\beta_j}{2p_j + 1} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{2g} s_g(\beta),$$

où

$$s_g(\beta) = \sum_{p_1 + \dots + p_\ell = g} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\beta_j^{2p_j}}{(2p_j + 1)!}.$$

Intéressons-nous maintenant à $P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g})$: puisque, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $r(x \cdot \alpha_i) \sim xn_i$, la contribution est à nouveau dominée par le terme de plus haut degré $\mathcal{D}(e_{3g_0})/g_0!$.

$$\begin{aligned} g_0! P_{g_0}(\mathbf{r} - 2\mathbf{g}) &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} (\mathcal{D}(e_{3g_0}))(xn_1, \dots, xn_m) \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e_{3g_0}(xn_1, \dots, xn_m) \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{3g_0} e_{3g_0}(n_1, \dots, n_m). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit p_i le nombre de points fixes nécessaires pour α_i . Alors $p_i = n - xn_i \sim x(n_0 - n_i)$, et

$$\frac{(\ell(x \cdot \alpha_i) + 2g_i - 1)!}{\text{Aut}(x \cdot \alpha_i)} = \frac{(p_i + \ell_i + 2g_i - 1)!}{p_i! \text{Aut}(\alpha_i)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p_i^{\ell_i + 2g_i - 1}}{\text{Aut}(\alpha_i)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\frac{2^{2g}}{n^{m-1}} \cdot c_{x \cdot \alpha_1, \dots, x \cdot \alpha_m}^{(n)} \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{g_0 + \dots + g_m = g} \frac{x^{3g_0} e_{3g_0}(n_1, \dots, n_m)}{g_0!} \prod_{i=1}^m \frac{[x(n_0 - n_i)]^{\ell_i + 2g_i - 1}}{\text{Aut}(\alpha_i)} x^{2g_i} s_{g_i}(\alpha_i). \end{aligned}$$

Ceci mène au corollaire 2.17, puisque le terme dominant est obtenu pour $g_0 = 0$:

$$c_{x \cdot \alpha_1, \dots, x \cdot \alpha_m}^{(n)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n_0^{m-1}}{2^{2g}} \sum_{g_1 + \dots + g_m = g} \prod_{i=1}^m \frac{(n_0 - n_i)^{\ell_i + 2g_i - 1} s_{g_i}(\alpha_i)}{\text{Aut}(\alpha_i)} \right) \cdot x^{\ell_0 + 4g - 1}.$$

2.6 Premières valeurs

Premières valeurs prises par les polynômes S_g (*i.e.* pour des petites valeurs de g) :

$$\begin{aligned} S_0(x_1, \dots, x_\ell) &= 1, \\ S_1(x_1, \dots, x_\ell) &= \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{\ell} (x_i - 1)_2, \\ S_2(x_1, \dots, x_\ell) &= \frac{1}{5!} \sum_{i=1}^{\ell} (x_i - 1)_4 + \frac{1}{(3!)^2} \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} (x_i - 1)_2 (x_j - 1)_2. \end{aligned}$$

Premières valeurs de P_g :

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= \mathcal{D}(e_3) = \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}, \\ P_2 &= \mathcal{D}(e_5) + \frac{1}{2} \mathcal{D}(e_{3^2}), \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_5} x_{i_1} \cdots x_{i_5} + \frac{1}{2} \mathcal{D} \left(\left(\sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \right)^2 \right), \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_5} x_{i_1} \cdots x_{i_5} + 10 \sum_{j_1 < \dots < j_6} x_{j_1} \cdots x_{j_6} + 3 \sum_{i, j_1 < \dots < j_4} (x_i)_2 x_{j_1} \cdots x_{j_4} \\ &\quad + \sum_{i_1 < i_2, j_1 < j_2} (x_{i_1})_2 (x_{i_2})_2 x_{j_1} x_{j_2} + \frac{1}{2} \sum_{i_1 < i_2 < i_3} (x_{i_1})_2 (x_{i_2})_2 (x_{i_3})_2. \end{aligned}$$

Le cas suivant immédiatement celui de la formule obtenue par A. Goupil et G. Schaeffer, c'est-à-dire le cas $m = 3$, s'écrit :

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{(n)} = \frac{n^2}{2^{2g}} \prod_{i=1}^3 \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)} \cdot \sum_{g_0 + \dots + g_3 = g} \frac{1}{g_0!} \prod_{i=1}^3 (r_i - 2g_i)_{g_0} \ell_i^{(2g_i)} S_{g_i}(\alpha_i).$$

Pour $g = 1$, cela se simplifie de la façon suivante :

$$\frac{n^2}{4} \prod_{i=1}^3 \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)} \cdot \left(r_1 r_2 r_3 + \sum_{i=1}^3 \ell_i (\ell_i + 1) S_1(\alpha_i) \right)$$

avec $\ell_1 = r_2 + r_3 - 1$ et $r_i = r(\overline{\alpha_i})$; le terme correctif est donc un polynôme de degré 4 en les parts de $\overline{\alpha_i}$.

Pour $g = 2$, on obtient, avec $\ell_1 = r_2 + r_3 - 3$,

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{16} \prod_{i=1}^3 \frac{(\ell_i - 1)!}{\text{Aut}(\alpha_i)} \cdot \left(\frac{1}{2} (r_1)_2 (r_2)_2 (r_3)_2 + r_1 r_2 r_3 \sum_{i=1}^3 \ell_i^{(2)} S_1(\alpha_i) \frac{r_i - 2}{r_i} \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \ell_i^{(2)} \ell_j^{(2)} S_1(\alpha_i) S_1(\alpha_j) + \sum_{i=1}^3 \ell_i^{(4)} S_2(\alpha_i) \right). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Liens entre cartes et factorisations dans d'autres groupes

Le but de ce chapitre est d'étendre le lien entre constellations et factorisations transitives dans \mathfrak{S}_n (évoqué à la section 1.6) à d'autres groupes G_n , moyennant l'ajout de *signes* sur les arêtes des constellations. Nous obtenons ainsi une démonstration combinatoire et constructive d'une formule reliant le nombre de factorisations d'un élément quelconque de G_n au nombre de factorisations d'un élément de \mathfrak{S}_n qui lui est naturellement associé. Ces résultats ont été obtenus avec Cedric Chauve et Alain Goupil [30].



3.1 Le groupe des permutations signées

Définitions et notations Nous introduisons ici le groupe des permutations *signées*, dans lequel nous souhaitons étudier les factorisations transitives comme dans le groupe \mathfrak{S}_n .

DÉFINITION 3.1 Une *permutation signée* d'ordre n est une permutation σ des éléments de l'ensemble $[-n, n]^* = [-n, -1] \cup [1, n]$ telle que

$$\forall i \in [1, n], \quad \sigma(-i) = -\sigma(i). \quad (3.1)$$

On note \mathcal{B}_n le groupe des permutations signées d'ordre n , également appelé *n -ième groupe hyperoctaédral*.

NOTATION 3.2 Pour tout élément x de l'ensemble $[-n, n]^*$, on note respectivement $|x|$ et $\zeta(x)$ sa valeur absolue et son signe.

Comme sous-groupe de $\mathfrak{S}([-n, n]^*)$, \mathcal{B}_n agit naturellement sur $[-n, n]^*$, mais la propriété 3.1 permet de définir également une action (à gauche) sur $[1, n]$ de la façon suivante :

$$\forall \sigma \in \mathcal{B}_n, \quad \forall i \in [1, n], \quad \sigma \cdot i = |\sigma(i)|.$$

DÉFINITION 3.3 Soit σ un élément de \mathcal{B}_n . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on représente simultanément les orbites de i et de $-i$ (éventuellement confondues) par le *cycle de i dans σ* $\gamma(i, \sigma) = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_\ell)$ défini par $\gamma_1 = \sigma(i)$ et, pour tout $j > 1$, $\gamma_{j+1} = \sigma(|\gamma_j|)$. En particulier, $|\gamma_\ell| = i$; $\zeta(\gamma_\ell)$ est appelé *signe de i dans σ* et noté $\zeta(i, \sigma)$.

On appelle *représentation cyclique* d'un élément σ de \mathcal{B}_n sa représentation comme produit (commutatif) de ses cycles disjoints.

On appelle *permutation sous-jacente* d'un élément σ de \mathcal{B}_n l'élément de \mathfrak{S}_n dont la représentation cyclique s'obtient à partir de celle de σ en remplaçant chaque élément i par $|i|$.

EXEMPLE 3.1 La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -3 & 2 & -5 & -4 & 1 & 3 & -2 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ admet pour représentation cyclique

$$\sigma = (1 \ -3 \ -5) (2) (-4).$$

DÉFINITION 3.4 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle *signe d'un cycle γ de σ* le produit des signes de ses éléments, noté $\zeta(\gamma)$: si $\gamma = (\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_\ell)$, alors $\zeta(\gamma) = \zeta(\gamma_1)\zeta(\gamma_2)\dots\zeta(\gamma_\ell)$. Le *signe de la permutation σ* est alors le produit des signes de ses cycles disjoints, noté $\zeta(\sigma)$, ou encore, de façon équivalente, le produit des signes des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans σ :

$$\zeta(\sigma) = \prod_{i=1}^n \zeta(i, \sigma).$$

Une permutation signée est dite *positive* ou *négative*¹ en fonction de son signe.

Remarquons qu'un cycle positif de longueur ℓ correspond, au sens des permutations « classiques » de l'ensemble $\llbracket -n, n \rrbracket^*$, à deux cycles de longueur ℓ , tandis qu'un cycle négatif de même longueur correspond à un unique cycle de longueur 2ℓ : le cycle d'un élément i quelconque est négatif si et seulement si $-i$ appartient à l'orbite de i sous σ .

EXEMPLE 3.2 La permutation signée de l'exemple 3.1 a deux cycles positifs et un cycle négatif, et est donc négative. Le cycle signé positif $(1 \ -3 \ -5)$ représente la paire de cycles non signés $(1 \ -3 \ -5)(-1 \ 3 \ 5)$, tandis que le cycle signé négatif (-4) représente le cycle non signé $(4 \ -4)$.

— o —

Description des classes de conjugaison La notion de type cyclique d'une permutation de \mathfrak{S}_n peut être raffinée pour s'adapter au cas des permutations signées.

DÉFINITION 3.5 On appelle *type cyclique* d'un élément σ de \mathcal{B}_n le couple de partitions (λ^+, λ^-) de poids cumulé n décrivant respectivement la répartition des longueurs des cycles positifs et négatifs de σ .

¹On rencontre également la terminologie *paire* ou *impaire*, que nous n'emploierons pas, pour éviter la confusion possible avec la notion de parité d'une permutation liée à sa signature.

NOTATION 3.6 Étant donné deux partitions λ et μ , on note $\lambda + \mu$ la partition de poids $|\lambda| + |\mu|$ dont l'ensemble des parts est l'union (disjointe) des ensembles de parts de λ et μ . On dit alors que le couple (λ, μ) est une *décomposition* de la partition $\lambda + \mu$, et que $\lambda + \mu$ est la *partition sous-jacente* de (λ, μ) .

On obtient ainsi une description des classes de conjugaison du groupe \mathcal{B}_n (voir par exemple [78, chapitre 4]) :

PROPOSITION 3.1 *Les classes de conjugaison de \mathcal{B}_n sont constituées des permutations signées de même type cyclique. Elles sont donc indexées par les couples de partitions (λ^+, λ^-) dont la somme est une partition de n .*

NOTATION 3.7 Si $\vec{\lambda} = (\lambda^+, \lambda^-)$, on note $\mathcal{C}_{\vec{\lambda}}$ la classe de conjugaison de \mathcal{B}_n formée des permutations signées de type cyclique $\vec{\lambda}$.

Étant donné un entier $m \geq 1$, $m + 1$ décompositions de partitions de poids $n, \vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_m$ et $\vec{\mu}$, et une permutation signée π de type cyclique $\vec{\mu}$, on note

$$c_{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_m}^{\vec{\mu}}$$

le nombre de factorisations *transitives* de π appartenant à $\mathcal{C}_{\vec{\lambda}_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{\vec{\lambda}_m}$, i.e. de m -uplets

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathcal{C}_{\vec{\lambda}_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{\vec{\lambda}_m}$$

tels que $\sigma_m \dots \sigma_1 = \pi$, et que le groupe $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ agisse transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

— o —

3.2 Représentation par des constellations signées

Nous définissons ici une famille d'objets que nous appelons *constellations signées*, et qui jouent vis-à-vis des factorisations transitives dans le groupe \mathcal{B}_n un rôle analogue à celui des constellations définies à la section 1.6 vis-à-vis des factorisations transitives dans \mathfrak{S}_n .

DÉFINITION 3.8 Soit $m \geq 2$ et $g \geq 0$. Une *m -constellation signée* (enracinée) de genre g à n polygones est une m -constellation (enracinée) de genre g à n polygones dont chacune des mn arêtes porte un signe $+$ ou $-$. Une telle m -constellation signée est dite *numérotée* si ses polygones sont numérotés de 1 à n , et on définit l'*étiquetage canonique* d'une m -constellation signée enracinée comme celui de la m -constellation enracinée sous-jacente.

NOTATION 3.9 Le signe d'une arête e d'une constellation signée \mathcal{C} est noté $\zeta(e, \mathcal{C})$.

La proposition suivante se prouve de manière analogue à la proposition 1.11 :

PROPOSITION 3.2 *Soit $n \geq 1$ et $m \geq 2$; il existe une bijection entre l'ensemble des m -uplets $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ d'éléments de \mathcal{B}_n tel que $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle$ agit transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et l'ensemble des*

m-constellations signées enracinées à *n* polygones numérotés de 1 à *n*, le polygone racine étant numéroté 1. Le signe de l'unique arête $a_j(i)$ canoniquement étiquetée $(j, j + 1)$ bordant le polygone numéroté *i* correspond au signe de *i* dans la permutation σ_j .

NOTATION 3.10 Étant donné une constellation numérotée, on désigne par $s_j(i)$ le sommet incident au polygone *i* canoniquement étiqueté *j*, et par $a_j(i)$ l'arête reliant $s_j(i)$ et $s_{j+1}(i)$.

EXEMPLE 3.3 La figure 3.1 représente la 2-constellation plane associée au couple de permutations signées $\sigma_1 = (-1 -5 8) (-2) (3) (4) (6) (-7)$ (sommets noirs et arêtes en trait plein) et $\sigma_2 = (1) (2 3 4 -5) (-6 7 -8)$ (sommets blancs et arêtes pointillées). Les arêtes positives sont représentées en trait fin et les négatives en trait épais.

Alors la permutation $\sigma_2\sigma_1 = (1 -2 -3 4 -5 -6 7 8)$ se lit sur la constellation \mathcal{C} de la façon suivante : soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, *j* tel que $a_1(j)$ suive immédiatement $a_2(i)$ autour de la face blanche, et *k* tel que $a_2(k)$ suive immédiatement $a_1(j)$. Alors $\sigma_2\sigma_1(i) = \zeta(e_2(k), \mathcal{C})\zeta(e_1(j), \mathcal{C}) \cdot k$.

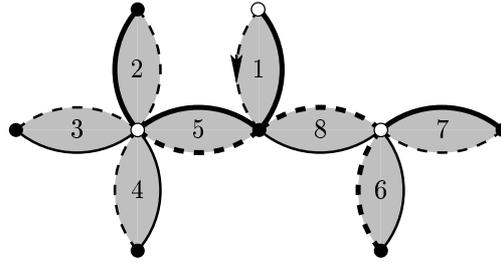


FIGURE 3.1 – Un 2-cactus signé numéroté plane.



3.3 Cas des factorisations de *n*-cycles signés en deux facteurs

Considérons dans un premier temps les factorisations de *n*-cycles de \mathcal{B}_n , c'est-à-dire des éléments de \mathcal{B}_n dont la permutation sous-jacente est un *n*-cycle de \mathfrak{S}_n . Ces éléments agissant transitivement sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, leurs factorisations sont nécessairement transitives et correspondent donc toutes à des constellations signées.

DÉFINITION 3.11 On appelle *n*-cycle signé canonique tout élément γ de \mathcal{B}_n tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\gamma(i)| = i + 1$.

Dans la suite, pour toute décomposition $\vec{\lambda} = (\lambda^+, \lambda^-)$, λ désigne la partition sous-jacente.



Un résultat énumératif simple Pour toute décomposition $\vec{\nu}$ de la partition (n) , les coefficients $c_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}}^{\vec{\nu}}$ s'expriment de façon extrêmement simple en fonction de $c_{\lambda, \mu}^{(n)}$:

THÉORÈME 3.1 Soit n un entier strictement positif, $\lambda = 1^{\ell_1} \dots n^{\ell_n}$ et $\mu = 1^{m_1} \dots n^{m_n}$ deux partitions de n , et g le genre du triplet $(\lambda, \mu, (n))$.

Soit $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ trois décompositions de λ , μ et (n) respectivement, telles que $\lambda^+ = 1^{\ell_1^+} \dots n^{\ell_n^+}$, $\lambda^- = 1^{\ell_1^-} \dots n^{\ell_n^-}$, $\mu^+ = 1^{m_1^+} \dots n^{m_n^+}$ et $\mu^- = 1^{m_1^-} \dots n^{m_n^-}$. Alors :

$$c_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}}^{\vec{\nu}} = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^n \binom{\ell_i}{\ell_i^+} \binom{m_i}{m_i^+} \right] 2^{2g} \cdot c_{\lambda, \mu}^{(n)} & \text{si } \zeta(\vec{\nu}) = \zeta(\vec{\lambda})\zeta(\vec{\mu}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce théorème peut être démontré par des calculs assez simples sur les cardinaux des classes de conjugaison. Notre but ici est d'en donner une autre preuve, combinatoire et constructive, en montrant le fait suivant : soit $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_n$; étant donné

- deux permutations σ et τ de \mathfrak{S}_n de types cycliques respectifs λ et μ , et telles que $\sigma\tau = \gamma$,
- un n -cycle signé canonique $\vec{\gamma}$, de type $\vec{\nu}$,
- deux décompositions $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$ de λ et μ compatibles avec $\vec{\nu}$, i.e. telles que $\zeta(\vec{\lambda})\zeta(\vec{\mu}) = \zeta(\vec{\nu})$,

le nombre de façons de signer les éléments de σ et de τ selon les types cycliques $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$ de telle sorte que le produit $\vec{\sigma}\vec{\tau}$ des permutations signées obtenues soit égal à $\vec{\gamma}$ est :

$$\left[\prod_{i=1}^n \binom{\ell_i}{\ell_i^+} \binom{m_i}{m_i^+} \right] 2^{2g}.$$

Remarquons que le cas de nullité du théorème 3.1 découle immédiatement de la description des classes de conjugaison de \mathcal{B}_n : un prérequis pour que deux éléments d'un groupe soient égaux est leur appartenance à une même classe de conjugaison.

EXEMPLE 3.4 Soit $\sigma = (1 \ 5) (2 \ 6) (4 \ 7) (3 \ 8)$, $\tau = (1 \ 6 \ 4) (2 \ 8 \ 5) (3 \ 7)$, $\vec{\gamma} = (1 \ -2 \ 3 \ 4 \ 5 \ -6 \ 7 \ 8)$, $\vec{\lambda} = ((2, 2, 2, 2), \emptyset)$ et $\vec{\mu} = ((3, 3, 2), \emptyset)$.

Nous cherchons des permutations signées $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ dont tous les cycles sont positifs, dont les permutations sous-jacentes sont σ et τ , et telles que $\vec{\sigma}\vec{\tau} = \vec{\gamma}$. Alors $g = 1$, et il existe quatre manières d'assigner un nombre pair de signes négatifs dans chacun des cycles de σ et τ pour obtenir une factorisation de $\vec{\gamma}$:

- $\vec{\sigma} = (1 \ 5) (-2 \ -6) (4 \ 7) (3 \ 8)$ et $\vec{\tau} = (1 \ 6 \ 4) (2 \ 8 \ 5) (3 \ 7)$,
- $\vec{\sigma} = (-1 \ -5) (2 \ 6) (4 \ 7) (3 \ 8)$ et $\vec{\tau} = (-1 \ -6 \ 4) (-2 \ 8 \ -5) (3 \ 7)$,
- $\vec{\sigma} = (1 \ 5) (2 \ 6) (-4 \ -7) (-3 \ -8)$ et $\vec{\tau} = (1 \ -6 \ -4) (-2 \ -8 \ 5) (-3 \ -7)$,
- $\vec{\sigma} = (-1 \ -5) (-2 \ -6) (-4 \ -7) (-3 \ -8)$ et $\vec{\tau} = (-1 \ 6 \ -4) (2 \ -8 \ -5) (-3 \ -7)$.

En revanche, il est impossible de signer les éléments de σ et τ selon $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ pour obtenir une factorisation de $(1 \ -2 \ -3 \ 4 \ 5 \ -6 \ 7 \ 8)$.

— o —

Cas planaire Dans le cas d'une factorisation minimale d'un n -cycle, autrement dit dans le cas où le 2-cactus associé est de genre 0, le théorème 3.1 affirme que le nombre de factorisations d'un n -cycle signé canonique $\vec{\gamma}$ en deux permutations de types cycliques respectifs $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$ et de permutations sous-jacentes σ et τ est exactement égal au nombre de façons de répartir les signes

des cycles selon $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$, à condition que $\zeta(\vec{\lambda})\zeta(\vec{\mu}) = \zeta(\vec{\gamma})$. L'algorithme suivant permet, pour une telle répartition cohérente de signes sur les sommets et les polygones d'un cactus planaire, de construire l'unique répartition satisfaisante de signes sur les arêtes.

ALGORITHME 3.1 :

- **entrée** : un 2-cactus planaire \mathcal{C} numéroté, une partition des polygones en deux ensembles \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- , une partition des sommets de \mathcal{C} en deux ensembles \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- ;
- **sortie** : une partition de l'ensemble des arêtes de \mathcal{C} en deux sous-ensembles \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- .

Tant que toutes les arêtes ne sont pas signées, parcourir la face blanche de \mathcal{C} en sens direct jusqu'à la première arête a non signée. Soit i le polygone auquel elle est incidente.

1. Si $a = a_1(i)$, et s'il s'agit de la dernière arête étiquetée $(1, 2)$ non signée incidente à $s_1(i)$,
 - $\zeta(a_1(i), \mathcal{C})$ est imposé par la condition sur $\zeta(s_1(i), \mathcal{C})$,
 - le signe de l'arête $a_2(j)$ qui suit immédiatement $a_1(i)$ autour de la face blanche est donné par l'égalité $\zeta(a_1(i), \mathcal{C})\zeta(a_2(j), \mathcal{C}) = \zeta(j, \mathcal{C})$.
 2. Si $a = a_2(i)$, et s'il s'agit de la dernière arête étiquetée $(2, 1)$ non signée incidente à $s_2(i)$,
 - $\zeta(a_2(i), \mathcal{C})$ est imposé par la condition sur $\zeta(s_2(i), \mathcal{C})$,
 - le signe de l'arête $a_1(j)$ qui précède immédiatement $a_2(i)$ autour de la face blanche est donné par l'égalité $\zeta(a_1(j), \mathcal{C})\zeta(a_2(i), \mathcal{C}) = \zeta(i, \mathcal{C})$.
-

Les lemmes suivants se démontrent assez simplement, et permettent d'obtenir le théorème 3.1 dans le cas d'un cactus planaire :

LEMME 3.3 *L'algorithme 1 termine : tant que toutes les arêtes ne sont pas signées, il existe une arête non signée incidente à un sommet dont toutes les autres arêtes sont signées.*

DÉMONSTRATION. La démonstration repose sur la notion de *profondeur* d'un sommet s de \mathcal{C} , définie récursivement comme suit : les sommets incidents à un unique polygone de $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ sont de profondeur 0, et, pour tout $i \geq 1$, les sommets de profondeur i sont les sommets incidents à un unique polygone du cactus \mathcal{C}_i obtenu à partir de \mathcal{C}_{i-1} en supprimant les sommets de profondeur $i-1$ ainsi que les polygones qui y sont incidents. Les arêtes dont les extrémités sont de profondeur inférieure à i sont traitées après au plus $i+1$ passages. \square

LEMME 3.4 *Soit $c = (a_1(i), a_2(j))$ un couple d'arêtes consécutives ; alors seule l'une des deux règles peut être appliquée à c , sauf s'il s'agit de la dernière paire signée par l'algorithme. Les signes donnés par les deux règles sont alors cohérents si et seulement si l'entrée vérifie la condition de cohérence $\zeta(\vec{\lambda})\zeta(\vec{\mu}) = \zeta(\vec{\gamma})$.*

LEMME 3.5 *L'algorithme 1 fournit l'unique attribution de signes aux arêtes de \mathcal{C} cohérente avec son entrée.*

Extension en genre g quelconque Dans le cas d'un cactus \mathcal{C} de genre g non nul, les conditions de signes sur les sommets et les polygones ne sont pas suffisantes pour déterminer les signes de toutes les arêtes de \mathcal{C} . Il faut donc imposer certains signes d'arêtes, ce qui permet d'interpréter le facteur 2^{2g} . Or, de même qu'une carte à une face de genre g peut être décomposée en un arbre couvrant et $2g$ arêtes, \mathcal{C} peut être décomposé en un sous-cactus planaire couvrant (au sens où son ensemble de sommets est celui de \mathcal{C}) et $2g$ polygones P_1, \dots, P_{2g} . Considérons donc l'algorithme suivant :

ALGORITHME 3.2 :

- **entrée** : un 2-cactus \mathcal{C} numéroté de genre g , une partition des polygones en deux ensembles \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- , une partition des sommets de \mathcal{C} en deux ensembles \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- ;
 - **sortie** : une liste de 2^{2g} partitions de l'ensemble des arêtes de \mathcal{C} en deux sous-ensembles \mathcal{A}^+ et \mathcal{A}^- .
1. Soit $\{P_1, \dots, P_{2g}\}$ un ensemble arbitrairement choisi de $2g$ polygones de \mathcal{C} dont le complémentaire forme un sous-cactus planaire de \mathcal{C} .
 2. Pour chaque $2g$ -uplet de signes (ξ_1, \dots, ξ_{2g}) , effectuer les opérations suivantes :
 - (a) pour tout $i \in \llbracket 1, 2g \rrbracket$, attribuer le signe ξ_i à l'arête $a_2(P_i)$, et le signe $\zeta(P_i, \mathcal{C})/\xi_i$ à l'arête précédente;
 - (b) tant que toutes les arêtes ne sont pas signées, parcourir la face blanche de \mathcal{C} en sens direct jusqu'à la première arête a non signée et signer le couple d'arêtes correspondant comme lors de l'algorithme 1.
-

Les lemmes suivants sont simples à démontrer et permettent d'obtenir le théorème 3.1 dans le cas d'un cactus de genre quelconque :

LEMME 3.6 *L'étape 2.(b) de l'algorithme 2 termine pour tout $2g$ -uplet de signes. D'autre part, comme pour l'algorithme 1, les deux règles d'attribution de signes aux couples d'arêtes n'entrent en concurrence que pour le dernier couple considéré, et sont alors cohérentes si et seulement si l'entrée de l'algorithme est cohérente.*

LEMME 3.7 *L'étape 2.(b) de l'algorithme 2 calcule l'unique attribution de signes aux arêtes de \mathcal{C} cohérente avec l'entrée et telle que $\zeta(a_2(P_i), \mathcal{C}) = \xi_i$. L'étape 2. de l'algorithme calcule donc les 2^{2g} attributions de signes distinctes et cohérentes. En particulier, le résultat de l'algorithme est indépendant du choix arbitraire effectué à l'étape 1.*

— o —

3.4 Généralisations

On peut envisager de généraliser le résultat obtenu à la section précédente dans plusieurs directions différentes : nous avons en effet imposé des restrictions fortes au type cyclique de la permutation produit (non signée) ainsi qu'au nombre de facteurs ; d'autre part, nous avons considéré

le groupe des permutations signées, qui est en fait un cas particulier de produit en couronne du groupe symétrique.



Factorisations d'une permutation de type cyclique quelconque La construction présentée au paragraphe précédent pour traiter le cas d'une factorisation de grand cycle de genre quelconque s'étend immédiatement aux factorisations *transitives* de permutations quelconques, c'est-à-dire aux 2-constellations quelconques. En effet, une 2-constellation à $f + 1$ faces blanches peut être décomposée en un 2-cactus planaire couvrant et un ensemble de $2g + f$ polygones. On obtient alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2 *Soit n un entier strictement positif, $\alpha = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$, $\beta = 1^{b_1} \dots n^{b_n}$ et γ trois partitions de n , et g le genre du triplet (α, β, γ) .*

Soit $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ trois décompositions de α , β et γ respectivement, telles que $\alpha^+ = 1^{a_1^+} \dots n^{a_n^+}$, $\alpha^- = 1^{a_1^-} \dots n^{a_n^-}$, $\beta^+ = 1^{b_1^+} \dots n^{b_n^+}$ et $\beta^- = 1^{b_1^-} \dots n^{b_n^-}$. Alors :

$$c_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}^{\vec{\gamma}} = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^n \binom{a_i}{a_i^+} \binom{b_i}{b_i^+} \right] 2^{2g+\ell(\gamma)-1} \cdot c_{\alpha, \beta}^{\gamma} & \text{si } \zeta(\vec{\gamma}) = \zeta(\vec{\alpha})\zeta(\vec{\beta}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Produit en couronne de \mathfrak{S}_n par un groupe abélien quelconque Le groupe \mathcal{B}_n est en fait isomorphe au n -ième groupe monomial complet de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, autrement dit au produit en couronne de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec \mathfrak{S}_n :

$$\mathcal{B}_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \int \mathfrak{S}_n.$$

Plus généralement, pour tout groupe multiplicatif G , le produit en couronne $G \int \mathfrak{S}_n$ peut être vu de la manière suivante [78] : soit G_n l'ensemble $G \times \llbracket 1, n \rrbracket$; on note \cdot l'opération définie, pour tout $g \in G$ et tout $(h, i) \in G_n$, par

$$g \cdot (h, i) = (gh, i).$$

Alors $G \int \mathfrak{S}_n$ est le groupe formé des permutations σ de l'ensemble G_n telles que, pour tout g dans G et tout (h, i) dans G_n ,

$$\sigma(gh, i) = g \cdot \sigma(h, i).$$

Pour tout élément $x = (g, i)$ de G_n , on note $\zeta(x)$ et $|x|$ son *signe* g et sa *valeur absolue* i . Les éléments de $G \int \mathfrak{S}_n$ possèdent une *représentation cyclique* analogue à celle des permutations signées, ce qui permet de définir pour tout élément σ de $G \int \mathfrak{S}_n$ la *permutation sous-jacente*, le *signe* $\zeta(i, \sigma)$ d'un entier i dans σ , le *signe* $\zeta(\gamma, \sigma)$ d'un cycle γ de σ , ou encore le *signe* de σ . Enfin l'action canonique de $G \int \mathfrak{S}_n$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est définie par :

$$\forall \sigma \in G \int \mathfrak{S}_n, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma \cdot i = |\sigma(e, i)|$$

où e désigne l'élément neutre de G .

Dans la suite, G désigne un groupe *abélien* fini d'ordre k .

Les classes de conjugaison de $G \wr \mathfrak{S}_n$ peuvent dans ce cas être décrites, comme celles de \mathcal{B}_n , en termes de raffinement des classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n : on appelle *type cyclique* de $\sigma \in G \wr \mathfrak{S}_n$ la distribution des longueurs et des signes de ses cycles, qui peut être décrite par un k -uplet de partitions indexé par les éléments de G dont la somme est la partition donnant le type cyclique de la permutation de \mathfrak{S}_n sous-jacente. Alors :

PROPOSITION 3.8 *Soit G un groupe abélien fini. Les classes de conjugaison du groupe $G \wr \mathfrak{S}_n$ sont formées de ses éléments de type cyclique donné, et sont donc indexées par les $|G|$ -décompositions de partitions de n .*

L'ensemble de ce qui a été décrit jusqu'ici s'étend donc aux groupes $G \wr \mathfrak{S}_n$, et on obtient ainsi une preuve constructive du théorème suivant :

THÉORÈME 3.3 *Soit n un entier strictement positif, $\alpha = 1^{a_1} \dots n^{a_n}$, $\beta = 1^{b_1} \dots n^{b_n}$ et γ trois partitions de n , et g le genre du triplet (α, β, γ) .*

Soit G un groupe abélien fini, et soit $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ trois décompositions de α , β et γ respectivement, telles que, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, \vec{a}_i et \vec{b}_i désignent respectivement la répartition des parts de taille i de α et β dans $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$. Alors le nombre de factorisations transitives d'un élément donné de $G \wr \mathfrak{S}_n$ de type cyclique $\vec{\gamma}$ en produit d'un élément de type cyclique $\vec{\alpha}$ et d'un élément de type cyclique $\vec{\beta}$ est donné par :

$$c_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}^{\vec{\gamma}} = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^n \binom{a_i}{\vec{a}_i} \binom{b_i}{\vec{b}_i} \right] |G|^{2g+\ell(\gamma)-1} \cdot c_{\alpha, \beta}^{\gamma} & \text{si } \zeta(\vec{\gamma}) = \zeta(\vec{\alpha})\zeta(\vec{\beta}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— ○ —

Factorisations de longueur quelconque Ce cas, correspondant aux m -constellations, est en cours d'étude : le même type de construction peut très certainement être effectué, mais il reste à préciser quelle propriété doivent vérifier les ensembles d'arêtes pour lesquels le choix des signes peut être effectué de manière arbitraire, et impose ensuite les signes de toutes les autres arêtes.

— ○ —

Chapitre 4

Un opérateur sur les fonctions symétriques

Comme on l'a vu au chapitre 1 (lemme 1.6), l'action d'une transposition par multiplication (à gauche ou à droite indifféremment) sur une permutation peut prendre deux formes : soit fusionner deux cycles de longueur i et j en un cycle de longueur $i + j$, soit scinder un cycle de longueur $i + j$ en deux cycles de longueur respective i et j .

On peut alors envisager de représenter l'action de la classe \mathcal{T} des transpositions sur les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n par l'action d'un opérateur sur des polynômes en les variables p_1, \dots, p_n : on veut trouver un opérateur différentiel $H_{\mathcal{T}}$ tel que

$$\mathcal{T} * \mathcal{C}_{\lambda}|_{\mathcal{C}_{\mu}} = H_{\mathcal{T}} \cdot q_{\lambda}|_{\mathcal{C}_{\mu}}$$

où $q_{\lambda} = \frac{p_{\lambda}}{z_{\lambda}}$ avec $p_{\lambda} = p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_{\ell}}$ si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell})$. En l'occurrence, l'opérateur suivant convient :

$$H_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} p_i p_j \frac{(i+j)\partial}{\partial p_{i+j}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} p_{i+j} \frac{i\partial}{\partial p_i} \frac{j\partial}{\partial p_j}.$$

Ce point de vue, qui est par exemple celui de [56, 59], met en évidence le fait que l'action de \mathcal{T} sur une classe de conjugaison de \mathfrak{S}_n peut être décrite indépendamment de n : c'est le type cyclique *réduit* des éléments de \mathcal{T} qui importe, et non le nombre de points fixes qu'ils possèdent. Dans ce chapitre, nous décrivons un opérateur H_{α} modélisant l'action d'une classe \mathcal{C}_{α} sur les classes de conjugaison, et nous montrons que cet opérateur peut être, comme $H_{\mathcal{T}}$, décrit en termes de partition réduite.

Le texte qui suit reprend celui de [64].

— o —

4.1 Introduction

Notations Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ be a partition of weight n and length $\ell(\lambda) = k$, *i.e.* a finite non increasing sequence of positive integers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ summing up to n . We write

$\lambda \vdash n$ or $|\lambda| = n$ and $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots n^{\ell_n}$ when ℓ_i parts of λ are equal to i ($i = 1 \dots n$) (we shall consistently use greek letters for partitions and their parts and corresponding latin letters for the multiplicity notation). We denote by \mathcal{C}_λ the conjugacy class indexed by the partition λ and by $\lambda(\sigma)$ the cycle-type of a permutation σ . Let $z_\lambda = 1^{\ell_1} \ell_1! 2^{\ell_2} \ell_2! \dots n^{\ell_n} \ell_n!$, so that $|\mathcal{C}_\lambda| = n!/z_\lambda$.

Let $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ be the group algebra of the symmetric group over the rational numbers field \mathbb{Q} , and let \mathcal{Z}_n be the center of this group algebra. The formal sum of the permutations in a conjugacy class \mathcal{C}_λ belongs to \mathcal{Z}_n , and the set $\{K_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ of these formal sums forms a linear basis for the center \mathcal{Z}_n . Similarly, the irreducible characters of the symmetric group \mathfrak{S}_n are indexed by partitions of weight n and can be considered as elements of \mathcal{Z}_n , in which their family $\{\chi^\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ also forms a linear basis. For λ and μ two partitions of n we denote by χ_μ^λ the evaluation of the character χ^λ on any permutation of the class \mathcal{C}_μ . In particular, $\chi_{1^n}^\lambda = n!/h_\lambda$ where h_λ is the hook-length product of λ . The character table $[\chi_\mu^\lambda]$ gives natural formulae for changes of basis in \mathcal{Z}_n : $\chi^\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \chi_\mu^\lambda K_\mu$ and $K_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} (\chi_\mu^\lambda / z_\lambda) \chi^\lambda$.

Partitions are usually represented by their Ferrers's diagrams. The content of a cell $x = (i, j) \in \lambda$ is $c(x) = i - j$. In his conjectures, Katriel introduces the *content power-sums* $\mathfrak{p}_k(\lambda)$ defined for $k > 0$ by $\mathfrak{p}_k(\lambda) = \sum_{x \in \lambda} c(x)^k$ and for $\nu \vdash n$ by $\mathfrak{p}_\nu(\lambda) = \prod_i \mathfrak{p}_{\nu_i}(\lambda)$. These $\mathfrak{p}_k(\lambda)$ are the classical power-sum symmetric functions p_k , evaluated on the alphabet $\{c(x) \mid x \in \lambda\}$.

A partition is *reduced* if it contains no part equal to 1. For $\lambda = 1^{\ell_1} 2^{\ell_2} \dots k^{\ell_k}$, we denote by $\bar{\lambda}$ the reduced partition $2^{\ell_2} \dots k^{\ell_k}$. The reduced cycle-type of a permutation or of a conjugacy class is defined accordingly.



Multiplication by a conjugacy class Let λ be a partition of n . We are interested in the element ω^λ of \mathcal{Z}_n which is defined ([97, p126]) by

$$\forall \rho \vdash n, \quad \omega^\lambda(\rho) = \omega_\rho^\lambda = \frac{h_\lambda}{z_\rho} \chi_\rho^\lambda.$$

These elements are called *central characters* or *eigenvalues* by J. Katriel¹. As the family $\{\chi^\lambda/h_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forms a basis of orthogonal idempotents in \mathcal{Z}_n , we have

$$\forall \rho, \lambda \vdash n, \quad K_\rho \cdot \chi^\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi_\rho^\mu}{z_\mu} (\chi^\mu \cdot \chi^\lambda) = \omega_\rho^\lambda \chi^\lambda,$$

explaining why the evaluation ω_ρ^λ may be called the eigenvalue of the conjugacy class \mathcal{C}_ρ associated to the eigenvector χ^λ . Here we consider K_ρ or \mathcal{C}_ρ as an operator acting on \mathcal{Z}_n by multiplication. The multiplicative structure of \mathcal{Z}_n has been largely studied in terms of *connexion coefficients* [60, and ref. therein], also called *structure constants* [65, and ref. therein]. These coefficients are defined for all triples of partitions (λ, μ, ν) of n by

$$K_\lambda \cdot K_\mu = \sum_{\nu \vdash n} \mathfrak{a}_{\lambda, \mu}^\nu K_\nu.$$

The first set of conjectures that we consider is [86, Conj. 1–2] (see also [83]). In these articles, Katriel suggests that for a fixed integer r , the eigenvalues $\omega_{r1^{n-r}}^\lambda$ are given by evaluations of a

¹For a partition $\rho \vdash n$ and an irreducible representation Γ , indexed by the partition $\gamma \vdash n$, our ω_ρ^γ is denoted λ_ρ^Γ in [86].

polynomial in $\mathbb{Q}[n][p_1, \dots, p_{r-1}]$ on the contents power-sums $\mathfrak{p}_k(\lambda)$. The first values ($r = 2, 3, 4$) were computed by Frobenius himself (1901). Ingram [74] later computed other values of ω_μ^λ . In [84], an algorithm is given, which is used in [89] to produce numerical expressions supporting these conjectures up to $r = 18$. Theorem 4.1 gives an explicit expression for the polynomials considered by Katriel and proves some of their conjectured properties.

In a second set of conjectures, considered in Section 4.3, Katriel looks for expressions of the conjugacy classes as sums of *elementary* operators. He requires that these expressions depend only on the reduced cycle-type. These conjectures were presented at FPSAC'98 [88] and are derived from previous weaker conjectures [85, 87, and ref. therein]. In order to state more easily Katriel's formulae, we use a representation of the action of conjugacy classes on \mathcal{Z}_n by an action of differential operators on the space of symmetric functions. Once stated in this form (theorem 4.2), these conjectures are relatively easy to prove. Our approach is reminiscent of that of Goulden and Jackson (see [60] and reference therein).

Finally in Section 4.4, we consider a third set of conjectures [86, Conj. 3–6], which extend the first ones, from partitions of the form $r1^{n-r}$ to arbitrary partitions ρ . Unlike the case $r1^{n-r}$, we have not found an explicit expression of ω_ρ for arbitrary ρ in terms of the p_i . However we derive from Theorem 4.2 a proof of a weak version of [86, Conj. 4] on the general form of ω_ρ , which implies [86, Conj. 5].

Numerous examples of decompositions of ω_ρ or K_ρ for small ρ are found *e.g.* in [86]. Thus we did not include a large number of examples. We instead provide `Maple` procedures based on our theorems at <http://www.loria.fr/~schaeffe>.

— o —

4.2 Central characters for partitions $r1^{n-r}$

Throughout this section, let r denote a fixed integer. Let the content weight of a partition ν be $w(\nu) = |\nu| + 2\ell(\nu)$.

In order to state our polynomial expression for $\omega_{r1^{n-r}}$, we define two formal power series in the indeterminate Y with polynomial coefficients in n : first,

$$P_j^r(Y, n) = (1+nY)^{-j} + (1+(n+r-1)Y)^{-j} - (1+(n+r)Y)^{-j} - (1+(n-1)Y)^{-j} \quad (4.1)$$

and $P_\nu^r(Y, n) = \prod_i P_{\nu_i}^r(Y, n)$, so that $P_\nu^r(Y, n)$ is the power sum symmetric function p_ν evaluated on the alphabet $-Y_{n+r} - Y_{n-1} + Y_{n+r-1} + Y_n$, where $Y_n = \frac{1}{1+nY}$.

Second,

$$Q^r(Y, n) = \frac{(-1)^r}{r^2} \prod_{i=0}^{r-1} (1+(n+i)Y) \left(\frac{(1+(n+r)Y)(1+(n-1)Y)}{(1+(n+r-1)Y)(1+nY)} \right)^n. \quad (4.2)$$

Finally, let $Q_i^r(n)$ be the coefficient of Y^i in $Q^r(Y, n)$ and $P_{\nu,i}^r(n)$ the coefficient of $Y^{2\ell(\nu)+i}$ in $P_\nu^r(Y, n)$. The polynomials $Q_i^r(n)$ and $P_{\nu,i}^r(n)$ have respective degree $i-1$ and i . With these notations, let $\Omega_r \in \mathbb{Q}[n][p_1, \dots, p_{r-1}]$ be the polynomial:

$$\Omega_r(n, p_1, \dots, p_{r-1}) = \sum_{\substack{k, \nu \\ k+w(\nu)=r+1}} \frac{(-1)^{|\nu|} p_\nu}{z_\nu} \sum_{i+j=k} Q_i^r(n) P_{\nu,j}^r(n).$$

We shall prove the following theorem.

THEOREM 4.1 (PART OF [86, CONJ. 1]) *For $n \geq r$, and for all partitions λ of n ,*

$$\omega_{r1^{n-r}}^\lambda = \Omega_r(n, \mathbf{p}_1(\lambda), \dots, \mathbf{p}_{r-1}(\lambda)).$$

Moreover, for $n < r$, and all partitions λ of n , $\Omega_r(n, \mathbf{p}_1(\lambda), \dots, \mathbf{p}_{r-1}(\lambda)) = 0$.

COROLLARY 4.1 (SEE [86, CONJ. 2]) *The coefficient of p_{r-1} in Ω_r is 1.*

Although we have an explicit form for the inner sum in the definition of Ω_r , we have been unable to prove the following cancellations :

CONJECTURE 4.1 (REMAINING FROM [86, CONJ. 1]) *In the above definition of Ω_r , the inner sum, which is a polynomial in $\mathbb{Q}[n]$ of degree at most k , is null if k is odd, and of degree $k/2$ if k is even.*

PROOF. Let us borrow the following result from [74] (reproduced in [97, p118]). Let $\rho = r1^{n-r}$, λ be a partition of n , μ be its shifted partition $\mu_i = \lambda_i + n - i$ for $1 \leq i \leq n$ and $\varphi(X) = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i)$. Then

$$\omega_{r1^{n-r}}^\lambda = \frac{h_\lambda}{z_{r1^{n-r}}} \chi_\rho^\lambda = \frac{-1}{r^2} \sum_{i=1}^n \mu_i (\mu_i - 1) \dots (\mu_i - r + 1) \frac{\varphi(\mu_i - r)}{\varphi'(\mu_i)}, \quad (4.3)$$

which is also the coefficient of X^{-1} in the expansion of

$$\frac{-1}{r^2} X(X-1) \dots (X-r+1) \frac{\varphi(X-r)}{\varphi(X)}$$

in descending powers of X . Changing the sign of X , the latter expression can be explicitly written as

$$\frac{(-1)^r}{r^2} \prod_{i=0}^{r-1} (X+n+i) \prod_{i=1}^n \frac{X+r+\mu_i}{X+r+n-i} \prod_{i=1}^n \frac{X+n-i}{X+\mu_i}. \quad (4.4)$$

Recall now that the content polynomial $c_\lambda(X)$ of the partition λ is the polynomial in the indeterminate X defined ([97, p15]) by

$$c_\lambda(X) = \prod_{x \in \lambda} (X + c(x)).$$

From [97, p. 15], for $\xi_i = \lambda_i + m - i$, $1 \leq i \leq m$, we have

$$\frac{c_\lambda(X+m)}{c_\lambda(X+m-1)} = \prod_{i=1}^m \frac{X+\xi_i}{X+m-i}.$$

On the one hand, if we take $m = n$, we get $\xi_i = \mu_i$ for $1 \leq i \leq n$. On the other hand, if $m = n+r$, then $\xi_i = r + \mu_i$ for $1 \leq i \leq n$ and $\xi_{n+i} = r - i$ for $0 \leq i < r$. Therefore expression (4.4) can be rewritten as

$$\frac{(-1)^r}{r^2} \prod_{i=0}^{r-1} (X+n+i) \frac{c_\lambda(X+n+r)}{c_\lambda(X+n+r-1)} \frac{c_\lambda(X+n-1)}{c_\lambda(X+n)} \quad (4.5)$$

Upon setting $X = 1/Y$, we obtain $\omega_{r1^{n-r}}^\lambda$ as a coefficient in a Taylor expansion :

$$\omega_{r1^{n-r}}^\lambda = [Y^{r+1}]Q^r(Y, n) \cdot L_\lambda^r(Y, n) \quad (4.6)$$

where $Q^r(Y, n)$ is given by formula (4.2) and

$$\begin{aligned} L_\lambda^r(Y, n) &= \prod_{x \in \lambda} \frac{\left(1 + \frac{c(x)}{1+(n+r)Y}Y\right) \left(1 + \frac{c(x)}{1+(n-1)Y}Y\right)}{\left(1 + \frac{c(x)}{1+(n+r-1)Y}Y\right) \left(1 + \frac{c(x)}{1+nY}Y\right)} \\ &= \Lambda_Y(X_{n+r} + X_{n-1} - X_{n+r-1} - X_n), \end{aligned} \quad (4.7)$$

where the right hand side of the last identity is the exterior power Λ_Y of a disjoint union of alphabets in Λ -ring notation with $X_n = \left\{\frac{c(x)}{1+nY} \mid x \in \lambda\right\}$ (see [90, Chap. 1]). This exterior power can then be expanded into power-sums by the formula

$$L_\lambda^r(Y, n) = \sum_{\nu} z_\nu^{-1} p_\nu(-X_{n+r} - X_{n-1} + X_{n+r-1} + X_n) (-Y)^{|\nu|}. \quad (4.8)$$

The alphabet X_n factors into $\{c(x) \mid x \in \lambda\} \cdot (1 + nY)^{-1}$, so that

$$p_\nu(-X_{n+r} - X_{n-1} + X_{n+r-1} + X_n) = \mathfrak{p}_\nu(\lambda) \cdot P_\nu^r(Y, n)$$

where the $P_\nu^r(Y, n)$ are the power sums defined by formula (4.1). Therefore from (4.6) and (4.8), $\omega_{r1^{n-r}}^\lambda$ is given by the coefficient of Y^{r+1} in

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{|\nu|} \mathfrak{p}_\nu(\lambda)}{z_\nu} Y^{|\nu|} P_\nu^r(Y, n) Q^r(Y, n). \quad (4.9)$$

Consider now the coefficient of Y^i in $P_j^r(Y, n)$: from (4.1),

$$P_j^r(Y, n) = \sum_{i \geq 0} \binom{j+i-1}{i} (n^i + (n+r-1)^i - (n+r)^i - (n-1)^i) (-Y)^i. \quad (4.10)$$

Terms of degree 0 or 1 in Y cancel, and the coefficient of Y^2 is $-2r \binom{j+1}{2}$. This implies that the lowest degree of $P_\nu^r(Y, n)$ is $2\ell(\nu)$ and justifies the choice of $P_{\nu,i}^r(n) = [Y^{2\ell(\nu)+i}]P_\nu^r(Y, n)$. With $w(\nu) = |\nu| + 2\ell(\nu)$, the coefficient of Y^{r+1} in formula (4.9) gives $\omega_{r1^{n-r}}^\lambda = \Omega_r(n, \mathfrak{p}_1(\lambda), \dots, \mathfrak{p}_{r-1}(\lambda))$.

From (4.10), the polynomial $P_{j,i}^r$ clearly has degree i in n , so that $P_{\nu,i}^r(n)$ has degree i . Expansions using the binomial theorem show that $Q_i^r(n)$ is a polynomial of degree $i-1$ without constant term.

For the second part of the theorem, observe that, starting from formula (4.3), all manipulations are valid including when $n < r$. But in Formula (4.3), the nullity for $n < r$ is immediate : in the summand, either $m_i < r$, and the falling power does the job, or there exists j such that $m_i = m_j + r$.

And finally, for the corollary, observe that the contribution of $Q^r(Y, n)$ is $(-1)^r/r^2$ by (4.2), while that of $P_{r-1}^r(Y, n)$ has been established to be $-2r \binom{r}{2}$. With $z_{(r-1)} = r-1$, the coefficient 1 is found. \square

4.3 Elementary operators

4.3.1 Symmetric functions

Let $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ be a set of indeterminates and let $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ be the ring of symmetric functions in $\{x_1, x_2, \dots\}$ over the field \mathbb{Q} of rational numbers. The usual scalar product \langle, \rangle on Λ is defined on the linear basis $\{p_{\lambda}\}_{\lambda}$ by :

$$\forall \lambda, \mu \quad \langle p_{\lambda}, p_{\mu} \rangle = z_{\lambda} \delta_{\lambda, \mu}.$$

We need the following differential operators known in the literature as Hammond's operators (see [98] or [97]) :

DEFINITION 4.1 For each partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, let p_{λ}^{\perp} be the adjoint operator to the multiplication by $p_{\lambda}(\mathbf{x})$ with respect to the scalar product \langle, \rangle :

$$\forall f, g \in \Lambda \quad \langle p_{\lambda} f, g \rangle = \langle f, p_{\lambda}^{\perp} g \rangle.$$

The operator p_{λ}^{\perp} is conveniently described as a differential operator on the basis $\{p_{\lambda}(\mathbf{x})\}_{\lambda}$:

$$p_{\lambda}^{\perp} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k \frac{\partial^k}{\partial p_{\lambda_1} \partial p_{\lambda_2} \cdots \partial p_{\lambda_k}}.$$

The use of such operators in relation with connexion coefficients is not new and can be found for instance in [60]. We are interested in representing the multiplication by a conjugacy class as an action of an operator on the space of symmetric functions : more precisely we look for operators G_{α} , satisfying

$$\forall \beta, \gamma \vdash |\alpha|, \quad [q_{\gamma}] G_{\alpha} \cdot q_{\beta} = [K_{\gamma}] K_{\alpha} \cdot K_{\beta}$$

where $\{q_{\lambda} = p_{\lambda}/z_{\lambda}\}_{\lambda}$ is an orthonormal basis of Λ . Here is a trivial way to do this :

DEFINITION 4.2 Let $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ be a partition of n . For any permutation $\rho \in \mathcal{C}_{\lambda}$, define the operator $G_{\lambda} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ by

$$G_{\lambda} = \frac{1}{z_{\lambda}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_{\lambda(\rho\sigma)} p_{\lambda(\sigma)}^{\perp} = \frac{1}{z_{\lambda}} \sum_{\nu, \mu \vdash n} \frac{a'_{\lambda, \mu}}{z_{\mu}} p_{\nu} p_{\mu}^{\perp}. \quad (4.11)$$

From this definition and the orthogonality relation $p_{\mu}^{\perp} p_{\lambda} = z_{\lambda} \delta_{\lambda, \mu}$ for partitions of the same weight, it is immediate that for any partitions λ, μ of n

$$G_{\lambda} \cdot q_{\mu} = \sum_{\gamma \vdash n} a'_{\lambda, \mu} q_{\gamma}.$$

The operators G_{λ} are not interesting because their definition uses the structure constants $a'_{\lambda, \mu}$ which they are meant to produce; however they provide an easy introduction to what we mean by representing the multiplication by the action of an operator on symmetric functions.

Our aim is to define a more interesting family H of such operators, satisfying for all partitions α ,

$$\forall \beta, \gamma \vdash |\alpha|, \quad [q_{\gamma}] H_{\bar{\alpha}} \cdot q_{\beta} = [K_{\gamma}] K_{\alpha} \cdot K_{\beta}.$$

Observe here that we require H , in some loose sense, to be defined in terms of the reduced partition $\bar{\alpha}$ and not of α .



4.3.2 Restricted permutations

In order to define our operators $H_{\bar{\alpha}}$, we need some elementary results on restricted permutations. For a subset S of $[n] = \{1, \dots, n\}$, and a permutation $\sigma \in \mathfrak{S}n$, let $\sigma_{|S}$ be the permutation of the elements of S such that, for all $i \in S$, $\sigma_{|S}(i) = \sigma^k(i)$ where k is the least positive integer such that $\sigma^k(i)$ is in S .

The idea rests on the following observation : let ρ and σ be permutations in \mathfrak{S}_n , and consider the product $\tau = \rho\sigma$. Then, if $[n] \setminus S$ contains only fix points of ρ , we have $\tau_{|S} = \rho_{|S}\sigma_{|S}$, and conversely τ can be obtained from $\tau_{|S}$ by inserting after each $i \in S$ the block that separates i and $\sigma_{|S}(i)$ in the decomposition of σ into disjoint cycles.

Example. If $\rho_{|3} = (1\ 2\ 3)$ and $\sigma = (1\ aaa\ 2\ bbb)\ (3\ ccc)$, then $\sigma_{|3} = (1\ 2)\ (3)$, $\tau_{|3} = (1\ 3)\ (2)$ and $\tau = (1\ aaa\ 3\ ccc)\ (2\ bbb)$.

Given a permutation σ_0 of \mathfrak{S}_p , and $n \geq p$, the permutation σ_0 can be extended naturally to a permutation of \mathfrak{S}_n by adding fix points. Therefore any $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p$ acts by left multiplication on \mathfrak{S}_n . We need one last definition : given a partition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, the canonical permutation of type α is the permutation of cycle type α whose k -th cycle is $(\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + 1, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_k)$.



4.3.3 The operator $H_{\bar{\alpha}}$ and Katriel's notations

We give two equivalent definitions of H .

DEFINITION 4.3 Let $\bar{\alpha}$ be a reduced partition of weight p . Let ρ_0 be the canonical permutation of cycle type $\bar{\alpha}$. Then the operator $H_{\bar{\alpha}} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ is defined by :

$$H_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p} \sum_{i_1, \dots, i_p \geq 1} p_{\gamma'} \cdot p_{\beta'}^\perp \tag{4.12}$$

where β' is the cycle type of any permutation τ obtained from σ_0 by inserting $i_j - 1$ elements after each $j \in \{1, \dots, p\}$, and γ' is the cycle type of $\rho_0\tau$.

The fact that the cycle type γ' depends only on the integers i_1, \dots, i_p , and not on the elements we choose to insert in σ_0 , is a consequence of the previous discussion on restricted permutations.

This operator is closely related to Katriel's bracket operators (which are not completely rigorously defined). A simple variation on his notation is :

$$\langle\langle i_1 + i_2; i_3 \mid i_1; i_2 + i_3 \rangle\rangle \quad \text{stands for} \quad \sum_{i_1, i_2, i_3 \geq 1} p_{[i_1+i_2, i_3]} p_{[i_1, i_2+i_3]}^\perp,$$

where the brackets $[,]$ denote multisets of integers (*i.e.* partitions). A further simplification of this notation (even closer to Katriel's) is to replace each variable by its index and write sums as cycles :

$$\langle\langle (1, 2)(3) \mid (1)(2, 3) \rangle\rangle \quad \text{stands for} \quad \langle\langle i_1 + i_2; i_3 \mid i_1; i_2 + i_3 \rangle\rangle$$

Let us rewrite Definition 4.3 with this notation :

DEFINITION 4.4 Let $\bar{\alpha}$ be a reduced partition of weight p . Let ρ_0 be the canonical permutation of cycle type $\bar{\alpha}$. Then

$$H_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p} \langle\langle \rho_0 \sigma_0 \mid \sigma_0 \rangle\rangle. \quad (4.13)$$

Finally, Katriel conjectured a symmetry in the coefficients, which allows the introduction of a last notation :

$$\langle P \mid Q \rangle \quad \text{stands for} \quad \langle\langle P \mid Q \rangle\rangle + \langle\langle Q \mid P \rangle\rangle$$

Examples. We keep the intermediate notation which we find more descriptive.

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2} \langle\langle i_1; i_2 \mid i_1 + i_2 \rangle\rangle + \frac{1}{2} \langle\langle i_1 + i_2 \mid i_1; i_2 \rangle\rangle = \frac{1}{2} \langle i_1 + i_2 \mid i_1; i_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i_1, i_2 \geq 1} p_{i_1, i_2} p_{i_1 + i_2}^\perp + \sum_{i_1, i_2 \geq 1} p_{i_1 + i_2} p_{i_1, i_2}^\perp \right) \\ &= \frac{1}{2} p_2 p_{11}^\perp + \frac{1}{2} p_{11} p_2^\perp + p_3 p_{21}^\perp + p_{21} p_3^\perp + p_4 p_{31}^\perp + \frac{1}{2} p_4 p_{22}^\perp + \frac{1}{2} p_{22} p_4^\perp + \dots \\ H_3 &= \frac{1}{3} \langle\langle i_1 + i_2 + i_3 \mid i_1, i_2, i_3 \rangle\rangle + \frac{1}{3} \langle\langle i_1, i_2, i_3 \mid i_1 + i_2 + i_3 \rangle\rangle + \frac{1}{3} \langle\langle i_1 + i_2 + i_3 \mid i_1 + i_2 + i_3 \rangle\rangle \\ &\quad + \frac{1}{3} \langle\langle i_1 + i_2, i_3 \mid i_1, i_2 + i_3 \rangle\rangle + \frac{1}{3} \langle\langle i_1 + i_3, i_2 \mid i_2, i_1 + i_3 \rangle\rangle + \frac{1}{3} \langle\langle i_2 + i_3, i_1 \mid i_3, i_1 + i_2 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle i_1 + i_2, i_3 \mid i_1, i_2 + i_3 \rangle\rangle + \frac{1}{3} \langle i_1 + i_2 + i_3 \mid i_1, i_2, i_3 \rangle + \frac{1}{3} \langle\langle i_1 + i_2 + i_3 \mid i_1 + i_2 + i_3 \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\substack{(i_1, i_2, i_3) \geq 1 \\ n = i_1 + i_2 + i_3}} \left(p_n p_{(i_1, i_2, i_3)}^\perp + p_{(i_1, i_2, i_3)} p_n^\perp + p_n p_n^\perp + 3p_{(i_1 + i_3, i_2)} p_{(i_1 + i_2, i_3)}^\perp \right) \\ H_{2^2} &= \frac{1}{8} \langle i_1; i_2; i_3; i_4 \mid i_1 + i_2; i_3 + i_4 \rangle + \frac{1}{4} \langle\langle i_1 + i_2; i_3; i_4 \mid i_1; i_2; i_3 + i_4 \rangle\rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \langle\langle i_1 + i_2; i_3 + i_4 \mid i_1 + i_3; i_2 + i_4 \rangle\rangle + \langle\langle i_1 + i_2 + i_3; i_4 \mid i_1; i_2 + i_3 + i_4 \rangle\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \mid i_1 + i_2; i_3; i_4 \rangle + \frac{1}{4} \langle\langle i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \mid i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \rangle\rangle \end{aligned}$$

Katriel's *global conjecture* in [88] is that $K_\alpha = H_{\bar{\alpha}}$. More formally, we shall prove the following theorem.

THEOREM 4.2 (GLOBAL CONJECTURE) *Let α, β and γ be partitions of n , then*

$$[K_\gamma] K_\alpha \cdot K_\beta = [q_\gamma] H_{\bar{\alpha}} \cdot q_\beta.$$

Observe that applying a permutation of indices in an elementary bracket operator does not change it. Collecting equivalent terms to form a sum over “distinct contributions” (as we did in the examples), we immediately obtain from (4.13) a proof of Katriel’s *central conjecture* on the resulting coefficients.

PROOF. Let p be the weight of $\bar{\alpha}$, ρ_0 the associated canonical permutation, and ρ its natural extension in \mathfrak{S}_n . On one hand,

$$\begin{aligned} [K_\gamma] K_\alpha \cdot K_\beta &= \frac{|\mathcal{C}_\alpha|}{|\mathcal{C}_\gamma|} [K_\alpha] K_\beta \cdot K_\gamma = \frac{z_\gamma}{z_\alpha} \text{Card} \{(\sigma, \tau) \in \mathcal{C}_\beta \times \mathcal{C}_\gamma \mid \rho\sigma = \tau\} \\ &= \frac{z_\gamma}{z_\alpha} \sum_{\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p} \text{Card} \{(\sigma, \tau) \in \mathcal{C}_\beta \times \mathcal{C}_\gamma \mid \sigma|_p = \sigma_0, \tau|_p = \rho_0\sigma|_p\} \end{aligned}$$

Our discussion on restricted permutations implies that, for all $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p$,

$$\begin{aligned} \text{Card} \{(\sigma, \tau) \in \mathcal{C}_\beta \times \mathcal{C}_\gamma \mid \sigma|_p = \sigma_0, \tau|_p = \rho_0\sigma|_p\} \\ = \sum_{(i_0, \dots, i_p) \in C(\beta, \gamma)} \binom{n-p}{i_0} \cdot (n-p-i_0)! \cdot \frac{i_0!}{z_{\beta-\beta'}} \end{aligned}$$

where the sum runs over the compositions (i_0, \dots, i_p) of n such that inserting i_j elements of $\{p+1, \dots, n\}$ after each j of $\{1, \dots, p\}$ in $\sigma|_p$ and $\tau|_p$ leads to permutations of respective cycle types β' and γ' with the following properties : $\forall i, b'_i \leq b_i$, $c'_i \leq c_i$ and $\beta - \beta' = \gamma - \gamma'$, where $\beta = 1^{b_1} \dots n^{b_n}$ and so on, and $\beta - \beta'$ denotes the partition $1^{b_1-b'_1} \dots n^{b_n-b'_n}$. This simplifies to :

$$[K_\gamma] K_\alpha \cdot K_\beta = \frac{z_\gamma}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}_p} \sum_{(i_0, \dots, i_p) \in C(\beta, \gamma)} \frac{1}{z_{\beta-\beta'}}.$$

On the other hand,

$$H_{\bar{\alpha}} \cdot q_\beta = \frac{1}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\sigma_0 \in \mathfrak{S}_p} \sum_{i_1, \dots, i_p \geq 0} p_{\gamma'} \frac{\pi_{\beta'}}{z_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial p_{\beta'}}.$$

Since $\frac{\partial p_\beta}{\partial p_{\beta'}} = 0$ unless $\beta \geq \beta'$, in which case $\frac{\partial p_\beta}{\partial p_{\beta'}} = \frac{b_1! \dots b_n!}{(b_1 - b'_1)! \dots (b_n - b'_n)!} p_{\beta-\beta'}$, we obtain :

$$H_{\bar{\alpha}} \cdot q_\beta = \frac{1}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}_p} \sum_{(i_0, \dots, i_p) \in C(\beta)} \frac{p_{\gamma'+\beta-\beta'}}{z_{\beta-\beta'}},$$

where the sums runs over the compositions of n such that $\forall i, b'_i \leq b_i$. So finally :

$$[q_\gamma] H_{\bar{\alpha}} \cdot q_\beta = \frac{z_\gamma}{z_{\bar{\alpha}}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \sum_{(i_0, \dots, i_p) \in C(\beta, \gamma)} \frac{1}{z_{\beta-\beta'}} = [K_\gamma] K_\alpha \cdot K_\beta. \quad \square$$

An immediate consequence of Theorem 4.2 is that the operators $H_{\bar{\lambda}}$ are self adjoint and therefore their expansions $H_{\bar{\lambda}} = \sum_{\nu, \mu} a'_{\lambda, \mu} p_\nu p_\mu^\dagger$, are symmetric in ν and μ , a fact that can also be proved directly from their definition. This is also part of Katriel’s conjecture.

4.3.4 Families of connexion coefficients

For a reduced partition $\bar{\alpha}$, let $K_{\bar{\alpha}}(n)$ be the sum in \mathcal{Z}_n of all permutations with reduced cycle-type $\bar{\alpha}$ if $n \geq |\bar{\alpha}|$, and 0 otherwise.

Let $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ be reduced partitions and define the coefficients $\mathbf{a}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}(n)$ by

$$K_{\bar{\alpha}}(n) \cdot K_{\bar{\beta}}(n) = \sum_{\bar{\gamma}} \mathbf{a}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}(n) K_{\bar{\gamma}}(n). \quad (4.14)$$

In [50] it is proved that the $\mathbf{a}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}(n)$ are polynomials in n . This also follows from Theorem 4.2 : let k (resp. h) be the largest part of $\bar{\beta}$ (resp. $\bar{\gamma}$), and apply the elementary operator $H_{\bar{\alpha}}$ to $q_{\bar{\beta}1^{n-|\bar{\beta}|}}$; the non-zero contributions are of the form

$$[q_{\bar{\gamma}1^{n-|\bar{\gamma}|}}] p_{\mu} p_{\lambda}^{\perp} q_{\bar{\beta}1^{n-|\bar{\beta}|}}$$

where λ and μ are partitions of length $|\bar{\alpha}|$ having parts of size at most respectively k and h . There are finitely many such partitions and the contribution of this term is a polynomial of degree ℓ_1 in n .

Theorem 4.2 is a generalisation of this result in the sense that it proves that other families of coefficients are polynomial. For instance, for any reduced partition $\bar{\alpha}$ with even weight, the coefficient

$$\mathbf{b}_{\bar{\alpha}}(n) = [K_{2^n}] K_{\bar{\alpha}}(2n) \cdot K_{2^n}$$

is a polynomial in n . The expression of H_{2^2} presented before gives

$$\mathbf{b}_{2^2}(n) = \frac{1}{4} [q_{2^n}] p_{2^2} p_{2^2}^{\perp} q_{2^n} = n(n-1).$$

— o —

4.4 Central characters for general partitions

In view of Section 4.3.4 we have obtained in Theorem 4.1 the eigenvalues of $K_r(n)$ as polynomials in $\mathbb{Q}[n][p_1, \dots, p_{r-1}]$. Following a suggestion in [86], we seek similar results for the eigenvalues of $K_{\bar{\alpha}}(n)$ for any reduced partition $\bar{\alpha}$.

Let $\bar{\alpha} = (2^{a_2}, \dots, k^{a_k})$ be a reduced partition. In similarity with the situation in the Farahat-Higman ring structure (see [97, p. 131, ex. 24, 25]), we observe from Theorem 4.2 :

$$K_{\alpha_1}(n) \cdots K_{\alpha_\ell}(n) = \left(\prod_{i=2}^k a_i! \right) K_{\bar{\alpha}}(n) + \sum_{\bar{\beta}, |\bar{\beta}| < |\bar{\alpha}|} c(\bar{\beta}, n) K_{\bar{\beta}}(n), \quad (4.15)$$

from which we deduce

$$K_{\bar{\alpha}}(n) = \frac{K_{\alpha_1}(n) \cdots K_{\alpha_\ell}(n)}{\prod_i a_i!} + \sum_{\bar{\beta}, |\bar{\beta}| < |\bar{\alpha}|} b^{\bar{\beta}}(n) \prod_i K_{\beta_i}(n) \quad (4.16)$$

where the partitions $\bar{\beta}$ also satisfy $|\bar{\beta}| + \ell(\bar{\beta}) \leq |\bar{\alpha}| + \ell(\bar{\alpha})$: an elementary operator can only increase the length by breaking a cycle, but this operation prevents the insertion of a fix point

and reduces accordingly the final weight. Now the $\omega_{\bar{\alpha}}^{\lambda}$ are eigenvalues of $K_{\bar{\alpha}}$, i.e. for $n > |\bar{\alpha}|$, and $\lambda \vdash n$, $K_{\bar{\alpha}}(n) \cdot \chi^{\lambda} = \omega_{\bar{\alpha}}^{\lambda} \chi^{\lambda}$. Using Formula (4.16) we obtain,

$$\omega_{\bar{\alpha}}^{\lambda} = \frac{\omega_{\alpha_1}^{\lambda} \cdots \omega_{\alpha_{\ell}}^{\lambda}}{\prod_i a_i!} + \sum_{\bar{\beta}} b^{\bar{\beta}}(n) \prod_i \omega_{\bar{\beta}_i}^{\lambda} 1^{n-\bar{\beta}_i},$$

so that we are led to define the polynomial $\Omega_{\bar{\alpha}}$ in $\mathbb{Q}[n][p_1, p_2, \dots]$ by

$$\Omega_{\bar{\alpha}} = \frac{\Omega_{\alpha_1} \cdots \Omega_{\alpha_{\ell}}}{\prod_i a_i!} + \sum_{\bar{\beta}} b^{\bar{\beta}}(n) \prod_i \Omega_{\bar{\beta}_i}, \quad (4.17)$$

where the sum ranges over reduced partitions $\bar{\beta}$ with $|\bar{\beta}| < |\bar{\alpha}|$. In each Ω_{α_i} in the previous formula, the monomials p_{ν} satisfy $w(\nu) \leq \alpha_i + 1$ so that the monomials p_{ν} in the product satisfy $w(\nu) \leq |\bar{\alpha}| + \ell(\bar{\alpha})$, and it is also the case for the monomials in the $\Omega_{\bar{\beta}}$. Finally, from Theorem 4.1 we get the following theorem.

THEOREM 4.3 (PART OF [86, CONJ. 3]) *Let $\bar{\alpha}$ be a reduced partition. For $n \geq |\bar{\alpha}|$, and for all partitions λ of n ,*

$$\omega_{\bar{\alpha}}^{\lambda} = \Omega_{\bar{\alpha}}(n, \mathbf{p}(\lambda)),$$

where $\Omega_{\bar{\alpha}}$ is a polynomial in $\mathbb{Q}[n][p_1, p_2, \dots]$ involving only monomials p_{ν} such that $w(\nu) \leq |\bar{\alpha}| + \ell(\bar{\alpha})$.

COROLLARY 4.2 (SEE [86, CONJ. 4]) *Let $\bar{\alpha} = (2^{a_2}, \dots, k^{a_k})$ be a reduced partition, and $\alpha' = (1^{a_2}, \dots, (k-1)^{a_k})$. Then the coefficient of $p_{\alpha'}$ in $\Omega_{\bar{\alpha}}$ is*

$$\prod_{i \geq 2} \frac{1}{a_i!}.$$

CONJECTURE 4.2 (REMAINING FROM [86, CONJ. 3]) *The coefficient of a monomial p_{ν} of $\Omega_{\bar{\alpha}}$, which is a polynomial in $\mathbb{Q}[n]$, is in fact null if $k = |\bar{\alpha}| + \ell(\bar{\alpha}) - w(\nu)$ is even, and of degree at most $k/2$ otherwise.*

This conjecture is a consequence of Conjecture 1 of the present article, using (4.17).

CONJECTURE 4.3 (FROM [86, CONJ. 5]) *The polynomial $\Omega_{\bar{\alpha}}$ vanishes on partitions that are too small, i.e. for $n < |\bar{\alpha}|$ and $\lambda \vdash n$, $\Omega_{\bar{\alpha}}(n, \mathbf{p}(\lambda)) = 0$.*

— o —

Deuxième partie

Résultats bijectifs dans le cas
planaire

Chapitre 5

Introduction à la conjugaison d'arbres

Nous présentons dans ce chapitre les notions de *conjugaison* et de *clôture d'arbres*, introduites par G. Schaeffer [110] pour obtenir des preuves bijectives de résultats énumératifs pour certaines familles de cartes planaires. Ces rappels servent essentiellement d'introduction aux deux chapitres suivants, dans lesquels nous définissons d'autres types de clôture permettant de traiter de nouvelles familles de cartes. Nous présentons cependant un résultat original, obtenu avec G. Schaeffer, concernant les cartes bieuléennes : nous mettons en évidence les liens existant entre ces cartes et certaines *constellations planaires* énumérées par M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer par des techniques de conjugaison. Nous obtenons ainsi une formule énumérative inconnue auparavant, et qui a été démontrée récemment par V. A. Liskovets et T. R. S. Walsh, indépendamment, par une méthode analytique. La présentation de ce résultat est l'occasion de donner un aperçu de la portée du théorème sur les constellations planaires. Enfin, nous montrons comment ce résultat permet d'obtenir des algorithmes de génération aléatoire et de codage particulièrement efficaces.



5.1 Rappels sur les résultats de Tutte

Les travaux de W. T. Tutte et de son école ont permis, dans les années 60, de donner des formules énumératives pour un certain nombre de familles de cartes planaires enracinées, notamment dans la série d'articles « A census of... » [121, 122, 123]. Leur démarche consiste à déterminer des équations fonctionnelles pour leurs séries génératrices, généralement par *contraction / suppression* puis à les résoudre, entre autres à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange, ou de la *méthode quadratique* introduite par W. G. Brown et W. T. Tutte [28]. Nous rappelons ici les principales étapes de cette démarche, dont on trouvera un exemple plus détaillé au chapitre 6 (section 6.1.4, page 103 et suivantes ; voir également [57], section 2.9) :

Pour déterminer le nombre de cartes d'une famille \mathcal{F} selon certains paramètres,

1. donner une décomposition récursive des cartes de \mathcal{F} . Pour cela,
 - selon les cas, supprimer ou contracter l'arête racine d'une carte \mathcal{C} de \mathcal{F} générique,

- décomposer la carte obtenue de telle sorte que chaque composante puisse être décrite à l'aide de cartes de \mathcal{F} plus petites que \mathcal{C} (au sens des paramètres choisis pour l'énumération),
 - déterminer le nombre de cartes de \mathcal{F} qu'on peut reconstruire à partir des composantes, nombre dépendant éventuellement de paramètres supplémentaires (tel le degré de la face racine, par exemple)
2. traduire cette décomposition récursive en termes d'équations fonctionnelles pour la série génératrice de \mathcal{F} , en introduisant les paramètres supplémentaires éventuellement nécessaires,
 3. autant que possible, résoudre!

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à certaines de ces familles, pour lesquelles la méthode précédente fournit, de manière assez magique, des formules énumératrices remarquablement simples : des formules multiplicatives, faisant intervenir des facteurs facilement interprétables, et, qui plus est, présentant une parenté certaine.

— o —

La série génératrice

$$F(x, u) = \sum_{n,d} f_{n,d} x^n u^d$$

des cartes planaires énumérées selon le nombre n d'arêtes et le degré d de la face racine vérifie l'équation fonctionnelle suivante [124] :

$$F(x, u) = 1 + xu^2 F(x, u)^2 + xu \frac{F(x, 1) - uF(x, u)}{1 - u}.$$

On peut en déduire le nombre de cartes planaires à n arêtes, ou encore de cartes 4-régulières à n sommets :

$$\frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n! (n+2)!}. \quad (5.1)$$

En écrivant d'autres équations de ce type, on peut obtenir le nombre de cartes biparties à n arêtes, ou de cartes biparties cubiques à $2n$ sommets :

$$\frac{3 \cdot 2^{n-1} (2n)!}{n! (n+2)!},$$

le nombre de cartes non séparables à $n+1$ arêtes [28] :

$$\frac{2 (3n)!}{(n+1)! (2n+1)!},$$

ou à i sommets et j faces :

$$\frac{(2i+j-2)! (2j+i-2)!}{(2i-1)! (2j-1)! i! j!}.$$

Pour continuer dans le registre des familles dont la définition inclut une condition de connexité, on peut citer les cartes cubiques non séparables à $2n$ sommets, énumérées par :

$$\frac{2^n (3n)!}{(n+1)! (2n+1)!},$$

et enfin les cartes sans isthme à n arêtes¹, ou également les cartes cubiques 3-connexes à $n+3$ faces, énumérées par :

$$\frac{2 (4n+1)!}{(n+1)! (3n+2)!}.$$

¹ autrement dit, les cartes *arête-2-connexes*

La première de ces formules, notamment, a été démontrée à de nombreuses reprises, d'abord par W. T. Tutte [123, 124], puis par A. B. Lehman [94], R. Cori [34], D. Arquès [4], sans qu'aucune de ces démonstrations ne donne une explication intuitive de la formule. D'autre part, l'indéniable parenté existant entre les formules citées ci-dessus invite à chercher, sinon une démonstration commune, du moins une méthode générale pour obtenir des démonstrations. C'est ce qu'a proposé G. Schaeffer dans [110], en introduisant la notion de *conjugaison d'arbres*, qui lui a permis de démontrer certaines de ces formules, puis, avec M. Bousquet-Mélou, d'en obtenir une nouvelle, très générale, concernant les *constellations planaires* [21]. Notre propos dans ce chapitre est d'introduire cette notion de conjugaison pour la rendre familière au lecteur, avant d'aborder les chapitres 6 et 7.

Pour cela, commençons par réécrire les plus simples des formules précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n! (n+2)!} = \frac{2 \cdot 3^n}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ \frac{3 \cdot 2^{n-1} (2n)!}{n! (n+2)!} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\ \frac{2 (3n)!}{(n+1)! (2n+1)!} = \frac{4}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n} \\ \frac{2^n (3n)!}{(n+1)! (2n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n} \end{array} \right.$$

Cette formulation fait apparaître la structure commune de ces expressions : chacune de ces familles de cartes représente une certaine proportion d'un ensemble dont le cardinal est celui d'une famille \mathcal{A} d'arbres, ici les arbres binaires ou ternaires, et cette proportion dépend, d'une part, d'un terme exponentiel, et d'autre part, au dénominateur, d'un terme linéaire qui est précisément le nombre de feuilles d'un arbre quelconque de \mathcal{A} . Quant aux autres formules citées ci-dessus, bien que cela ne soit pas aussi évident, elles peuvent également être mises sous une forme respectant ces propriétés. L'analogie avec les arbres, qui sont eux-mêmes énumérés par une certaine proportion – à dénominateur linéaire – du cardinal d'un ensemble de mots, incite à se poser la question suivante : de même que les arbres peuvent être considérés comme des classes de conjugaison de mots, ne peut-on pas définir pour les arbres une relation d'équivalence analogue à la conjugaison pour les mots qui permettrait de considérer les cartes comme des classes d'équivalence d'arbres ? C'est la thèse soutenue par G. Schaeffer dans [110], et que nous allons exposer, après avoir effectué quelques rappels sur le lien entre arbres et conjugaison de mots.

— o —

5.2 Les arbres sont des mots conjugués

Dans le contexte des cartes planaires, on définit naturellement les arbres plans de la manière suivante :

DÉFINITION 5.1 Un *arbre plan* est une carte à une seule face. Ses sommets de degré 1 sont appelés *feuilles*, et les autres *nœuds*. Un arbre plan enraciné est dit *planté* si son sommet racine est l'une de ses feuilles (ce qui détermine à la fois l'arête racine et son orientation). L'*arité* d'un sommet autre que la feuille racine est égale à son degré moins 1.

Cette définition est évidemment équivalente à la définition récursive usuelle, moyennant l'ajout de la feuille racine. Celui-ci présente l'avantage de symétriser les arbres considérés : ainsi, dans un arbre binaire (complet), tous les nœuds ont pour degré 3, y compris le « nœud racine » relié à la feuille racine. La figure 5.1 montre, à gauche, un arbre plan planté possédant un nœud d'arité 4, un nœud d'arité 3, cinq nœuds d'arité 2, deux nœuds d'arité 1, et douze feuilles (y compris la racine), et à droite un arbre binaire complet à huit nœuds et dix feuilles.

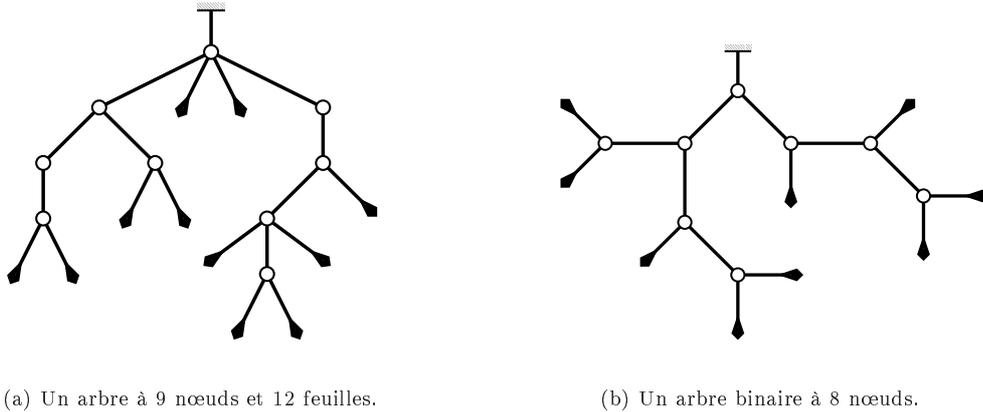


FIGURE 5.1 – Deux arbres plans plantés.

Par une récurrence immédiate sur le nombre de sommets d'un arbre, on montre la propriété suivante :

LEMME 5.1 Soit A un arbre plan planté à f feuilles (y compris la racine), et n_i nœuds d'arité i pour tout $i \geq 1$. Alors :

$$f - 2 = \sum_{i \geq 1} (i - 1)n_i.$$

Rappelons maintenant comment compter les arbres selon leur distribution de degrés. Pour cela, considérons l'alphabet infini

$$\mathcal{A} = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

À tout arbre plan planté peut être associé un mot appartenant au langage \mathcal{A}^* de la manière suivante : placer sur chaque sommet d'arité i autre que la racine l'étiquette a_i , puis effectuer un parcours préfixe gauche de l'arbre en lisant les étiquettes. Ceci constitue un *code* – le code préfixe – pour les arbres, puisque l'arbre initial peut aisément être reconstruit à partir du mot qui lui est associé, grâce à l'information sur l'arité de chaque sommet que contient le symbole qui le représente. Ainsi, le mot codant l'arbre représenté à la figure 5.1(a) est :

$$a_4 a_2 a_1 a_2 a_0 a_0 a_2 a_0 a_0 a_0 a_0 a_1 a_2 a_3 a_0 a_2 a_0 a_0 a_0 a_0.$$

Soit δ le morphisme de monoïde de (\mathcal{A}^*, \cdot) dans $(\mathbb{Z}, +)$ qui, à chaque lettre a_i appartenant à \mathcal{A} , associe $i - 1$. L'ensemble des mots codant les arbres plans plantés est appelé *langage de Łukasiewicz* de (\mathcal{A}, δ) , et noté \mathcal{L} . Le lemme 5.1 permet de donner une caractérisation des mots de Łukasiewicz :

PROPOSITION 5.2 *Un mot $w \in \mathcal{A}^*$ est un mot de Łukasiewicz si et seulement si*

- $\delta(w) = -1$,
- pour tout facteur gauche strict u de w , $\delta(u) \geq 0$.

Tout mot $w = w_1 \dots w_\ell$ de \mathcal{A}^* de longueur ℓ peut être représenté par un *chemin* dans le réseau \mathbb{Z}^2 dont les « étapes » se situent aux points de coordonnées $(i, \delta(w_1 \dots w_i))$, pour $i \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$. La figure 5.2 montre ainsi le chemin correspondant au mot de Łukasiewicz qui code l'arbre de la figure 5.1(a). En termes de chemins, la proposition 5.2 se traduit de la manière suivante : un chemin de Łukasiewicz est un chemin dont tous les pas sont effectués dans le quadrant \mathbb{N}^2 sauf le dernier, qui termine à l'ordonnée -1 .

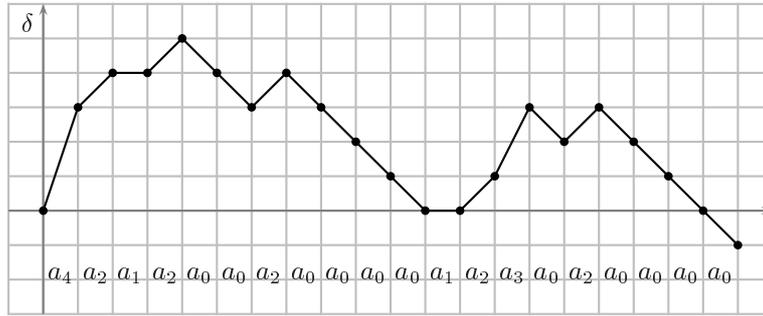


FIGURE 5.2 – Mot de Łukasiewicz codant l'arbre de la figure 5.1(a).

Compter les arbres possédant $f + 1$ feuilles et, pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, n_i nœuds d'arité i revient donc à déterminer combien de mots appartiennent à \mathcal{L} parmi les

$$\binom{f + n_1 + \dots + n_k}{f, n_1, \dots, n_k}$$

mots formés de f lettres a_0 et, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, n_i lettres a_i .

DÉFINITION 5.2 Deux mots w_1 et w_2 sont dits *conjugués* s'il existe une factorisation uv de w_1 telle que $w_2 = vu$. Autrement dit, deux mots appartiennent à une même classe de conjugaison s'ils correspondent au même *mot cyclique*.

Le lemme suivant, dû à A. Dvoretzky et Th. Motzkin [46], a permis à G. N. Raney [106] de donner la première preuve combinatoire de la formule d'inversion de Lagrange :

LEMME 5.3 (LEMME CYCLIQUE) *Soit $p \geq 1$ et w un mot appartenant à \mathcal{A}^* tel que $\delta(w) = -p$; alors w possède exactement p factorisations wv avec $u \neq \varepsilon$ telles que vu appartient à \mathcal{L}^p .*

DÉMONSTRATION. Si w appartient lui-même à \mathcal{L}^p , alors il existe des mots w_1, w_2, \dots, w_p de \mathcal{L} tels que $w = w_1 w_2 \dots w_p$, et les p factorisations de la forme

$$u = w_1 \dots w_i, \quad v = w_{i+1} \dots w_p,$$

pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont toutes telles que vu appartient à \mathcal{L}^p . Montrons que ce sont les seules. Soit uv une factorisation quelconque de w ; il existe alors $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que :

$$u = w_1 \dots w_{i-1} w'_i, \quad v = w''_i w_{i+1} \dots w_p, \quad w'_i w''_i = w_i \quad \text{et} \quad w'_i \neq \varepsilon.$$

Comme $w'_i w''_i$ est un mot de \mathcal{L} , si $w''_i \neq \varepsilon$, $\delta(w'_i) \geq 0$, et donc $\delta(w''_i w_{i+1} \dots w_p w_1 \dots w_{i-1}) \leq -p$: vu n'appartient alors pas à \mathcal{L}^p .

Soit maintenant w un mot quelconque tel que $\delta(w) = -p$. Soit $-q$ l'image minimale par δ d'un facteur gauche de w , u le facteur gauche de w le plus court vérifiant $\delta(u) = -q$, et v le facteur droit correspondant. Alors $\delta(vu) = -p$ et $\delta(vu') > -p$ pour tout préfixe propre u' de u . On peut alors utiliser le lemme suivant, qui généralise la proposition 5.2, et dont la démonstration est ici omise (elle pourra être trouvée par exemple dans [96], page 220) :

LEMME 5.4 *Un mot w appartient à \mathcal{L}^p si et seulement si $\delta(w) = -p$ et $\delta(u) > -p$ pour tout facteur gauche strict u de w .*

Le mot vu appartient donc à \mathcal{L}^p , et, par conséquent, possède exactement p factorisations $w'w''$ (avec $w' \neq \varepsilon$) telles que $w''w'$ appartienne à \mathcal{L}^p . Ceci achève la démonstration, puisque les factorisations de $w = uv$ et de vu se correspondent naturellement. \square

REMARQUE 5.5 *Il s'agit bien ici de factorisations, et non de conjugués : en effet, si le mot w considéré est périodique, de la forme $w = u^q$ avec $q > 1$ maximal, alors le nombre de factorisations de w est $|w|$ mais la classe de conjugaison de w ne contient que $|u|$ mots distincts. Les p factorisations dont l'existence est assurée par le lemme cyclique n'ont donc aucune raison de correspondre à p conjugués distincts. Bien au contraire, elles en ont une excellente de ne pas avoir cette propriété : l'égalité $\delta(w) = q\delta(u)$ prouve que les factorisations satisfaisantes se déduisent périodiquement de celles de u , et correspondent donc à $|\delta(u)|$ conjugués. Les $|\delta(u)|$ conjugués satisfaisants parmi $|u|$ sont donc le pendant des $|\delta(w)|$ factorisations satisfaisantes parmi $|w|$. Or*

$$\frac{\delta(u)}{|u|} = \frac{\delta(w)}{|w|}.$$

La conjugaison a cette propriété merveilleuse que, en calquant les symétries des objets considérés, elle permet justement de s'abstraire des conditions de symétrie : la proportion de conjugués satisfaisants parmi l'ensemble des conjugués étant la même que celle des factorisations satisfaisantes parmi l'ensemble des factorisations, tout se passe comme si les problèmes de symétrie n'existaient pas.

Le lemme précédent, appliqué au cas $p = 1$, permet de retrouver la formule énumérative des arbres selon la distribution des degrés des sommets, initialement due à F. Harary, G. Prins et W. T. Tutte [68] :

COROLLAIRE 5.6 *Soit n_1, n_2, \dots, n_k et f des entiers tels que*

$$\sum_{i=1}^k (i-1)n_i = f-1. \tag{5.2}$$

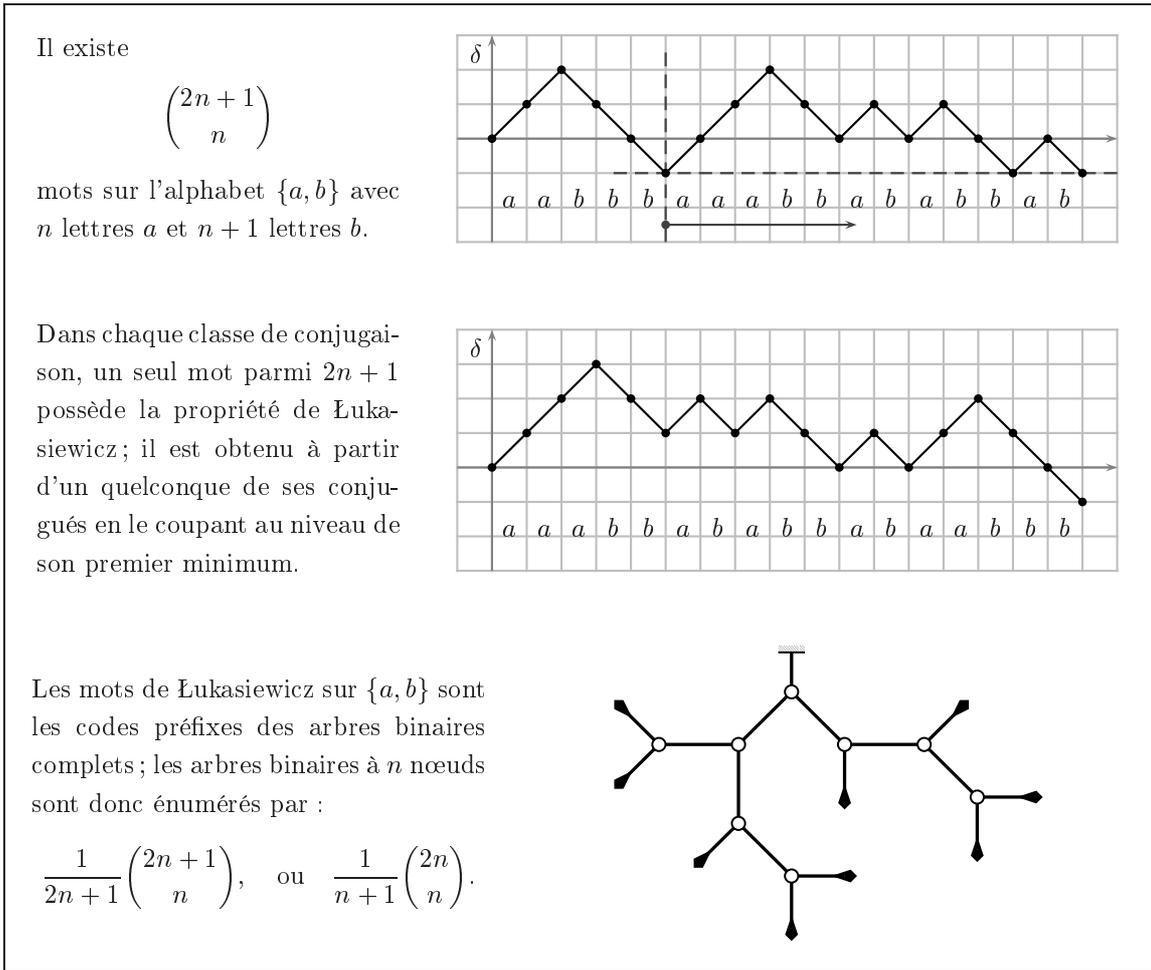


FIGURE 5.3 – Énumération des arbres binaires complets.

Alors le nombre d'arbres plans plantés à $f+1$ feuilles et n_i nœuds d'arité i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ est :

$$\frac{1}{f+n_1+\dots+n_k} \cdot \binom{f+n_1+\dots+n_k}{f, n_1, \dots, n_k}, \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{f} \cdot \binom{n_1+2n_2+\dots+kn_k}{f-1, n_1, \dots, n_k}.$$

En particulier, le nombre d'arbres m -aires complets à n nœuds, et donc $(m-1)n+2$ feuilles, vaut :

$$\frac{1}{mn+1} \binom{mn+1}{n}, \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{(m-1)n+1} \binom{mn}{n}.$$

La figure 5.3 résume le cas des arbres binaires complets.

REMARQUE 5.7 On peut obtenir directement les deux formules de droite du corollaire en considérant non pas les conjugués de Łukasiewicz de mots quelconques vérifiant 5.2, mais en se restreignant aux mots terminant par une feuille, et à leurs conjugués terminant par une feuille.

5.3 ... Et les cartes sont des arbres conjugués

5.3.1 Premier exemple : les cartes 4-régulières

La famille de cartes la plus simple à énumérer par conjugaison d'arbres est certainement celle des cartes *4-régulières*, encore appelées *quartiques*, autrement dit des cartes dont tous les sommets ont pour degré 4. Le nombre de cartes 4-régulières à n sommets est donné par l'expression :

$$Q_n = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (5.3)$$

Dans cette expression apparaît le nombre d'arbres binaires à n nœuds,

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

ainsi que le nombre de nœuds, n , et le nombre de feuilles, $n+2$, de ces arbres.



Arbres bourgeonnants. En vue de décrire une famille d'objets manifestement énumérés par Q_n , nous allons désormais adopter une terminologie enrichie pour les arbres :

DÉFINITION 5.3 Un *arbre bourgeonnant* B est un arbre plan possédant deux types de sommets de degré 1, appelés respectivement *feuilles* et *bourgeons*. Les arêtes incidentes à une feuille ou un bourgeon sont appelées *tiges*, les autres sont appelées *arêtes internes*. B est dit *planté* si son sommet racine est une feuille. En particulier, un arbre bourgeonnant planté ne peut être enraciné sur un bourgeon. Les arêtes internes seront parfois simplement appelées abusivement *arêtes*.

Étant donné un arbre binaire planté à n nœuds, le facteur 3^n apparaissant dans la formule 5.3 peut alors s'interpréter simplement comme le nombre de façons d'ajouter un bourgeon et sa tige sur chacun des nœuds. On notera \mathcal{B} la famille d'arbres bourgeonnants ainsi construits ; le sous-ensemble \mathcal{B}_n de \mathcal{B} formé des arbres à n nœuds a pour cardinal :

$$3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Un exemple d'arbre bourgeonnant construit à partir de l'arbre binaire des figures 5.1(b) et 5.3 est représenté figure 5.4².



Arbres bourgeonnants équilibrés et conjugaison d'arbres Nous définissons ici les arbres formant le pendant des mots de Łukasiewicz.

DÉFINITION 5.4 Le *mot de bord* d'un arbre bourgeonnant est le mot défini sur l'alphabet $\{b, f\}$ décrivant la succession des bourgeons et des feuilles le long de la face (unique) de l'arbre, en terminant par la feuille racine.

²Les couples bourgeon – tige seront désormais schématisés $\text{---}\diamond$, tandis que les couples feuille – tige seront toujours schématisés $\text{---}\blacktriangleright$.

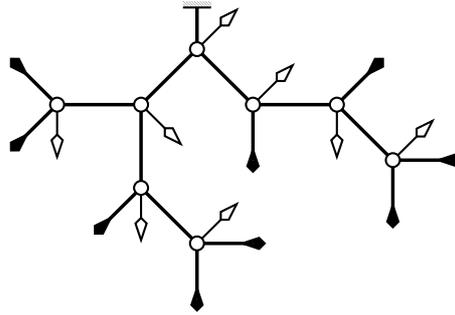


FIGURE 5.4 – Un arbre binaire bourgeonnant à 8 nœuds, 10 feuilles et 8 bourgeons.

On pose $\delta(b) = 1$ et $\delta(f) = -1$. Pour tout w mot de bord d'un élément de \mathcal{B}_n , $\delta(w) = -2$. D'après le lemme cyclique (lemme 5.3), chaque mot de bord possède donc exactement deux factorisations $w = uw_1v$ ($u \neq \varepsilon$) telles que w_1 et vu soient des mots du langage de Łukasiewicz pour $(\{b, f\}, \delta)$.

EXEMPLE 5.1 L'arbre bourgeonnant de la figure 5.4 a pour mot de bord :

$$f f b f b f f b b f b f f b b f.$$

Le chemin correspondant est représenté figure 5.5.

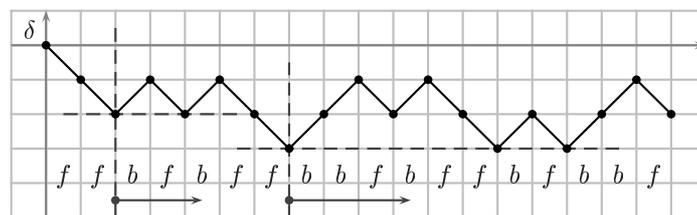


FIGURE 5.5 – Mot de bord de l'arbre bourgeonnant de la figure 5.4.

DÉFINITION 5.5 Un arbre bourgeonnant planté est dit *équilibré* si son mot de bord est un produit de deux mots de Łukasiewicz.

DÉFINITION 5.6 Deux arbres plans plantés sont dits *conjugués* s'ils ne diffèrent que par le choix de la feuille racine.

Une classe de conjugaison d'arbres n'est donc rien d'autre qu'un arbre non enraciné, de même qu'une classe de conjugaison de mots est un mot cyclique : la racine de l'arbre est en quelque sorte son début. Remarquons la propriété suivante :

PROPOSITION 5.8 *Deux arbres conjugués ont des mots de bord conjugus.*

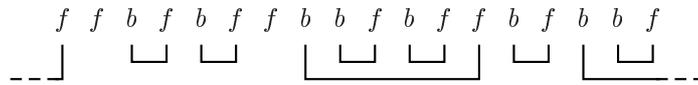
Enfin le corollaire suivant du lemme cyclique permet de compter les arbres équilibrés :

COROLLAIRE 5.9 *Le nombre d'arbres bourgeonnants équilibrés dans B_n est :*

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

— o —

Clôture partielle d'un arbre bourgeonnant Considérons un arbre bourgeonnant B et son mot de bord w ; chacune des occurrences de la lettre b dans le mot cyclique sous-jacent correspond à une occurrence de la lettre f ; ainsi, par exemple, pour l'arbre de la figure 5.4, les appariements sont les suivants :



Effectuer la *clôture partielle* de B consiste à fusionner les tiges de chaque couple (bourgeon, feuille) ainsi constitué pour former une nouvelle arête. Une autre manière de voir les choses est la suivante : en faisant le tour de la face infinie de l'arbre, à chaque fois qu'un bourgeon est immédiatement suivi d'une feuille, les apparier pour former une nouvelle arête, appelée *arête de clôture*, ce qui crée une nouvelle face, et continuer jusqu'à épuisement des bourgeons. La figure 5.6³ montre plusieurs étapes de la clôture partielle de l'arbre de la figure 5.4.

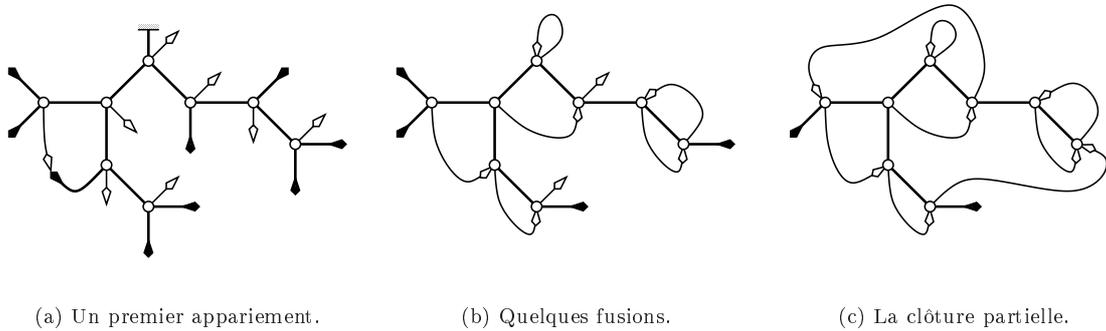


FIGURE 5.6 – Clôture partielle de l'arbre de la figure 5.4.

Il reste alors deux feuilles *libres*, qui sont précisément les deux feuilles correspondant aux dernières lettres f des deux mots de Łukasiewicz facteurs du mot de bord cyclique : les arbres dont la racine reste libre après la clôture partielle sont les arbres équilibrés définis et énumérés plus haut (5.5 et 5.9).

— o —

Clôture complète d'un arbre bourgeonnant équilibré Restreignons maintenant la construction précédente aux arbres bourgeonnants équilibrés ; la *clôture complète* d'un tel arbre est obtenue à partir de sa clôture partielle en fusionnant les deux feuilles libres et leur tige pour

³Les arêtes de clôture sont schématisées par des arcs munis de flèches indiquant le sens dans lequel la clôture a été effectuée.

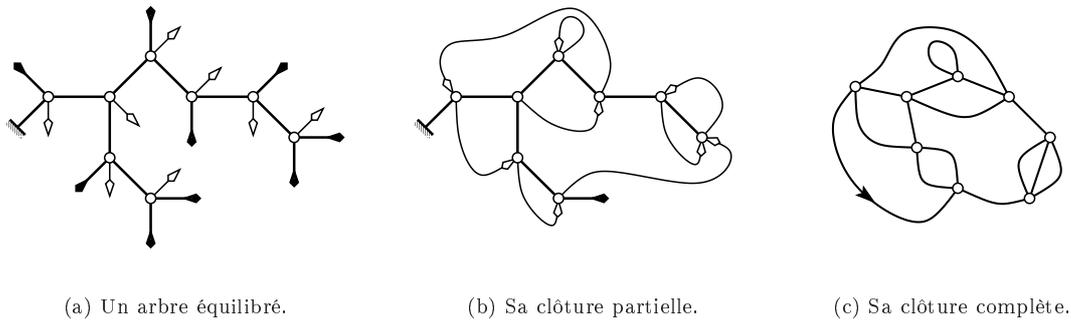


FIGURE 5.7 – Clôture complète d'un arbre bourgeonnant équilibré.

former une arête sur laquelle la carte obtenue peut être canoniquement enracinée – en choisissant par exemple de l'orienter depuis l'ancienne feuille racine vers l'autre feuille. La carte ainsi formée est manifestement 4-régulière, et G. Schaeffer a montré le théorème suivant [110], qui fournit une preuve constructive du résultat 5.3 :

THÉORÈME 5.1 *La clôture complète réalise une bijection de l'ensemble des arbres binaires bourgeonnants à n nœuds sur l'ensemble des cartes 4-régulières à n sommets.*

La figure 5.7 montre la clôture complète d'un des deux arbres équilibrés conjugués de l'arbre de la figure 5.4. La figure 5.11 résume en une page l'ensemble de la construction que nous venons de décrire.



Application réciproque Décrivons rapidement l'algorithme réciproque de la clôture, c'est-à-dire l'algorithme d'*ouverture* des arêtes d'une carte 4-régulière C permettant de déterminer « le » bon arbre couvrant A de C . La première étape consiste naturellement à ouvrir l'arête racine de C pour créer deux feuilles. Il faut ensuite construire un arbre couvrant de C , ou, de manière équivalente, déterminer l'ensemble des arêtes à ouvrir qui en est le complémentaire. Citons la propriété remarquable suivante :

PROPOSITION 5.10 *Soit C une carte plane, et C^* sa duale⁴. Soit A un ensemble d'arêtes de C . Alors A est un arbre couvrant de C si et seulement si les duales des arêtes de son complémentaire forment un arbre couvrant de C^* .*

Soit A un arbre couvrant quelconque de C ; il est possible d'orienter *correctement* les arêtes de son complémentaire, c'est-à-dire de telle manière que leur ouverture crée un arbre bourgeonnant B , dont la clôture est C . Cet arbre bourgeonnant n'a cependant aucune raison d'appartenir à \mathcal{B} , puisque le nombre de bourgeons par nœud n'est pas contraint. G. Schaeffer a montré [110] que le seul arbre couvrant de C tel que l'arbre bourgeonnant induit appartienne à \mathcal{B} est celui dont le

⁴c'est-à-dire la carte dont les sommets sont les faces de C ; on trouvera page 92 un développement plus précis.

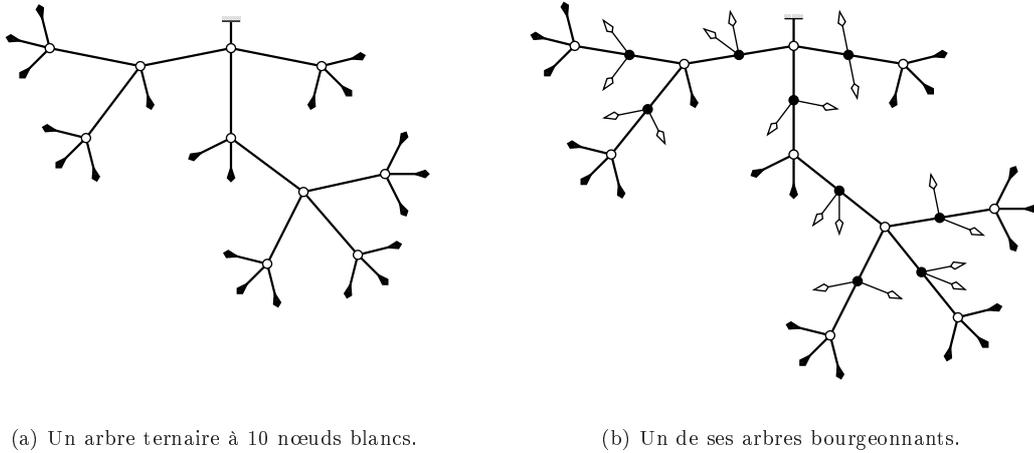


FIGURE 5.8 – Un exemple d'arbre ternaire bourgeonnant.

dual est obtenu par un parcours en largeur en sens indirect de la carte duale de \mathcal{C} .

— ○ —

5.3.2 Deuxième exemple : les cartes 4-régulières biparties

Passons maintenant à un deuxième exemple, un peu plus compliqué, celui des cartes 4-régulières biparties, c'est-à-dire celles parmi les précédentes dont les sommets peuvent être coloriés en deux couleurs, disons noir et blanc, de telle manière que deux sommets adjacents quelconques sont toujours de couleurs différentes. Par convention, la racine est orientée d'un sommet blanc vers un sommet noir. Tous les sommets d'une telle carte ayant même degré, et chaque arête étant incidente à un sommet de chaque couleur, les nombres de sommets noirs et blancs sont nécessairement égaux.

Le nombre de cartes 4-régulières biparties à n sommets blancs et n sommets noirs est donnée par la formule :

$$\frac{4}{2n+2} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}. \quad (5.4)$$

Apparaissent dans cette formule le nombre d'arbres ternaires à n nœuds (blancs) tels celui de la figure 5.8(a),

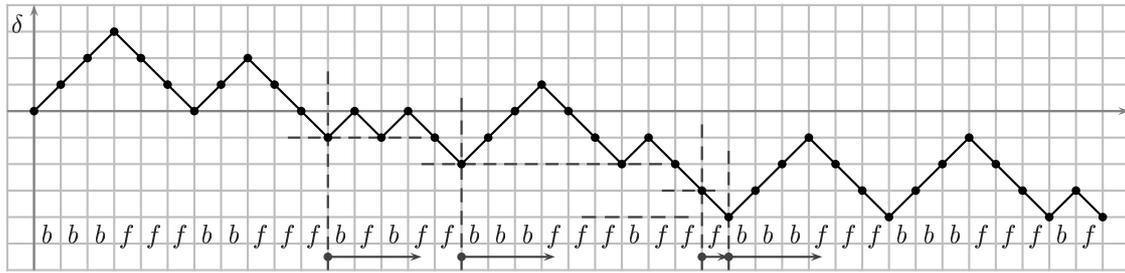
$$\frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n},$$

ainsi que le nombre d'arêtes internes, $n-1$, et de feuilles, $2n+2$, de ces arbres.

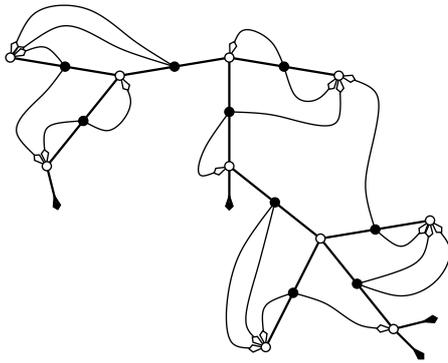
Définissons dans ce cas les arbres bourgeonnants de la façon suivante : sur un arbre ternaire à n nœuds blancs, ajouter sur chacune des $n-1$ arêtes un nœud noir, et fixer sur chacun d'eux deux bourgeons et leurs tiges, pour former des nœuds noirs de degré 4. Cela peut se faire de trois façons différentes pour chaque nœud noir, et le nombre d'arbres bourgeonnants obtenus est donc :

$$3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$

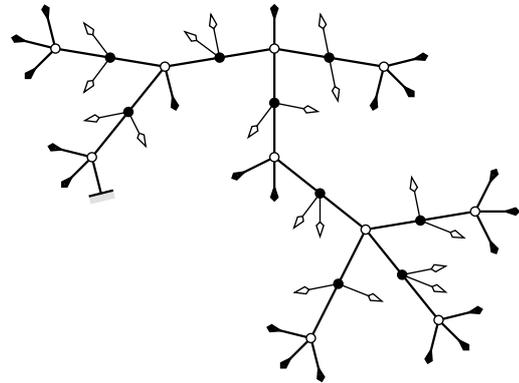
La figure 5.8(b) représente un tel arbre bourgeonnant.



(a) Le mot de bord de l'arbre bourgeonnant de la figure 5.8(b).



(b) Sa clôture partielle.



(c) Un de ses conjugués équilibrés.

FIGURE 5.9 – Clôture partielle des arbres ternaires bourgeonnants.

La clôture partielle de ces arbres est définie comme précédemment ; ces arbres ayant quatre bourgeons de moins que de feuilles, quatre de ces dernières restent nécessairement libres, correspondant aux quatre derniers pas des quatre facteurs de Łukasiewicz du mot de bord vu comme mot cyclique, comme l'illustre la figure 5.9. En conséquence, le nombre d'arbres ternaires bourgeonnants équilibrés à n nœuds blancs est :

$$\frac{4}{2n+2} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}.$$

La clôture complète des arbres bourgeonnants est alors définie de la manière suivante à partir de la clôture partielle : transformer la feuille racine en nœud noir porteur de trois bourgeons, et sa tige en arête interne, sur laquelle la carte obtenue est enracinée, puis apparier les trois bourgeons et les trois feuilles restantes, et fusionner chaque couple en une nouvelle arête. La figure 5.10 illustre cette construction appliquée à l'arbre bourgeonnant équilibré représenté à la figure 5.9(c). La figure 5.12 résume en une page l'ensemble de la construction.

À nouveau, l'algorithme réciproque d'ouverture est basé sur un parcours en largeur de la carte duale en sens indirect.

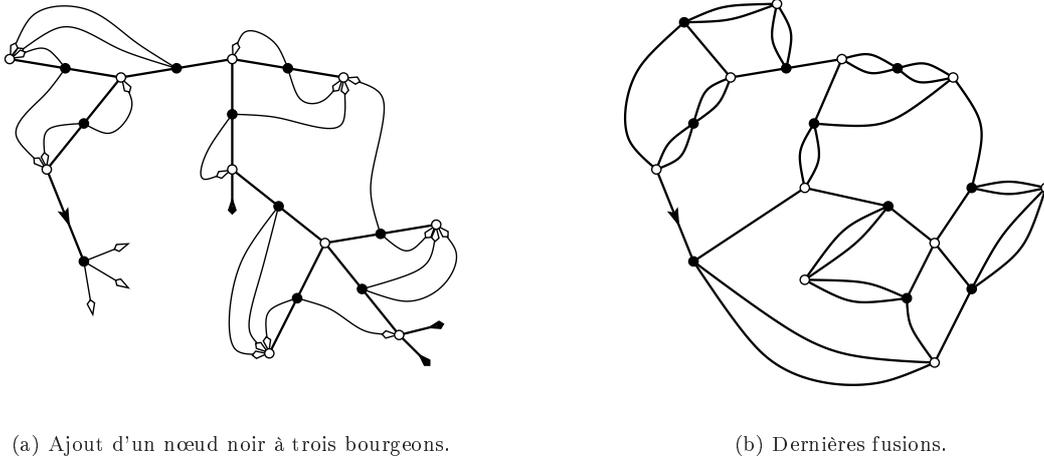


FIGURE 5.10 – Clôture complète des arbres ternaires bourgeonnants.

5.3.3 Un théorème général : les constellations planaires

Les deux exemples développés ci-dessus sont en fait des cas particuliers d'une construction plus générale, due à M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer [21], qui traite le cas des m -constellations planaires selon la distribution des degrés de leurs sommets. Nous allons ici énoncer le théorème qu'ils obtiennent.

DÉFINITION 5.7 Un *arbre m -eulérien* est un arbre dont les sommets sont soit noirs, soit blancs, planté sur une feuille noire, et tel que :

- deux sommets adjacents quelconques sont de couleur différente,
- les nœuds noirs ont pour degré m et pour degré interne⁵ 1 ou 2,
- les nœuds blancs ont un degré multiple de m et, si un nœud blanc a pour degré mi ($i \geq 1$), alors il a exactement $i - 1$ voisins de degré interne 1.

Les feuilles blanches des arbres m -eulériens correspondent aux bourgeons des arbres bourgeonnants, et les feuilles noires aux feuilles. Les arbres bourgeonnants considérés à la section précédente sont donc les arbres 4-eulériens dont tous les nœuds blancs ont exactement degré $m = 4$, et ceux de la section 5.3.1 sont les arbres 2-eulériens dont tous les nœuds blancs ont pour degré $2m = 4$: les nœuds noirs, de degré 2, sont en fait les arêtes de l'arbre bourgeonnant – arêtes internes pour les nœuds de degré interne 2, tiges de bourgeons pour les nœuds de degré interne 1.

En raisonnant comme pour les arbres bourgeonnants des deux sections précédentes, on peut facilement énumérer les arbres m -eulériens selon les degrés des nœuds blancs, en se basant sur la formule de F. Harary, G. Prins et W. T. Tutte (corollaire 5.6 page 80) ; on obtient :

PROPOSITION 5.11 Soit $m \geq 2$. Le nombre d'arbres m -eulériens ayant, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, d_i

⁵le degré interne d'un nœud dans un arbre est le nombre de *nœuds* qui lui sont adjacents.

n œuds blancs de degré m_i , est donné par la formule :

$$e_m(d_1, \dots, d_k) = (m-1)^{b-1} \cdot \frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-b+1]!} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{1}{d_i!} \binom{mi-1}{i-1}^{d_i},$$

où $b = \sum d_i$ et $n = \sum id_i$. Ces arbres ont b nœuds blancs, $n-1$ nœuds noirs, $(m-1)n-b+2$ feuilles (noires), et $(m-1)n-b-m+2$ feuilles blanches (bourgeons).

La clôture partielle et les arbres conjugués sont définis comme pour les cas particuliers précédents. Le nombre $E_m(d_1, \dots, d_k)$ d'arbres m -eulériens équilibrés ayant d_i nœuds blancs de degré m_i est alors relié à $e_m(d_1, \dots, d_k)$ de la façon suivante :

$$E_m(d_1, \dots, d_k) = \frac{m}{(m-1)n-b+2} \cdot e_m(d_1, \dots, d_k).$$

La clôture complète d'un arbre m -eulérien équilibré est alors définie, comme à la section précédente, en remplaçant la feuille racine par un nœud noir portant $m-1$ bourgeons (feuilles blanches), puis en fusionnant les couples de feuilles blanches et noires appariées. Le résultat démontré par M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer dans [21] s'énonce alors :

THÉORÈME 5.2 *La clôture complète réalise une bijection de l'ensemble des arbres m -eulériens ayant, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, d_i nœuds blancs de degré m_i , sur l'ensemble des cartes m -eulériennes dont les sommets blancs suivent la même distribution. Celles-ci, ainsi que leurs duales les m -constellations planaires, sont donc énumérées par :*

$$m(m-1)^{b-1} \frac{[(m-1)n]!}{[(m-1)n-b+2]!} \prod_{i=1}^k \frac{1}{d_i!} \binom{mi-1}{i-1}^{d_i}.$$

— o —

5.4 Que montre réellement ce théorème, ou comment jongler avec les cartes

Le but de cette section est de convaincre le lecteur de la portée du théorème 5.2 : s'il ne résout naturellement pas tous les problèmes d'énumération de cartes imaginables, il peut cependant s'appliquer à un très large éventail de familles de cartes, en le couplant par exemple avec les manipulations classiques sur les cartes. Nous allons illustrer ce propos en citant quelques avatars des deux familles choisies comme exemples dans ce chapitre.

— o —

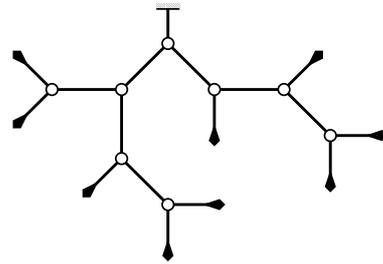
5.4.1 La dualité

Il s'agit certainement de l'opération la plus simple et la plus naturelle qui puisse être effectuée sur une carte :

Il existe

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

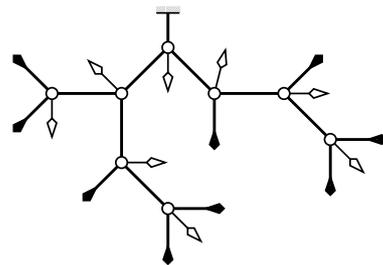
arbres binaires plantés à n nœuds et $n+2$ feuilles.



En ajoutant un bourgeon par nœud, on construit

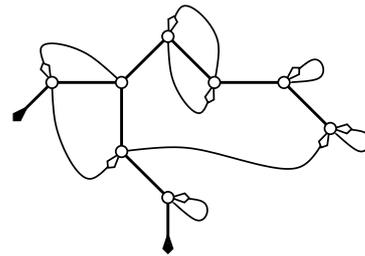
$$3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

arbres bourgeonnants, qui possèdent $n+2$ feuilles et n bourgeons.



La clôture de ces arbres, en couplant bourgeons et feuilles, laisse donc deux feuilles libres.

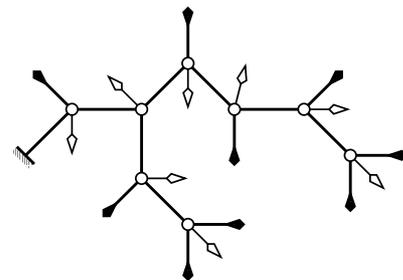
Est équilibré un arbre bourgeonnant dont la racine reste libre.



Seuls

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

arbres binaires bourgeonnants sont donc équilibrés.



Et ces arbres équilibrés correspondent bijectivement aux

$$\frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

cartes 4-régulières.

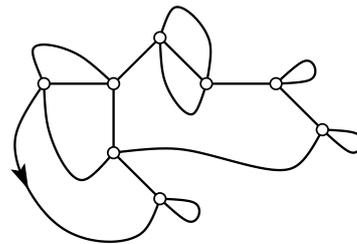
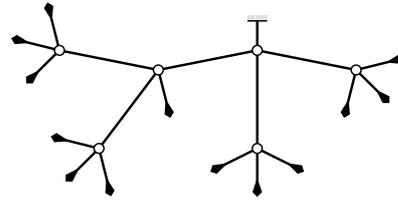


FIGURE 5.11 – Énumération constructive des cartes 4-régulières.

Il existe

$$\frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

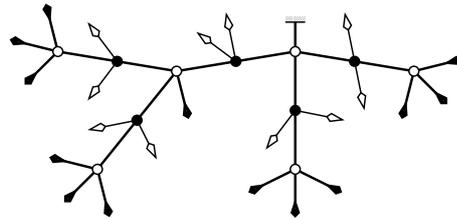
arbres ternaires plantés à n nœuds blancs et $2n+2$ feuilles.



En ajoutant un nœud noir au milieu de chaque arête interne, et deux bourgeons par nœud noir, on construit

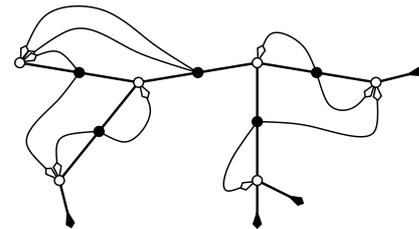
$$3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

arbres bourgeonnants.



Les arbres ternaires bourgeonnants possèdent $2n+2$ feuilles et $2n-2$ bourgeons.

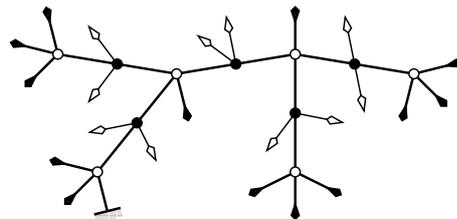
La clôture de ces arbres laisse donc quatre feuilles libres.



Seuls

$$\frac{4}{2n+2} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

arbres ternaires bourgeonnants à n nœuds blancs et $n-1$ nœuds noirs sont donc équilibrés.



Ils correspondent bijectivement aux

$$\frac{4}{2n+2} \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n}$$

cartes 4-régulières biparties à n sommets blancs et n sommets noirs.

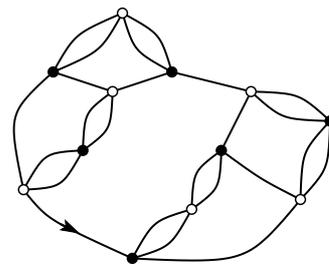


FIGURE 5.12 – Énumération constructive des cartes 4-régulières biparties.

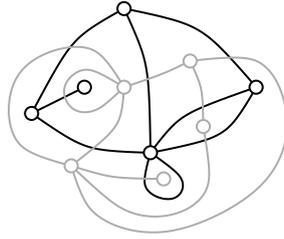


FIGURE 5.13 – Une carte planaire (noire) et sa duale (grise).

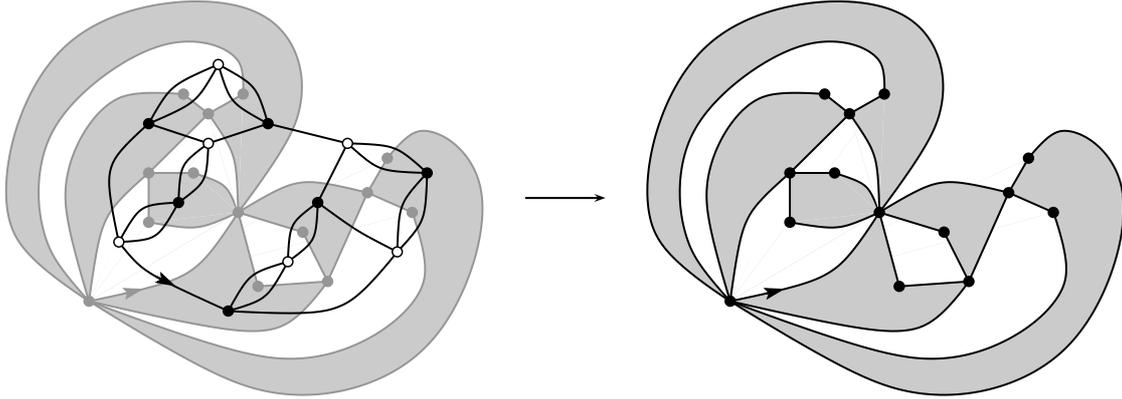


FIGURE 5.14 – D'une carte bipartite 4-régulière à une quadrangulation bicolore.

DÉFINITION 5.8 La *carte duale* \mathcal{C}^* d'une carte non enracinée \mathcal{C} est la carte obtenue à partir de \mathcal{C} en plaçant un sommet dans chaque face de \mathcal{C} , et une arête en travers de chaque arête de \mathcal{C} , pour relier entre eux les sommets de \mathcal{C}^* correspondant à des faces adjacentes de \mathcal{C} . Si \mathcal{C} est enracinée, \mathcal{C}^* est canoniquement enracinée sur la duale de l'arête racine de \mathcal{C} , orientée de telle manière que le sommet racine de \mathcal{C}^* soit le dual de la face racine de \mathcal{C} .

La figure 5.13 illustre cette construction sur un exemple de carte planaire. Remarquons qu'il s'agit bien d'un concept lié aux cartes et non aux graphes sous-jacents puisqu'il repose sur la notion de face, qui n'a pas de sens en termes de graphes. D'autre part, la description « topologique » de la dualité qui a été donnée ne doit pas faire croire que cette notion est propre aux cartes topologiques : la dualité s'exprime également très simplement en termes de permutations sur l'ensemble des brins, puisqu'elle consiste simplement à intervertir les permutations décrivant sommets et faces, tandis que l'involution décrivant les arêtes reste identique. Remarquons enfin que la dualité est une application involutive sur l'ensemble des cartes non enracinées de genre donné, et qu'elle est donc en particulier bijective.

— o —

Les quadrangulations La dualité étant une application bijective, les quadrangulations à n faces et les quadrangulations bicolores à n faces blanches sont respectivement énumérées par les formules 5.3 et 5.4. Les duales des cartes étudiées à la section 5.3.1 sont appelées couramment *quadrangulations* : ce sont les cartes planaires dont toutes les faces ont pour degré 4. Quant aux cartes étudiées à la section 5.3.2, leurs duales sont les *quadrangulations bicolores*, c'est-à-dire les

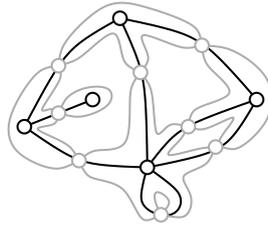


FIGURE 5.15 – Une carte planaire (noire) et sa radiale (grise).

quadrangulations dont les faces peuvent être coloriées en noir et blanc à la manière d'un damier. La figure 5.14 représente la quadrangulation bicolore duale de la carte bipartie 4-régulière de la figure 5.12.

— ○ —

5.4.2 La construction radiale

Une seconde construction classique sur les cartes (planaires) est la suivante :

DÉFINITION 5.9 La *carte radiale* \mathcal{C}^\times d'une carte \mathcal{C} non enracinée est la carte dont les sommets sont les arêtes de \mathcal{C} , et dont les arêtes sont les *coins*⁶ de \mathcal{C} . Les faces de \mathcal{C}^\times correspondent donc aux faces et aux sommets de \mathcal{C} , et peuvent être bicolorées. Si \mathcal{C} est enracinée, \mathcal{C}^\times est canoniquement enracinée par le choix de l'arête racine de \mathcal{C} comme sommet racine de \mathcal{C}^\times , et de la face racine de \mathcal{C} comme face racine de \mathcal{C}^\times .

La figure 5.15 illustre cette construction sur un exemple de carte planaire. Remarquons que, chaque arête étant incidente à quatre coins, la carte radiale d'une carte quelconque est une carte 4-régulière. La construction « duale » de celle-ci est également couramment utilisée :

DÉFINITION 5.10 La *quadrangulation* \mathcal{C}^\diamond d'une carte \mathcal{C} non enracinée est la carte (bipartie) dont les sommets sont les sommets et les faces de \mathcal{C} , et dont les arêtes sont les coins de \mathcal{C} . Les faces de \mathcal{C}^\diamond correspondent donc aux arêtes de \mathcal{C} .

La carte obtenue est alors manifestement une quadrangulation au sens précédent, c'est-à-dire une carte dont toutes les faces ont pour degré 4. De plus, la carte radiale et la quadrangulation d'une carte \mathcal{C} quelconque sont duales l'une de l'autre.

— ○ —

Les cartes planaires enracinées quelconques

LEMME 5.12 *Les cartes planaires enracinées à n arêtes sont en bijection avec les cartes planaires 4-régulières à n sommets.*

⁶Voir la définition page 9.

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que l'application qui à une carte planaire \mathcal{C} associe sa carte radiale \mathcal{C}^\times est bijective ; pour cela, considérons une carte 4-régulière enracinée \mathcal{R} . Les faces de \mathcal{R} peuvent être bicolorées en blanc et noir de telle manière que deux faces adjacentes quelconques soient de couleurs différentes, avec par exemple la face racine blanche, comme l'illustre la figure 5.16(a). On place alors un sommet dans chaque face noire, puis on crée, à travers chaque sommet s de \mathcal{R} , une arête reliant les deux sommets noirs voisins (voir figure 5.16(b)). On obtient ainsi une carte \mathcal{C} qui, enracinée sur l'arête correspondant au sommet racine de \mathcal{R} orientée de telle sorte que la face racine de \mathcal{C} soit la face racine de \mathcal{R} , a manifestement \mathcal{R} pour carte radiale. \square

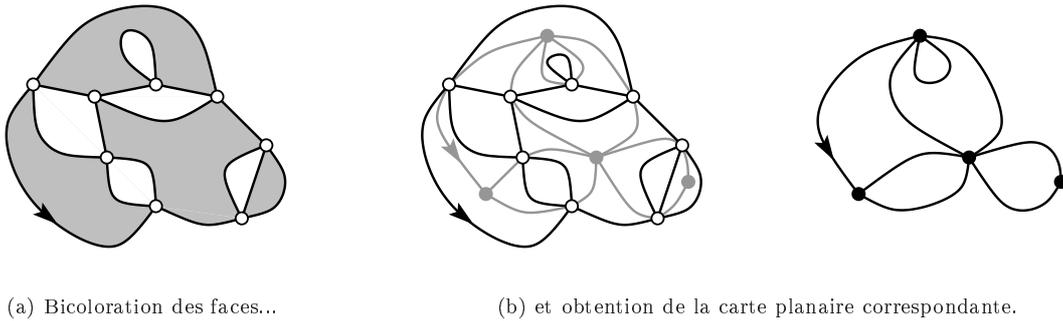


FIGURE 5.16 – Inverse de la construction radiale pour la carte de la figure 5.7.

On obtient donc en corollaire de la démonstration de la section 5.3.1 une démonstration bijective de la formule classique 5.1 (page 76) :

COROLLAIRE 5.13 *Les cartes planaires enracinées à n arêtes sont énumérées par $\frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n! (n+2)!}$.*

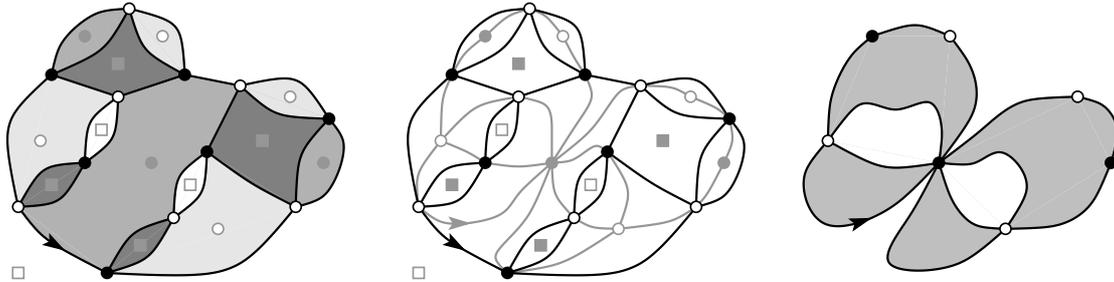
— o —

Les cartes bieulériennes Intéressons-nous maintenant à la restriction de la construction radiale à la famille des cartes *biparties eulériennes*, c'est-à-dire biparties et telles que tous les sommets sont de degré pair. Remarquons au passage que les duales des cartes biparties sont les cartes eulériennes, et que l'ensemble des cartes biparties eulériennes est donc autodual. Ces cartes peuvent donc également être décrites comme les cartes *biparties bicolores*, ou encore les cartes *eulériennes dualement eulériennes*. Nous utiliserons désormais la terminologie de cartes *bieulériennes*.

LEMME 5.14 *Les cartes planaires enracinées bieulériennes à $2n$ arêtes sont en bijection avec les cartes 4-régulières biparties à n sommets blancs et n sommets noirs.*

DÉMONSTRATION. Considérons une carte bieulérienne \mathcal{C} à $2n$ arêtes. Adoptons la convention que le sommet et la face racines de \mathcal{C} sont blancs. En parcourant les faces noires de \mathcal{C} en sens direct, on traverse une arête sur deux de son extrémité blanche vers son extrémité noire, et la suivante de son extrémité noire vers son extrémité blanche, ce qui permet de partitionner l'ensemble des arêtes de \mathcal{C} en deux sous-ensembles ; la carte radiale de \mathcal{C} est donc bipartie.

Réciproquement, soit \mathcal{R} une carte bipartie 4-régulière; étant bipartie, \mathcal{R} a des faces de degré pair. Or le degré des sommets et des faces de \mathcal{C} est exactement donné par le degré des faces correspondantes de \mathcal{R} : \mathcal{C} est donc nécessairement bieulérienne. La figure 5.17 illustre la construction réciproque sur l'exemple de la carte bipartie 4-régulière de la figure 5.12. \square



(a) Coloration des faces...

(b) et obtention de la carte bieulérienne correspondante.

FIGURE 5.17 – Inverse de la construction radiale pour la carte de la figure 5.12.

Remarquons que la coloration des faces d'une carte bipartie 4-régulière n'est jamais que la transposition de l'étiquetage canonique de la 4-constellation duale, avec la convention

$$1 \leftrightarrow \text{carré blanc}, 2 \leftrightarrow \text{rond blanc}, 3 \leftrightarrow \text{carré noir}, 4 \leftrightarrow \text{rond noir}.$$

On obtient ainsi comme corollaire à la construction de la section 5.3.2 une démonstration alternative du résultat suivant, démontré récemment par V. A. Liskovets et T. R. S. Walsh par des méthodes analytiques [95].

COROLLAIRE 5.15 *Le nombre de cartes planaires bieulériennes enracinées à $2n$ arêtes est donné par la formule :*

$$\frac{4 \cdot 3^{n-1} (3n)!}{n! (2n+2)!}.$$

— o —

5.4.3 Les m -constellations quelconques

On peut définir une transformation locale mettant en bijection l'ensemble des m -constellations planaires et les $m+1$ -constellations planaires dont les faces blanches sont de degré exactement $m+1$. En particulier, cette transformation permet de compter les 3-constellations quelconques *via* les cartes 4-régulières biparties.

Pour décrire cette bijection, commençons par étiqueter canoniquement les sommets d'une m -constellation. On construit alors une $m+1$ -constellation en ajoutant dans chaque face blanche un sommet étiqueté $m+1$, puis en remplaçant chaque arête $(m, 1)$ bordant la face par une arête $(m, m+1)$ suivie d'une arête $(m+1, 1)$. La carte ainsi construite est une $m+1$ -constellation dont les faces blanches sont de degré exactement $m+1$, et cette construction est visiblement inversible. On obtient donc le résultat suivant :

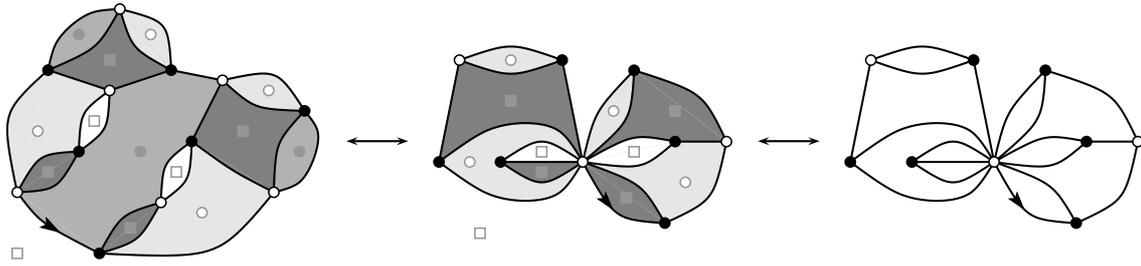
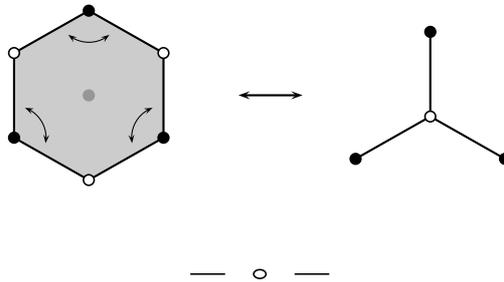


FIGURE 5.18 – Des cartes 4-régulières biparties aux cartes 3-eulériennes quelconques.

COROLLAIRE 5.16 Soit $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Le nombre de m -constellations à n polygones est :

$$\frac{m+1}{(m-1)n+2} \cdot m^{n-1} \cdot \frac{1}{(m-1)n+1} \binom{mn}{n}.$$

La figure 5.18 illustre la construction duale de cette bijection, dans le cas $m = 3$ correspondant aux cartes biparties 4-régulières : comme cela a été mentionné précédemment, la coloration des faces proposée figure 5.17(a) correspond à l'étiquetage canonique des sommets de la 4-constellation duale. La suppression des sommets étiquetés 4 se traduit, pour la carte 4-eulérienne, par le repliement deux par deux des arêtes incidentes aux faces étiquetées 4 (rond noir sur la figure) de la façon suivante :



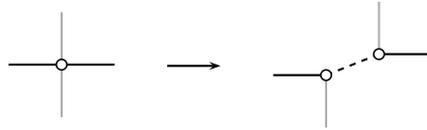
5.4.4 Une famille de cartes colorées

La construction qui va être décrite ici est certainement plus anecdotique que les précédentes ; elle illustre cependant bien le fait que des familles à première vue très différentes peuvent n'être en réalité que des avatars « déguisés » d'une même famille. Cette famille est en fait celle à laquelle nous nous étions initialement intéressés, avant de constater que la formule énumérative que nous avions obtenue était celle des 3-constellations. La démonstration bijective est venue *a posteriori*.

Remarquons tout d'abord que la bicoloration des sommets d'une carte bipartie 4-régulière peut être « déplacée » sur ses arêtes de telle manière que les arêtes des deux couleurs alternent autour de chaque sommet et de chaque face, puisque sommets *et* faces sont de degré pair. La figure 5.19(a) montre la coloration des arêtes de la carte de la figure 5.12. Notons que la bicoloration des arêtes peut également être vue comme une partition de l'ensemble des arêtes en cycles, de telle manière que tous les croisements entre cycles soient *propres*, et que deux cycles qui se croisent soient de couleur différente. Ainsi, la carte de la figure 5.19(a) est formée d'un lacet gris et deux lacets noirs.

Réciproquement, toute carte 4-régulière peut être vue comme une réunion de cycles se croisant proprement, et s'il est possible de colorer ces cycles en deux couleurs de telle manière que deux cycles de même couleur ne s'intersectent pas⁷, alors la carte est bipartite.

Définissons maintenant la transformation suivante sur les cartes 4-régulières biparties :



Elle transforme toute carte 4-régulière bipartie à $2n$ sommets en une carte 3-régulière (*i.e.* cubique) à $4n$ sommets, dont les arêtes sont colorées en trois couleurs, chaque sommet étant adjacent à une arête de chaque couleur, et telle que l'ordre cyclique des couleurs autour de chaque sommet soit le même. Cette construction étant manifestement bijective, ces cartes « cubiques cycliquement colorées » à $4n$ sommets, $6n$ arêtes et $2n - 2$ faces (de degré multiple de 3) sont énumérées par la formule 5.4. La figure 5.19(b) représente la carte cubique cycliquement colorée correspondant à la carte 4-régulière de la figure 5.19(a).

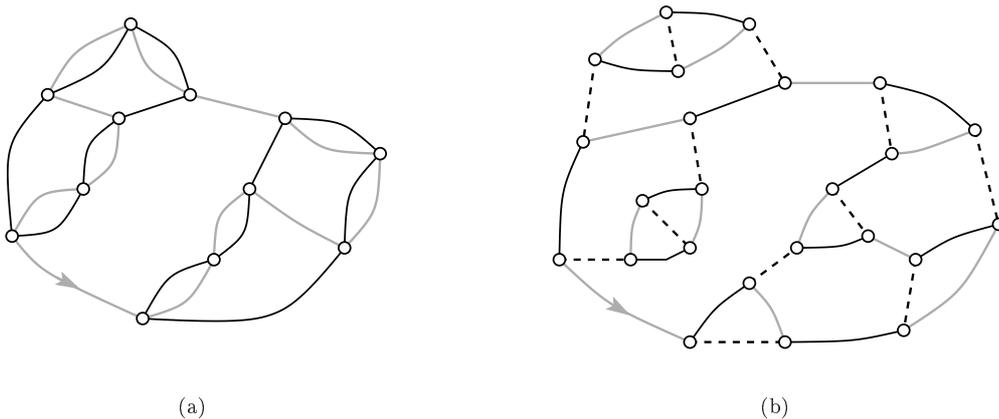


FIGURE 5.19 – Des cartes 4-régulières biparties aux cartes cubiques cycliquement colorées.

— o —

Les quelques constructions présentées ici illustrent bien le caractère protéiforme des cartes : ainsi, les cartes présentées aux figures 5.12, 5.14, 5.17, 5.18 et 5.19 sont autant de facettes d'un seul et même objet. Le théorème 5.2 peut donc permettre d'énumérer de nombreuses familles de cartes. Cependant, parmi les exemples cités ci-dessus, aucune famille n'est définie par d'autres conditions que des conditions *locales* d'adjacence – degré ou bipartition. Ce théorème ne permet absolument pas de s'attaquer à d'autres critères tels le degré de connexité. C'est à ce type de conditions que nous allons nous intéresser dans les deux chapitres qui suivent, d'abord en étudiant une famille de cartes non séparables, puis une famille de cartes 3-connexes.

— o —

⁷en particulier, un cycle ne doit pas s'autointersecter

5.5 Applications à la génération aléatoire et au codage

Il est intéressant de remarquer que les bijections précédentes fournissent des algorithmes efficaces de génération aléatoire uniforme pour chacune des familles de cartes. Ces algorithmes ont tous la même structure :

1. génération aléatoire uniforme d'un (produit de) mot(s) de Łukasiewicz de longueur adéquate ;
2. construction de l'arbre correspondant ;
3. tirage aléatoire (et indépendant) de la position des bourgeons sur chaque nœud ;
4. clôture de l'arbre ;
5. tirage aléatoire d'un des conjugués équilibrés ;
6. transformation locale éventuelle (du type de celles décrites à la section précédente).

Chacune de ces étapes peut se faire en un nombre linéaire d'opérations sur des entiers de l'ordre de n , paramètre réglant la taille des cartes construites. On pourra se référer à [111] pour plus de précisions.

Ces bijections fournissent également des codages compacts des cartes, sous forme d'un mot de Łukasiewicz et d'un mot codant l'emplacement des bourgeons sur l'arbre plan correspondant au mot de Łukasiewicz.



Chapitre 6

Énumération bijective des triangulations sans boucle d'un polygone

Le but de ce chapitre est de définir des arbres bourgeonnants et une méthode de clôture de ces arbres permettant d'énumérer de manière bijective une famille de cartes définies par un autre type de condition que les cartes étudiées au chapitre précédent. Nous allons ici considérer la condition de *non séparabilité*, c'est-à-dire une contrainte de connexité plus forte que précédemment. Peu de résultats bijectifs sont connus dans ce cas ; B. Jacquard et G. Schaeffer [77], ainsi que A. Del Lungo, F. Del Ristoro et J. -G. Penaud [40], ont proposé des méthodes d'énumération basées sur des constructions récursives pour la famille de toutes les cartes non séparables, à laquelle G. Schaeffer [110] a ensuite adapté la méthode de conjugaison d'arbres. Le cas traité dans ce chapitre est celui des triangulations de polygones, *i.e.* les cartes dont toutes les faces sauf éventuellement une sont de degré 3.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec G. Schaeffer [104].



6.1 Préliminaires

6.1.1 Rappels sur la connexité et la dualité

Nous allons ici donner quelques définitions et propriétés liées à la notion de connexité dans les cartes planaires. Rappelons qu'une carte est par définition connexe, puisque ses faces sont homéomorphes à des disques. Nous nous intéressons ici à des contraintes de connexité plus fortes.

DÉFINITION 6.1 Une arête est une *boucle* si elle est incidente deux fois au même sommet. Une arête est un *pont*, ou encore une arête *séparatrice*¹, si elle possède la propriété duale, *i.e.* si elle est

¹Attention, en genre supérieur ces deux notions diffèrent : un pont est défini comme dans le cas planaire, mais

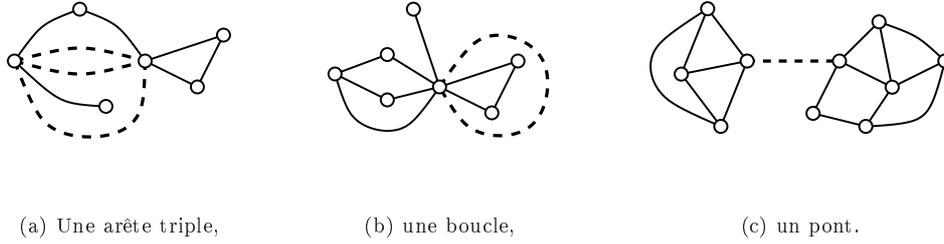


FIGURE 6.1 – Arêtes singulières dans les cartes.

incidente deux fois à la même face. Plusieurs arêtes forment une *arête multiple* si leurs extrémités sont les mêmes. La figure 6.1 illustre ces définitions.

Un sommet est dit *séparateur* s'il est incident deux fois à une même face (qui possède alors la propriété duale). Remarquons que les extrémités d'une arête séparatrice sont des sommets séparateurs, ainsi que – de façon duale – la double extrémité d'une boucle. Une carte est dite *séparable* si elle possède un sommet séparateur.

Remarquons que la terminologie de « séparabilité » est pleinement justifiée. Pour nous en convaincre, définissons une opération de *scission* d'un sommet. Cette opération, illustrée par la figure 6.2, est particulièrement simple à décrire pour les cartes combinatoires : effectuer la scission d'un des sommets d'une carte $(\alpha, \sigma, \varphi)$ consiste à remplacer le cycle correspondant de σ par un produit de cycles de longueur 1, et à modifier φ en conséquence. Un sommet séparateur d'une carte \mathcal{C} est exactement un sommet dont la scission produit un triplet $(\alpha, \sigma', \varphi')$ non transitif, *i.e.* *sépare* \mathcal{C} en plusieurs composantes connexes.

De même, une arête séparatrice d'une carte \mathcal{C} est une arête dont la suppression (ou la coupure en deux arêtes) déconnecte \mathcal{C} .

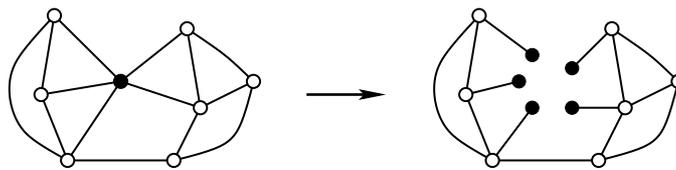


FIGURE 6.2 – Scission d'un sommet.

DEFINITION 6.1 Un *k-cocycle* d'une carte \mathcal{C} est un ensemble de k arêtes dont la suppression déconnecte \mathcal{C} . Un *k-séparateur* d'une carte \mathcal{C} est un ensemble de k sommets de \mathcal{C} dont la scission déconnecte \mathcal{C} .

En d'autres termes, un *k-cocycle* de \mathcal{C} est un ensemble d'arêtes dont le dual forme un cycle dans la carte duale de \mathcal{C} . Quant aux *k-séparateurs*, ils correspondent à des cycles de longueur $2k$ dans la quadrangulation de \mathcal{C} . La figure 6.3 illustre ces caractérisations.

n'est pas nécessairement une arête séparatrice dans le sens qui va être précisé dans la suite de ce paragraphe

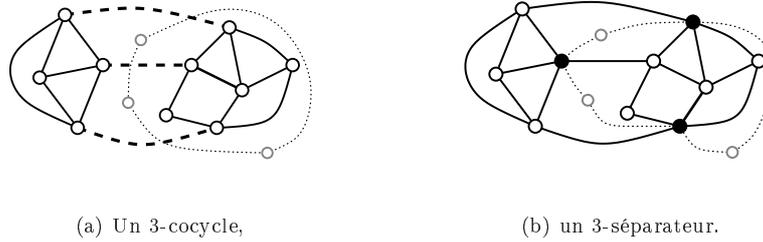


FIGURE 6.3 – Cocycles, séparateurs et dualité.

DEFINITION 6.2 Une carte est dite *k*-arête-connexe si elle ne possède pas de *k*-cocycle, et *k*-connexe si elle ne possède pas de *k*-séparateur. On appelle *degré de connexité* d’une carte \mathcal{C} le plus grand entier *k* tel que \mathcal{C} est *k*-connexe.

D’après la caractérisation des *k*-séparateurs en termes de quadrangulation,

PROPOSITION 6.1 *Le degré de connexité d’une carte est le même que celui de sa duale.*

Rappelons enfin que le *degré* d’une face n’est pas nécessairement le nombre de sommets (ou d’arêtes) qui lui sont incident(e)s, puisqu’une face peut être incidente plusieurs fois à un même sommet ou une même arête. Nous appellerons *polygone* une face dont toutes les incidences sont simples, *i.e.* dont le degré est égal au nombre de sommets (ou d’arêtes) qui lui sont incident(e)s.



6.1.2 Triangulations d’un polygone sans point intérieur

On appelle *triangulation d’un polygone* sans point intérieur une carte enracinée non séparable à *k* sommets dont la face racine est de degré *k* et les autres de degré 3. Les triangulations de polygones de degré inférieur à 5 sont représentées figure 6.4. Il s’agit d’une famille à un paramètre : ces cartes possèdent *k* sommets, *k* − 1 faces (dont le *k*-gone), et 2*k* − 3 arêtes.

Le nombre de triangulations distinctes d’un *k*-gone est

$$\frac{1}{k-1} \binom{2k-4}{k-2},$$

qui est le nombre de Catalan d’ordre *k* − 2 : ces triangulations peuvent en effet être mises en bijection avec les arbres binaires complets à *k* − 2 nœuds, comme l’illustre la figure 6.5.

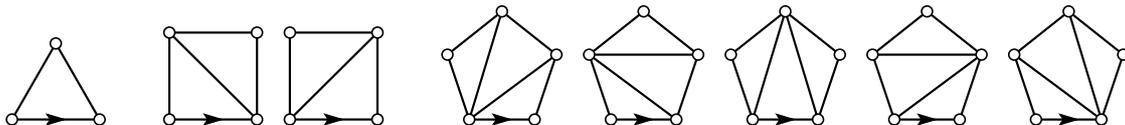


FIGURE 6.4 – Les triangulations des premiers petits polygones.

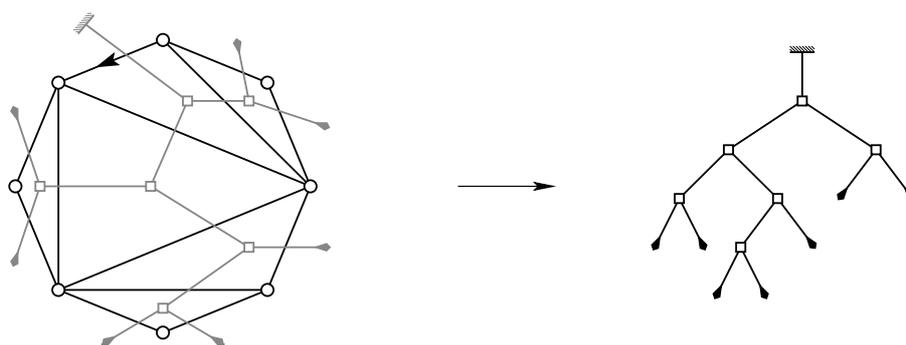


FIGURE 6.5 – Bijection entre triangulations d'un k -gone et arbres binaires à $k - 2$ nœuds.

6.1.3 Triangulations non séparables

D'une façon plus générale, on peut s'intéresser aux cartes inscrites dans un polygone et dont toutes les faces internes sont de degré 3, mais possédant des sommets autres que ceux du polygone.

De telles cartes ne sont cependant pas nécessairement des triangulations « géométriques », au sens où les arêtes ne sont pas toujours représentables par des segments de droites du fait de l'existence possible d'arêtes multiples ou de boucles. Le terme de triangulation peut même être relativement impropre en cas d'existence de boucles : les faces, bien que de degré 3 au sens des cartes, ne sont alors pas des triangles puisqu'elles peuvent n'avoir que deux sommets distincts et non trois. Les triangulations « topologiques » sont donc les triangulations sans boucle, autrement dit les triangulations non séparables.

Différentes familles de triangulations peuvent donc être définies en fonction de motifs interdits, correspondant en fait à des contraintes de connectivité plus ou moins fortes : sans boucle, sans arête multiple, sans triangle séparateur... La figure 6.6 montre des exemples des différents types de triangulations obtenus en imposant ces restrictions, et le tableau 6.7 récapitule les formules énumératives connues.

Remarquons que, quelles que soient les conditions de connexité imposées, les dépendances mutuelles entre les nombres de sommets, arêtes et faces ne sont pas affectées : si k désigne le degré du polygone triangulé, et t le nombre de triangles, alors le nombre de faces est $f = t + 1$ et le

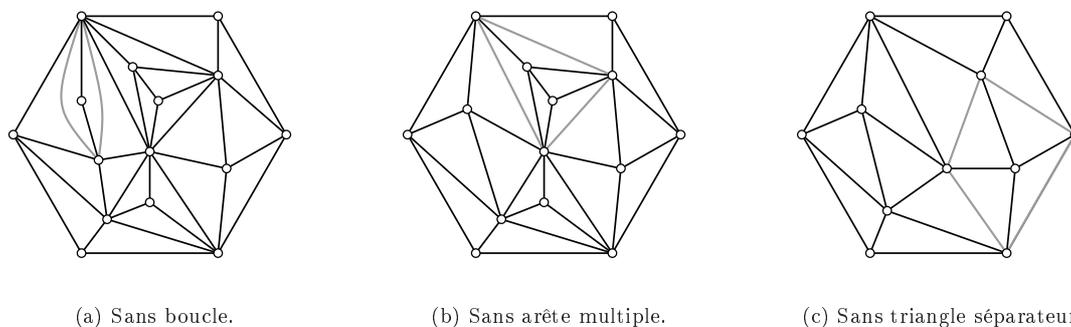


FIGURE 6.6 – Différents types de triangulations d'un hexagone.

	triangulations planes à $2n$ faces	triangulations d'un k -gone en $k + 2n$ triangles
sans boucle (2-connexes)	$\frac{2}{2n+2} \cdot \frac{2^n}{2n+1} \cdot \binom{3n}{n}$	$\frac{2^{n+2} \cdot (2k+3n-1)! (2k-3)!}{(n+1)! (2k+2n)! (k-2)!^2}$
sans arête multiple (3-connexes)	$\frac{2 \cdot (4n-3)!}{n! (3n-1)!}$	$\frac{2 \cdot (2k-3)! (2k+4n-1)!}{(k-1)! (k-3)! (n+1)! (2k+3n)!}$
sans triangle séparateur (4-connexes)	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{3n-i-1}{n-i} \binom{2i}{2}$	$\frac{(2k-4)! (k+3n-1)!}{(n+1)! (k-1)! (k-4)! (k+2n)!}$

TABLEAU 6.7 – Formules énumératives pour diverses familles de triangulations.

nombre a d'arêtes vérifie $2a = k + 3t$, puisque chaque arête est incidente à deux faces, et chaque face – sauf le polygone – est incidente à trois arêtes. Cela montre que la parité de t est celle de k , et donne le nombre s de sommets grâce à l'équation d'Euler. En posant $t = k + 2n$, avec $n \geq -1$, on obtient finalement :

$$f = k + 2n + 1, \quad a = 2k + 3n, \quad \text{et} \quad s = k + n + 1.$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons désormais nous intéresser exclusivement aux triangulations non séparables. On notera $\tilde{\mathcal{T}}_{k,n}$ l'ensemble des triangulations non séparables d'un k -gone en $k + 2n$ triangles, et $\tilde{T}_{k,n}$ son cardinal².

— o —

6.1.4 La formule de Mullin

La formule énumérative des triangulations non séparables d'un polygone en fonction du nombre de points intérieurs a été énoncée en 1965 par R. C. Mullin dans [100]. Cet article s'inscrit dans la lignée des « census articles » de W. T. Tutte évoqués au chapitre 5 ([121, 122, 123]), dans lesquels l'auteur dénombre plusieurs familles de cartes, en particulier les triangulations planes non séparables :

$$T_n = \tilde{T}_{3,n-2} = \frac{2^{n+1}(3n)!}{n!(2n+2)!}.$$

Les preuves reposent sur la méthode esquissée page 75, qui consiste à déterminer une décomposition récursive des cartes de la famille concernée pour en déduire une équation sur sa série génératrice qui peut être résolue par la méthode quadratique. Nous allons ici illustrer cette méthode en présentant de façon plus précise la démonstration de R. C. Mullin.

— o —

²Le lecteur voudra bien pardonner l'emploi de ces notations particulièrement – et apparemment inutilement – inesthétiques, dont le but est de préserver les notations $\mathcal{T}_{k,n}$ et $T_{k,n}$ pour un usage ultérieur.

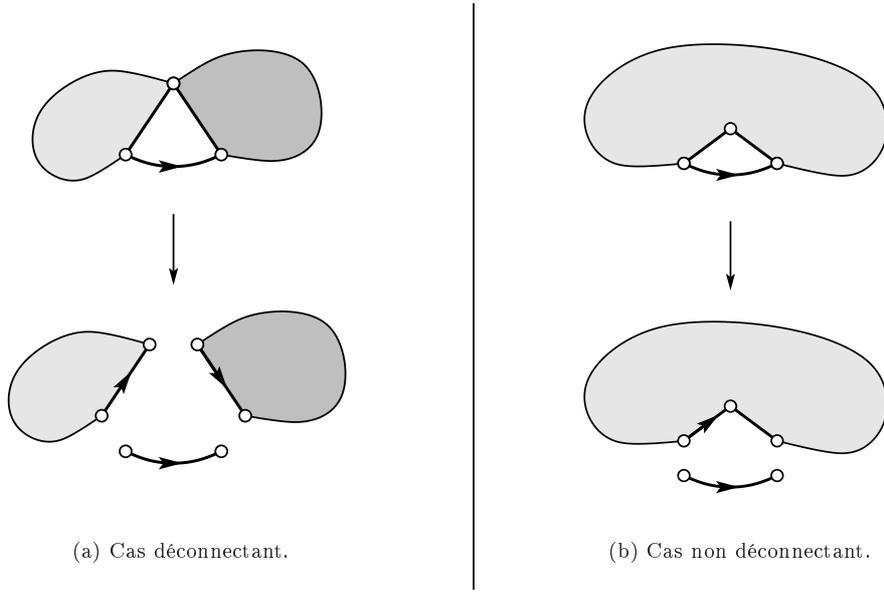


FIGURE 6.8 – Décomposition récursive des triangulations non séparables.

Détermination d'une équation fonctionnelle Soit δ la carte formée de deux sommets et d'une seule arête :

$$\delta = \bullet \longrightarrow \bullet$$

On note $\tilde{\mathcal{T}}$ l'ensemble formé des cartes planaires non séparables dont toutes les faces autres que la face racine sont de degré 3 : il s'agit donc de l'ensemble formé de δ et des triangulations de polygones. Enfin, soit \mathcal{S} le sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{T}}$ formé des cartes dont la face racine est de degré 2 (y compris δ , donc).

Considérons un élément T de $\tilde{\mathcal{T}} \setminus \{\delta\}$, c'est-à-dire une triangulation non séparable d'un k -gone. Son arête racine $r = (s_1, s_2)$ appartient à deux faces, la face racine et un triangle t . Soit s le sommet de ce triangle opposé à l'arête r . La suppression de r donne une nouvelle triangulation T' , canoniquement enracinée sur l'arête (s_1, s) , dont la face racine est incidente à une arête de plus que celle de T . Deux cas distincts se présentent, comme le montre la figure 6.8 :

- si s appartient à la face racine de T , il sépare T' en deux triangulations non séparables de polygones, la première canoniquement enracinée sur (s_1, s) et la seconde sur (s, s_2) .
- sinon, T' est une triangulation non séparable d'un $(k+1)$ -gone.

De cette décomposition découle l'isomorphisme suivant :

$$\tilde{\mathcal{T}} \cong \{\delta\} \cup \{\delta\} \times \tilde{\mathcal{T}}^2 \cup \{\delta\} \times (\tilde{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{S}). \quad (6.1)$$

On peut en déduire une équation fonctionnelle pour la série génératrice bivariée $\tilde{T}(x, y)$ de $\tilde{\mathcal{T}}$ définie par

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_{k,n} x^k y^n$$

où $t_{k,n}$ désigne le nombre d'éléments de $\tilde{\mathcal{T}}$ ayant une face racine de degré k et n faces internes de degré 3. Cette équation fait également intervenir la série génératrice de \mathcal{S}

$$S(y) = [x^2] \tilde{T}(x, y).$$

La traduction littérale de la décomposition 6.1 en termes de séries génératrices donne l'équation suivante :

$$\tilde{T}(x, y) = x^2 + \frac{y}{x}\tilde{T}(x, y)^2 + \frac{y}{x}[\tilde{T}(x, y) - x^2S(y)], \quad (6.2)$$

soit, en multipliant par xy :

$$y^2\tilde{T}(x, y)^2 + (y-x)y\tilde{T}(x, y) + x^3y - x^2y^2S(y) = 0.$$

— o —

Résolution par la méthode quadratique Il s'agit d'une équation du second degré en \tilde{T} dont on peut calculer le discriminant :

$$\Delta(x, y) = [2y\tilde{T}(x, y) + y - x]^2 = 4x^2y^2S(y) - 4x^3y + (y - x)^2.$$

La méthode quadratique consiste à introduire une application α telle que

$$\Delta(\alpha(y), y) = 0.$$

Alors l'égalité suivante est nécessairement également vérifiée :

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right|_{x=\alpha(y)} = 0.$$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4\alpha^2y^2S + (y - \alpha)^2 - 4\alpha^3y = 0 \\ 8\alpha y^2S + 2(\alpha - y) - 12\alpha^2y = 0 \end{cases}$$

En combinant ces deux équations de manière à éliminer S , on obtient

$$y = \alpha(1 - 2\alpha^2), \quad \text{ou encore} \quad \alpha = y \cdot \frac{1}{1 - 2\alpha^2}.$$

En réinjectant cette égalité dans la première équation du système précédent, on obtient l'expression suivante de S en fonction de α :

$$S = \frac{1 - 3\alpha^2}{(1 - 2\alpha^2)^2}.$$

Cela permet, au passage, de déterminer S par inversion de Lagrange, puisque $\alpha = y \cdot (1 - 2\alpha^2)^{-1}$:

$$[y^n]S = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \frac{1}{(1 - 2u^2)^n} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1 - 3u^2}{(1 - 2u^2)^2} \right),$$

Ce qui donne finalement le nombre de triangulations d'un bigone en $2n$ triangles :

$$\tilde{T}_{2, n-1} = [y^{2n}]S = \frac{2^{n+1}(3n)!}{n!(2n+2)!}.$$

Mais surtout, cela permet d'éliminer S dans l'expression de Δ , ce qui donne, en fonction de x et de α :

$$\Delta = (1 - 2\alpha^2)(1 - 2\alpha^2 - 4\alpha x)(\alpha - x)^2.$$

Donc l'une des racines de Δ est donnée par l'égalité :

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = (x - \alpha)(1 - 2\alpha^2) \left(1 - \frac{4\alpha x}{1 - 2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{x - y \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{2y} = \frac{x - \alpha(1 - 2\alpha^2)}{2\alpha(1 - 2\alpha^2)} \pm \frac{x - \alpha}{2\alpha} \left(1 - \frac{4\alpha x}{1 - 2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x\alpha}{1 - 2\alpha^2} + \frac{x - \alpha}{2\alpha} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4\alpha x}{1 - 2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

En utilisant le développement en série entière de $(1 + 4z)^{\frac{1}{2}}$:

$$(1 + 4z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot (2k)!}{(k+1)! k!} z^{k+1} = 1 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_k z^{k+1}$$

(où Γ_k désigne le k -ième nombre de Catalan), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{x\alpha}{1 - 2\alpha^2} + \frac{x - \alpha}{2\alpha} \left[1 \pm \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_k \frac{\alpha^{k+1} x^{k+1}}{(1 - 2\alpha^2)^{k+1}}\right)\right] \\ &= \frac{x\alpha}{1 - 2\alpha^2} + \frac{x - \alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_k \frac{\alpha^{k+1} x^{k+1}}{(1 - 2\alpha^2)^{k+1}}, \end{aligned}$$

où la racine « négative » de Δ a été choisie pour satisfaire les conditions $[x^0] \tilde{T} = [x^1] \tilde{T} = 0$. En conséquence, pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} [x^k] \tilde{T} &= \Gamma_{k-2} \frac{\alpha^{k-2}}{(1 - 2\alpha^2)^{k-1}} - \Gamma_{k-1} \frac{\alpha^k}{(1 - 2\alpha^2)^k} \\ &= \Gamma_{k-2} \frac{y^{k-2}}{(1 - 2\alpha^2)^{2k-3}} - \Gamma_{k-1} \frac{y^k}{(1 - 2\alpha^2)^{2k}} \end{aligned}$$

donc pour tout $k \geq 2$ et tout $n \geq k - 2$,

$$[x^k y^n] = \Gamma_{k-2} [y^{n-k+2}] \frac{1}{(1 - 2\alpha^2)^{2k-3}} - \Gamma_{k-1} [y^{n-k}] \frac{1}{(1 - 2\alpha^2)^{2k}}.$$

Le théorème d'inversion de Lagrange permet de déterminer les coefficients du développement en série entière de l'application $y \mapsto (1 - 2\alpha(y^2))^{-k}$, pour tout $k \geq 0$:

$$[y^m] \frac{1}{(1 - 2\alpha^2)^k} = \frac{1}{m} [u^{m-1}] \frac{4ku}{(1 - 2u^2)^{m+k+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \frac{k(k+3p-1)! 2^p}{p!(k+2p)!} & \text{si } m = 2p. \end{cases}$$

Ceci confirme que les seuls coefficients non nuls de \tilde{T} correspondent aux monômes de la forme $x^k y^{k+2n}$, avec $k \geq 2$ et $n \geq -1$, et on obtient donc finalement le théorème suivant [100] :

THÉORÈME 6.1 (MULLIN) *Soit $k \geq 2$ et $n \geq -1$ deux entiers. Le nombre de triangulations non séparables d'un k -gone enraciné en $k + 2n$ triangles est donné par la formule :*

$$\tilde{T}_{k,n} = |\tilde{\mathcal{T}}_{k,n}| = \frac{2^{n+2} (2k + 3n - 1)! (2k - 3)!}{(n + 1)! (2k + 2n)! (k - 2)!^2}. \quad (6.3)$$

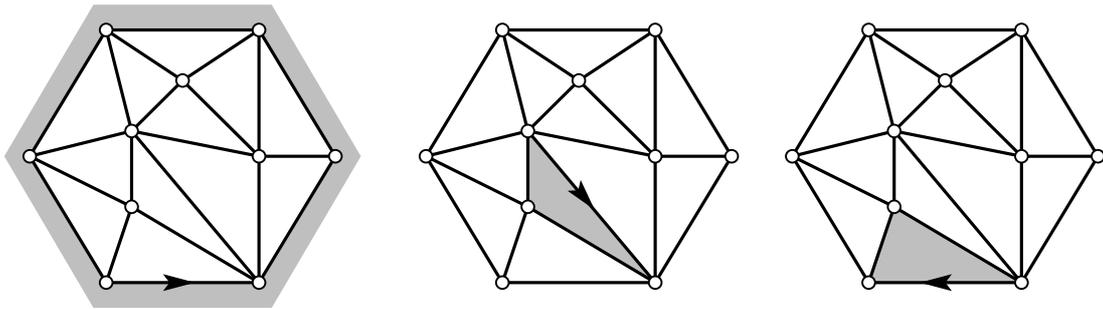
Cette formule, si elle est loin d'être aussi simple que les quatre formules présentées page 76, a cependant des caractéristiques communes. La suite de ce chapitre sera consacrée à sa démonstration constructive en suivant le même principe qu'au chapitre 5, adapté pour tenir compte de la contrainte supplémentaire de non séparabilité que nous avons ici imposée.



6.1.5 Triangulations enracinées

La formule énumérative que nous allons montrer bijectivement concerne une famille légèrement différente, plus adaptée à une démonstration reposant sur la conjugaison d'arbres.

DÉFINITION 6.2 On appelle *triangulation enracinée* d'un k -gone une carte plane enracinée possédant une face *spéciale* de degré k et des faces de degré 3, la face racine n'étant pas nécessairement la face de degré k . La figure 6.9 montre quelques exemples de telles cartes³.



(a) L'une enracinée sur l'hexagone,

(b) les deux autres qui ne le sont pas.

FIGURE 6.9 – Trois triangulations enracinées d'un hexagone.

Pour tout couple (k, n) d'entiers tels que $k \geq 2$ et $n \geq -1$, on note $\mathcal{T}_{k,n}$ l'ensemble des triangulations enracinées non séparables d'un k -gone en $k + 2n$ triangles. Le cardinal de $\mathcal{T}_{k,n}$ est naturellement relié à celui de $\tilde{\mathcal{T}}_{k,n}$ selon la formule suivante :

$$k T_{k,n} = 2(2k + 3n) \tilde{T}_{k,n}.$$

En effet, toute triangulation d'un k -gone doublement enracinée avec l'une de ses deux arêtes racines sur le polygone et l'autre placée de façon quelconque peut au choix être considérée comme une triangulation enracinée dont une des k arêtes du polygone est distinguée, ou comme une triangulation d'un k -gone enraciné dont un quelconque des $2(2k + 3n)$ brins est distingué.

En termes de triangulations enracinées, la formule de Mullin s'exprime donc :

$$T_{k,n} = 2^{n+3} \frac{(2k + 3n)!(2k - 3)!}{k(n + 1)!(2k + 2n)!(k - 2)!^2}$$

³Leurs faces racines respectives sont représentées grisées.

ou encore :

$$T_{k,n} = \frac{2^{n+2}}{2k+2n} \binom{2k-2}{k} \binom{2k+3n}{n+1}. \quad (6.4)$$

— o —

Cartes quasi-cubiques Par dualité, la formule précédente énumère également les duales des triangulations enracinées, à savoir les cartes *quasi-cubiques* non séparables :

DÉFINITION 6.3 Une carte *quasi-cubique* est une carte (enracinée) dont l'un des sommets, appelé sommet *spécial*, a un degré quelconque, et dont tous les autres sommets sont de degré 3. On note $\mathcal{C}_{k,n}$ l'ensemble des cartes enracinées non séparables possédant un sommet spécial de degré k et $k+2n$ de degré 3.

Les conditions de degré sur les sommets des cartes duales des triangulations de polygones sont évidentes ; quant à la non séparabilité, le lien entre dualité et séparabilité a été évoqué à la section 6.1.1. La figure 6.10 montre une triangulation d'hexagone (non enracinée) et sa duale.

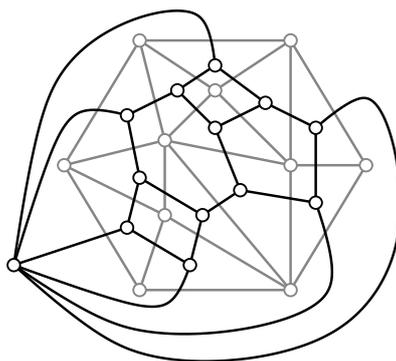


FIGURE 6.10 – La carte quasi-cubique duale de la triangulation de la figure 6.9.

— o —

6.2 Construction de la formule

Le but de cette section est de construire une famille d'objets naturellement énumérée par la formule 6.4, en vue d'exhiber une bijection entre cette famille et celle des cartes quasi-cubiques. Nous allons, comme au chapitre 5, chercher à appliquer le principe de conjugaison à une famille d'arbres bourgeonnants convenablement choisie.

— o —

Cas des triangulations planes Comme la famille d'arbres (non bourgeonnants) sur laquelle nous pourrions nous appuyer ne saute pas aux yeux, nous nous intéressons d'abord au cas particulier $k=3$, pour lequel la formule, sensiblement plus simple, est aussi plus éclairante. Rappelons tout d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 6.4 On appelle *triangulation plane* une carte planaire enracinée dont toutes les faces sont de degré 3. Soit m un entier. On note $\tilde{\mathcal{T}}_m$ l'ensemble des triangulations planes non séparables, c'est-à-dire sans boucle, à $2m$ faces.

Comme cela a déjà été mentionné, les triangulations planes non séparables ont été énumérées par W. T. Tutte [121] :

$$T_m = |\tilde{\mathcal{T}}_m| = \frac{2^{m+1} (3m)!}{m! (2m+2)!}. \quad (6.5)$$

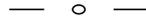
Naturellement, $T_m = \tilde{\mathcal{T}}_{3,m-2}$, et $T_{3,m-2} = 2m T_m$, ce qui traduit le fait qu'un élément de $\mathcal{T}_{3,m-2}$ peut être considéré comme un élément de $\tilde{\mathcal{T}}_m$ dont l'une – quelconque – des faces est distinguée – le 3-gone.

La formule 6.5 peut être réécrite sous la forme :

$$T_m = \frac{2^{m+1}}{2m+2} \cdot \frac{1}{2m+1} \binom{3m}{m} \quad (6.6)$$

où apparaît le nombre d'arbres ternaires complets à m noeuds et $2m+2$ feuilles (racine comprise).

On notera \mathcal{C}_m l'ensemble des cartes duales des triangulations planes en $2m$ triangles, qui sont les cartes cubiques non séparables.



Arbres quasi-ternaires Ce qui précède suggère de chercher à identifier, dans la formule 6.4, un facteur interprétable comme la formule énumérative d'une famille d'arbres dont les arbres ternaires seraient un cas particulier, par exemple une famille d'arbres dont presque tous les noeuds seraient de degré 4, par analogie avec les arbres ternaires, sauf un, *spécial*, dont le degré dépendrait du paramètre k . Au vu du corollaire 5.6, le facteur apparaissant dans la formule 6.4 et candidat à l'énumération d'une telle famille est naturellement

$$A_{k,n} = \binom{2k+3n}{n+1} = \frac{1}{2k+3n+1} \binom{2k+3n+1}{2k+2n-1, n+1, 1}.$$

Les arbres auraient alors $n+1$ noeuds de degré 4 et $2k+2n$ feuilles (racine comprise), ce qui est cohérent à condition que le sommet spécial ait un degré d vérifiant l'égalité suivante :

$$(d-2) + 2(n+1) = (2k+2n) - 2,$$

autrement dit $d = 2k - 2$.

DÉFINITION 6.5 Un arbre *quasi-ternaire* est un arbre plan planté dont l'un des noeuds, dit *noeud spécial*, est de degré pair, et les autres, dits *noeuds génériques*, sont de degré 4.

On note $\mathcal{A}_{k,n}$ l'ensemble des arbres quasi-ternaires dont le noeud spécial est de degré $2k-2$ et possédant $n+1$ noeuds génériques. Les arbres de cette famille ont $2k+2n$ feuilles, et sont énumérés par :

$$A_{k,n} = \binom{2k+3n}{n+1}.$$

La figure 6.13(a) représente un des $\binom{23}{6} = 100947$ arbres appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}_{4,5}$. Le nœud spécial y est symbolisé par un carré, tandis que les autres nœuds sont ronds.



Arbres bourgeonnants Reste à interpréter les autres facteurs de la formule 6.4. Pour cela, nous allons enrichir à nouveau la terminologie pour les arbres introduite page 82.

DÉFINITION 6.6 En plus des deux types de sommets de degré 1, les *feuilles* et les *bourgeons*, et des deux types d'arêtes, les *arêtes internes* et les *tiges*, nous distinguerons trois types de sommets de degré supérieur, les nœuds *génériques*, *pathologiques* et *spéciaux*, et un troisième type d'arêtes, les *liens*. Les feuilles et les bourgeons sont toujours incidents à (portés par) des tiges. Le *degré total* d'un sommet est égal au nombre d'arêtes de type quelconque qui lui sont incidentes, et son *degré strict* se restreint aux arêtes internes et aux tiges.

Le facteur 2^{n+1} de la formule 6.4 est le plus simple à interpréter : les arbres de la famille $\mathcal{A}_{k,n}$ possèdent $n + 1$ nœuds génériques de degré 4, et chacun de ces nœuds peut être coupé en deux de deux façons différentes de telle sorte que chaque « clone » emporte avec lui la moitié des sous-arbres que portait le nœud initial. Au terme de cette « méiose », illustrée⁴ par la figure 6.11, ils donnent naissance à $2n + 2$ nœuds génériques portant chacun un bourgeon et reliés entre eux par un lien.

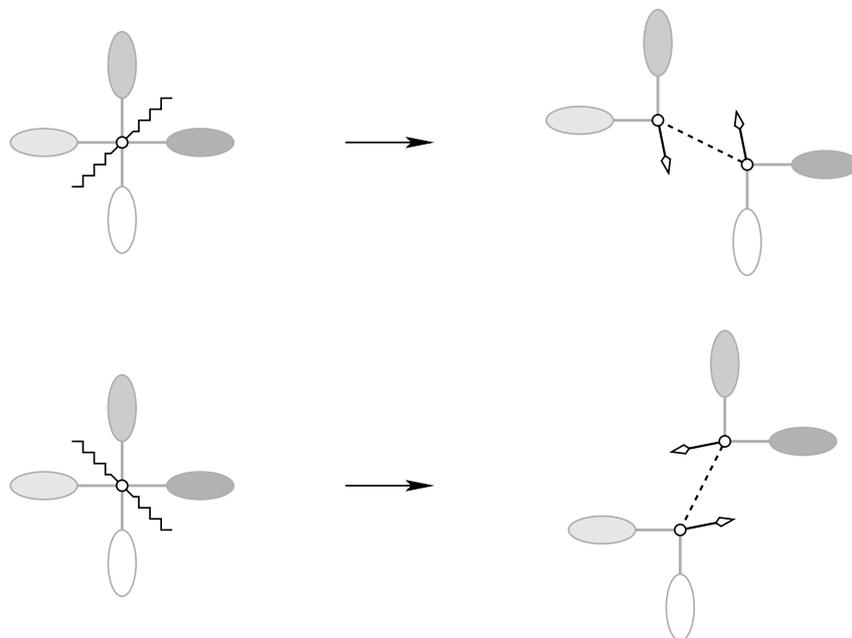


FIGURE 6.11 – Dédoublage des nœuds génériques.

⁴Les sous-arbres sont représentés par des ellipses, les bourgeons sont représentés comme au chapitre 5, et les liens sont représentés par des pointillés. Le noir est utilisé pour les parties de l'arbre affectées par le bourgeonnement, et le gris pour les autres.

Le facteur $\binom{2k-2}{k}$, quant à lui, s'interprète naturellement comme le nombre de façons de répartir les $2k-2$ arêtes incidentes au nœud spécial en deux sous-ensembles de cardinal respectif k et $k-2$. Dans l'optique de produire un nœud de degré k , plaçons un nœud *pathologique* sur chacune des $k-2$ arêtes du second sous-ensemble, et transformons en liens les arêtes reliant le nœud spécial aux nœuds créés. On obtient ainsi un nœud spécial de degré *strict* k . Enfin, pour obtenir des nœuds pathologiques de mêmes degrés (total et strict) que les nœuds génériques, ajoutons deux bourgeons avant le lien autour des nouveaux sommets. Ce mode de reproduction complexe est illustré par la figure 6.12.

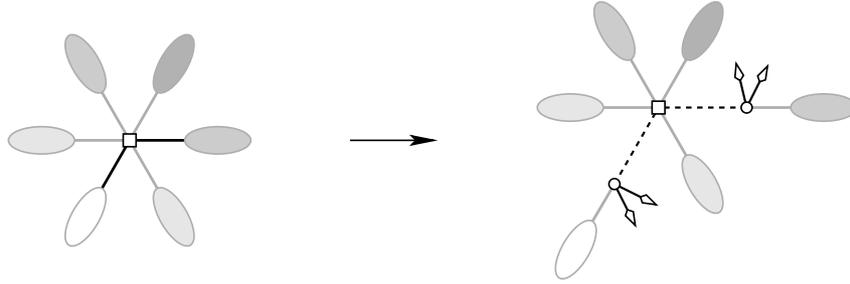


FIGURE 6.12 – Éclatement du nœud spécial.

L'ensemble $\mathcal{B}_{k,n}$ des arbres bourgeonnants ainsi construits a alors pour cardinal

$$B_{k,n} = 2^{n+1} \cdot \binom{2k-2}{k} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}$$

et est constitué d'arbres plans plantés possédant :

- un nœud spécial de degré total $2k-2$ et de degré strict k ,
- $k+2n$ sommets de degré total 4 et de degré strict 3, de deux types différents : $2n+2$ nœuds génériques et $k-2$ nœuds pathologiques,
- $2k+2n$ feuilles, $2k+2n-2$ bourgeons, et leurs $4k+4n-2$ tiges,
- $k+n-1$ liens, parmi lesquels on distingue $n+1$ liens *génériques* réalisant un couplage des nœuds génériques, et $k-2$ liens *spéciaux* reliant le nœud spécial aux nœuds pathologiques,
- $n+1$ arêtes internes.

La figure 6.13(b) représente⁵ l'un des arbres bourgeonnants obtenus à partir de l'arbre quasi-ternaire de la figure 6.13(a). Il appartient à $\mathcal{B}_{4,5}$ et, comme tel, possède un nœud spécial de degré strict 4 et de degré total 6, deux nœuds pathologiques, douze nœuds génériques, dix-huit feuilles et seize bourgeons.

La formule 6.4 se réécrit donc de la manière suivante :

$$T_{k,n} = \frac{2}{2k+2n} B_{k,n}.$$

— ○ —

⁵Sont représentées en gris les parties non modifiées de l'arbre quasi-ternaire initial, à savoir les arêtes internes, les feuilles et leurs tiges, et en noir les bourgeonnements – nœuds clonés, liens, bourgeons et leurs tiges.

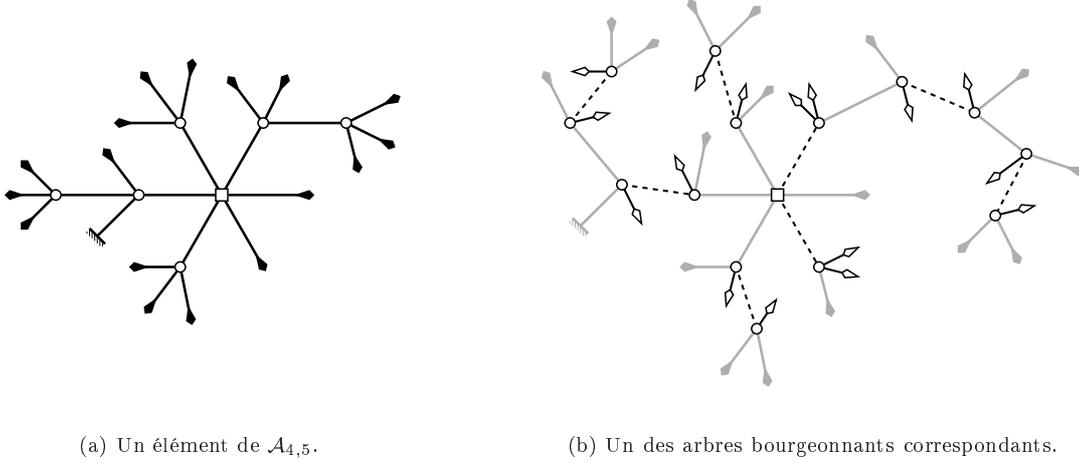


FIGURE 6.13 – Bourgeonnement d'un arbre quasi-ternaire.

Clôture partielle d'un arbre bourgeonnant La clôture partielle d'un arbre B appartenant à $\mathcal{B}_{k,n}$ est définie, comme dans les exemples du chapitre 5, par l'appariement des bourgeons et des feuilles qui se correspondent dans le mot de bord de B , puis par la fusion de chaque couple et de ses tiges en une nouvelle arête, dite *arête de clôture*. Lors de cette opération, les liens sont traités comme des arêtes de l'arbre à part entière : ils en assurent la connexité, et, par là-même, permettent à l'opération de clôture d'être bien définie. La figure 6.14 illustre tout ceci sur un petit exemple.

Les éléments de $\mathcal{B}_{k,n}$ ayant deux bourgeons de moins que de feuilles, deux des $2k + 2n$ feuilles restent libres une fois les appariements effectués. Les arbres bourgeonnants dont la feuille racine reste libre sont dits *équilibrés*, et le sous-ensemble de $\mathcal{B}_{k,n}$ formé des arbres équilibrés est noté $\mathcal{E}_{k,n}$. Considérons un arbre bourgeonnant B de racine r , et l'une de ses deux feuilles libres ℓ . Le conjugué de B enraciné en ℓ est équilibré, et r est l'une quelconque de ses $2k + 2n$ feuilles. D'où l'égalité reliant les cardinaux de $\mathcal{B}_{k,n}$ et $\mathcal{E}_{k,n}$:

$$2 \cdot B_{k,n} = (2k + 2n) \cdot E_{k,n}.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2 *L'ensemble $\mathcal{E}_{k,n}$ des arbres quasi-ternaires bourgeonnants équilibrés à $2n + 2$ nœuds génériques et dont le nœud spécial a degré strict k a pour cardinal :*

$$E_{k,n} = \frac{2}{2k + 2n} \cdot 2^{n+1} \cdot \binom{2k-2}{k} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}.$$

Nous avons donc construit une famille d'arbres bourgeonnants ayant la même formule énumérative que les triangulations non séparables de polygone. Reste à décrire une bijection entre ces deux ensembles.

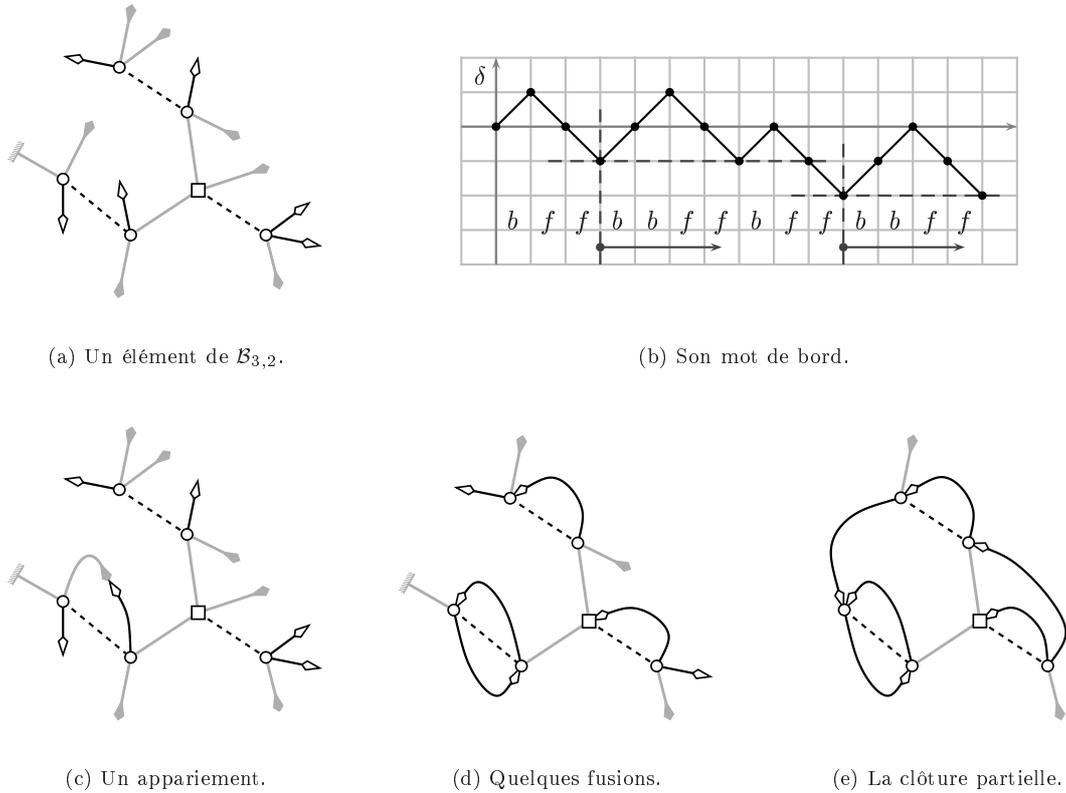


FIGURE 6.14 – Un exemple de clôture partielle d’un arbre bourgeonnant non équilibré.

Clôture complète d’un arbre bourgeonnant équilibré La dernière étape de la clôture est légèrement différente de celles qui ont été décrites au chapitre 5, à cause du rôle particulier que jouent les liens :

DÉFINITION 6.7 La *clôture complète* d’un arbre bourgeonnant équilibré est obtenue à partir de sa clôture partielle en supprimant les liens, puis en fusionnant les deux feuilles libres et leur tige pour former une arête sur laquelle la carte obtenue est canoniquement enracinée.

La figure 6.15 illustre cette construction sur l’arbre bourgeonnant – équilibré – représenté à la figure 6.13(b). Remarquons que la carte obtenue dans ce cas est bien une carte quasi-cubique non séparable. Cependant, s’il est clair que les sommets de l’objet construit à partir d’un élément de $\mathcal{E}_{k,n}$ ont bien les caractéristiques que l’on attend, à savoir qu’il existe un sommet spécial de degré k et $k + 2n$ sommets de degré 3, il n’est au contraire absolument pas évident que cet objet soit non séparable, ni même connexe.

Nous allons consacrer les deux sections suivantes à la démonstration des résultats ci-dessous :

PROPOSITION 6.3 Soit $k \geq 2$ et $n \geq -1$ deux entiers. La clôture complète d’un élément quelconque de l’ensemble $\mathcal{E}_{k,n}$ appartient à $\mathcal{C}_{k,n}$.

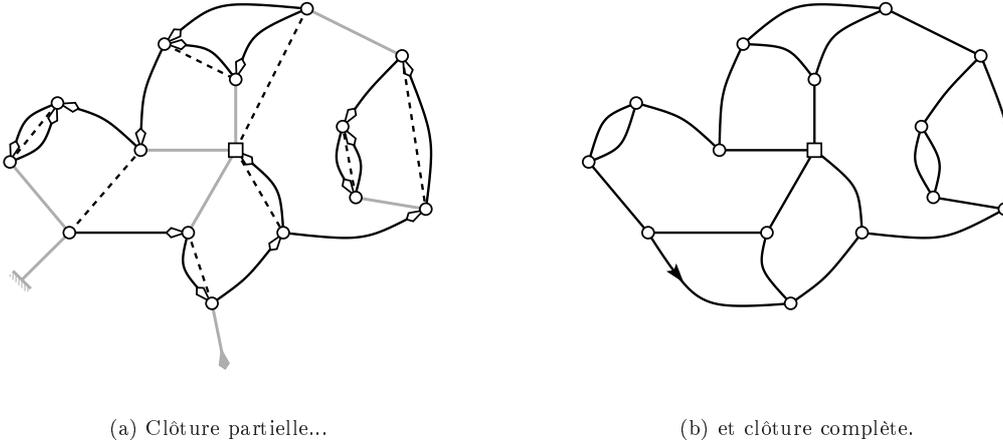


FIGURE 6.15 – Clôture de l'arbre bourgeonnant équilibré de la figure 6.13(b).

THÉORÈME 6.2 Soit $k \geq 2$ et $n \geq -1$ deux entiers. L'opération de clôture complète réalise une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}_{k,n}$ des arbres quasi-ternaires bourgeonnants équilibrés et l'ensemble $\mathcal{C}_{k,n}$ des cartes quasi-cubiques non séparables. En conséquence, ce dernier a pour cardinal :

$$C_{k,n} = \frac{2^{n+2}}{2k+2n} \cdot \binom{2k-2}{k} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}.$$

— o —

Retour au cas des triangulations planes La construction précédente, appliquée à un arbre (strictement) ternaire à m nœuds (génériques), produit dans un premier temps des arbres bourgeonnants à $2m$ nœuds génériques, $2m+2$ feuilles et $2m$ bourgeons ; on note \mathcal{B}_m l'ensemble de ces arbres bourgeonnants. La clôture partielle d'un élément de \mathcal{B}_m laisse deux feuilles libres, et la proportion d'arbres équilibrés dans \mathcal{B}_m est donc $\frac{2}{2m+2}$. Le sous-ensemble \mathcal{E}_m formé des arbres équilibrés a donc pour cardinal :

$$E_m = \frac{2}{2m+2} \cdot 2^m \cdot \frac{1}{2m+1} \binom{3m}{m},$$

qui est le nombre de triangulations planes sans boucle formées de $2m$ triangles (voir la formule 6.5 page 109), ou, par dualité, de cartes cubiques non séparables à $2m$ sommets.

PROPOSITION 6.4 Soit m un entier. La clôture complète d'un élément quelconque de l'ensemble \mathcal{E}_m appartient à \mathcal{C}_m .

THÉORÈME 6.3 La clôture complète réalise une bijection entre l'ensemble \mathcal{E}_m des arbres ternaires bourgeonnants équilibrés et l'ensemble \mathcal{C}_m des cartes cubiques non séparables à $2m$ sommets.

— o —

NOTATION 6.8 On note \mathcal{E} l'ensemble formé des arbres (quasi)-ternaires bourgeonnants équilibrés (c'est-à-dire avec ou sans sommet spécial) :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k \geq 2} \bigcup_{n \geq -1} \mathcal{E}_{n,k} \cup \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{E}_m.$$

On note \mathcal{N} l'ensemble des arbres bourgeonnants *non enracinés*. Chaque élément de \mathcal{N} correspond donc à un ou deux éléments de \mathcal{E} , selon son groupe d'automorphismes.

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k \geq 2} \bigcup_{n \geq -1} \mathcal{N}_{n,k} \cup \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{N}_m.$$

Enfin, on note \mathcal{C} l'ensemble des cartes cubiques ou quasi-cubiques non séparables.

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k \geq 2} \bigcup_{n \geq -1} \mathcal{C}_{n,k} \cup \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{C}_m.$$

— o —

6.3 La clôture complète produit des cartes non séparables

Soit B est un arbre bourgeonnant équilibré appartenant à \mathcal{E} . Le but de cette section est de démontrer les propositions 6.3 et 6.4, autrement dit de montrer que la clôture complète de B est une carte cubique ou quasi-cubique non séparable, appartenant à \mathcal{C}_m (resp. $\mathcal{C}_{k,n}$) si B appartient à \mathcal{E}_m (resp. $\mathcal{E}_{k,n}$).

Notons tout d'abord que tout élément de $\mathcal{E}_{k,n}$ possède un nœud spécial de degré total $2k - 2$, et de degré strict k , et $k + 2n$ nœuds de degré total 4, et de degré strict 3. Quant aux éléments de \mathcal{E}_m , leurs $2m$ nœuds ont pour degré total 4 et pour degré strict 3. Or le passage de la clôture partielle à la clôture complète, en supprimant les liens, transforme tout sommet de degré strict d en sommet de degré d . La carte obtenue par clôture complète d'un élément de $\mathcal{E}_{k,n}$ (resp. \mathcal{E}_m) a donc exactement un sommet de degré k et $k + 2n$ sommets de cubiques (resp. $2m$ sommets cubiques). Elle appartient donc à \mathcal{C} si et seulement si elle est non séparable.

Observons que, puisque l'appariement des bourgeons et des feuilles ne dépend que de la classe de conjugaison de l'arbre bourgeonnant considéré, la non séparabilité de sa clôture complète est en fait une propriété de l'arbre non planté sous-jacent, indépendamment de l'enracinement. Par commodité, nous nous autorisons donc à considérer désormais un élément N quelconque de \mathcal{N} . La définition des clôtures partielle et complète des éléments de \mathcal{N} ne pose aucune difficulté, puisqu'elle ne diffère des définitions précédentes que par le fait que les cartes considérées ne sont pas enracinées. Nous allons donc nous attacher à la démonstration du fait que la clôture complète de N est non séparable, ce qui achèvera la démonstration des propositions 6.3 et 6.4.

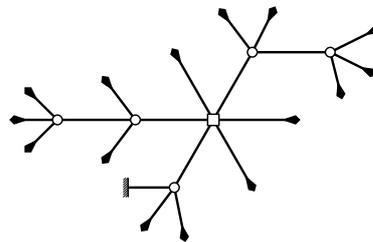
Remarquons tout d'abord que, dans une carte quelconque, un sommet cubique séparateur est nécessairement incident à une arête séparatrice. Les notions de 2-connexité et de 2-arête-connexité se rejoignent donc dans le cas des cartes cubiques. Il est donc suffisant, pour montrer que la clôture de N est non séparables, de montrer d'une part qu'elle ne possède pas d'arête séparatrice, et d'autre part que son éventuel sommet spécial n'est pas séparateur.

— o —

Il existe

$$\binom{2k+3n}{n+1}$$

arbres quasi-ternaires plantés à un nœud spécial de degré $2k-2$, $n+1$ nœuds génériques, et $2k+2n$ feuilles.

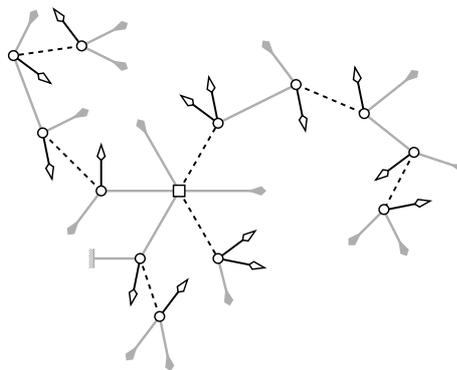


En appliquant les transformations présentées aux figures 6.11 et 6.12, on construit

$$2^{n+1} \cdot \binom{2k-2}{2} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}$$

arbres quasi-ternaires bourgeonnants.

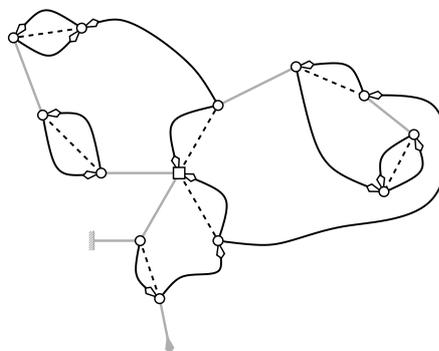
Ces arbres bourgeonnants possèdent $2k+2n$ feuilles et $2k+2n-2$ bourgeons.



La clôture partielle de ces arbres laisse donc deux feuilles libres. Seuls

$$\frac{2}{2k+2n} \cdot 2^{n+1} \cdot \binom{2k-2}{2} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}$$

arbres quasi-ternaires bourgeonnants à un nœud spécial de degré $2k-2$, $k-2$ nœuds pathologiques, et $2n+2$ nœuds génériques sont donc équilibrés.



Ils correspondent bijectivement aux

$$\frac{2}{2k+2n} \cdot 2^{n+1} \cdot \binom{2k-2}{2} \cdot \binom{2k+3n}{n+1}$$

cartes quasi-cubiques non séparables à un sommet spécial de degré k et $2k+2n$ sommets de degré 3.

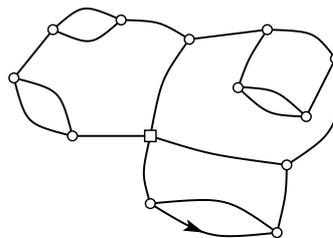


FIGURE 6.16 – Énumération constructive des cartes quasi-cubiques non séparables

6.3.1 Lemmes préliminaires sur la structure des arbres bourgeonnants

Le but de cette section est de clarifier certaines propriétés des arbres bourgeonnants, qui permettent de mieux appréhender leur structure et, par là-même, celle de leur clôture complète.

DÉFINITION 6.9 Soit N un élément de \mathcal{N} , et $e = (s_1, s_2)$ une de ses arêtes. On appelle *décomposition de N en e* l'opération consistant à scinder e en deux, pour former deux tiges e_1 et e_2 incidentes respectivement à s_1 et s_2 et à deux feuilles f_1 et f_2 . On obtient ainsi deux sous-arbres de N notés respectivement $N_1(e)$ et $N_2(e)$, canoniquement enracinés sur f_1 et f_2 , et appelés *sous-arbres de N en e* (voir la figure 6.17).

$N_1(e)$ et $N_2(e)$ sont donc les deux sous-arbres de N dont la réunion couvre N et dont l'intersection est formée de e et de ses extrémités.

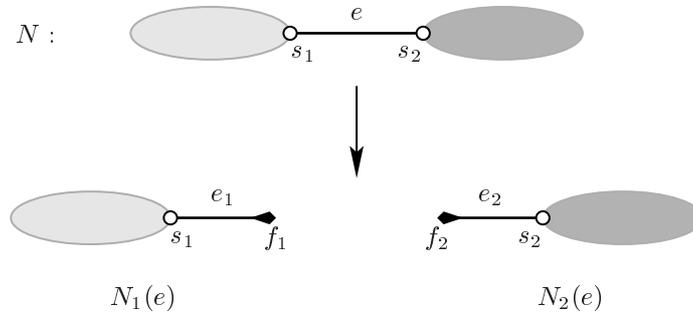


FIGURE 6.17 – Décomposition d'un arbre bourgeonnant N en l'une de ses arêtes e .

DÉFINITION 6.10 Une feuille f de N est dite *entrante* relativement à e si la clôture partielle de N la laisse libre ou si elle est appariée à un bourgeon b n'appartenant pas au même sous-arbre de N en e . L'arête de clôture correspondant au couple (b, f) est alors également qualifiée d'*entrante*.

EXEMPLE 6.1 La figure 6.18 schématise la décomposition d'un arbre bourgeonnant en l'une de ses arêtes, e , et les appariements internes aux deux sous-arbres en e . Dans chacun d'eux, certaines feuilles (et éventuellement certains bourgeons) restent libres ; ces feuilles sont les *entrantes* relatives à e , et les arêtes de clôture correspondant aux bourgeons sont les arêtes de clôture entrantes relatives à e .

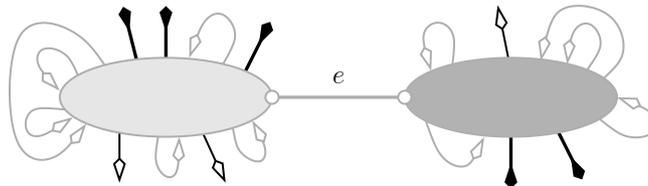


FIGURE 6.18 – Entrantes relatives à l'arête e .

Les lemmes suivants sont obtenus immédiatement par comptage des feuilles et des bourgeons dans chaque sous-arbre :

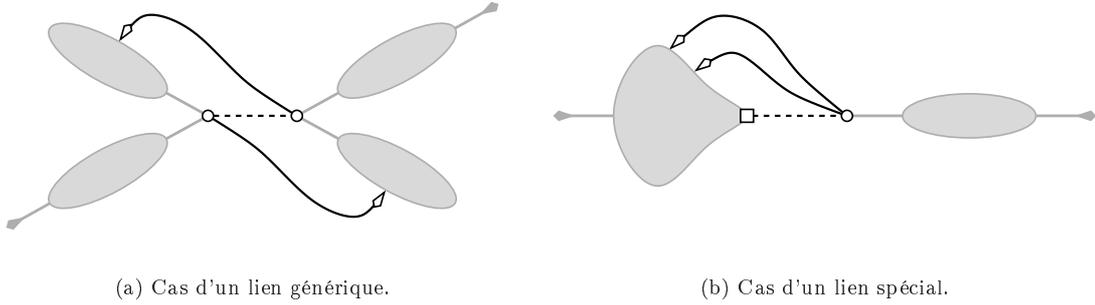


FIGURE 6.19 – Clôture de deux bourgeons jumeaux.

LEMME 6.5 Soit N un arbre bourgeonnant appartenant à \mathcal{N} , et $e = (s_1, s_2)$ une de ses arêtes internes. Alors $N_1(e)$ et $N_2(e)$ sont des arbres bourgeonnants bien formés et, comme tels, possèdent deux feuilles de plus que de bourgeons – y compris f_1 et f_2 . Chacun d’eux contient donc au moins une feuille entrante de N relative à e .

LEMME 6.6 Soit N un arbre bourgeonnant appartenant à \mathcal{N} , et $e = (s_1, s_2)$ un de ses liens génériques. Alors $N_1(e)$ et $N_2(e)$, bien que n’étant pas des arbres bourgeonnants bien formés, possèdent deux feuilles de plus que de bourgeons – y compris f_1 et f_2 . De plus, dans la clôture partielle de N , le bourgeon adjacent à s_1 est apparié à une feuille entrante appartenant à $N_2(e)$, et réciproquement.

LEMME 6.7 Soit N un arbre bourgeonnant quasi-ternaire, et $e = (s_1, s_2)$ un de ses liens spéciaux, avec par exemple s_1 spécial et s_2 pathologique. Alors $N_1(e)$ possède quatre feuilles de plus que de bourgeons, tandis que $N_2(e)$ possède autant des unes que des autres – toujours y compris f_1 et f_2 . En conséquence, les deux bourgeons adjacents à s_2 sont appariés, dans la clôture de N , à deux feuilles entrantes de $N_1(e)$, et $N_2(e)$ contient donc au moins une entrante.

La figure 6.19 illustre les lemmes 6.6 et 6.7. Les sous-arbres contenant au minimum une feuille entrante (relativement au lien considéré) libre *a priori* y sont représentés avec une feuille.

Au vu des lemmes 6.6 et 6.7, qui expriment le rapport structurel étroit existant entre les deux bourgeons portés par l’une ou les extrémité(s) d’un même lien ℓ , on se référera désormais à eux comme au (*couple de*) *bourgeons (jumeaux) correspondant au lien ℓ* , voire comme au (*couple de*) *bourgeons du lien ℓ* ou comme à un *couple de bourgeons (jumeaux)*. Cette terminologie sera étendue aux arêtes de clôture correspondantes.

— o —

6.3.2 Étude des arêtes séparatrices

Une description alternative de la clôture La clôture partielle d’un arbre bourgeonnant N a été décrite précédemment à l’aide du mot de bord (cyclique, dans le cas d’un arbre non enraciné) de N . Elle peut cependant être également décrite de façon incrémentale de la façon suivante :

ALGORITHME 6.1 :

- **entrée** : un arbre bourgeonnant N ; • **sortie** : sa clôture partielle \ddot{N} .
1. faire $\ddot{N}_0 \leftarrow N$ et $i \leftarrow 0$;
 2. tant que \ddot{N}_i contient un bourgeon, effectuer les opérations suivantes en incrémentant i avant chaque nouvelle itération :
 - (a) déterminer un bourgeon b_i et une feuille f_i tels que, en suivant la face infinie de \ddot{N}_{i-1} à partir de b_i en sens direct, f_i soit le premier sommet de degré 1 rencontré ;
 - (b) pour construire \ddot{N}_i , fusionner b_i , f_i et leurs tiges en une nouvelle arête ; cela crée une nouvelle face bornée qui n'est incidente à aucun sommet de degré 1 ;
 3. retourner \ddot{N}_i .
-

On note \ddot{N} la carte obtenue ; il est clair qu'il s'agit bien de la clôture partielle de N . Considérons maintenant, pour chaque indice i , la carte \bar{N}_i obtenue en supprimant dans \ddot{N}_i tous les liens *génériques* dont les deux bourgeons ont été appariés. En d'autres termes, \bar{N}_i est obtenue à partir de \bar{N}_{i-1} en fusionnant b_i , f_i et leurs tiges puis en supprimant le lien correspondant *si* son autre bourgeon a déjà été apparié. Cette condition assure que les liens ne sont supprimés que lorsqu'ils ne bordent plus la face infinie de la carte en construction : leur suppression ne modifie donc pas cette face, qui est celle dans laquelle les appariements se font. On note \bar{N} la carte obtenue.

Enfin, on note $\bar{\bar{N}}$ la carte obtenue à partir de la clôture partielle \ddot{N} de N en supprimant tous les liens (ou à partir de \bar{N} en supprimant les liens spéciaux) ; la clôture complète de N est donc la carte obtenue à partir de $\bar{\bar{N}}$ en fusionnant les deux feuilles libres et leurs tiges pour former une nouvelle arête. Les paragraphes qui suivent étudient les effets de la suppression des liens de \ddot{N} sur la connexité.



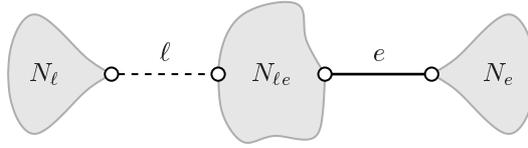
Connexité de \bar{N} Un premier pas consiste à démontrer que la suppression des liens génériques de \ddot{N} ne déconnecte pas la carte, comme le suggère la figure 6.19(a).

LEMME 6.8 *Pour tout indice i , la carte \bar{N}_i est connexe. De plus, pour toute arête e de N , les sous-cartes⁶ de \bar{N}_i induites respectivement par les sommets de $N_1(e)$ et $N_2(e)$ sont connexes.*

NOTATION 6.11 Pour tout indice i et tout sous-arbre A de N , on note $A^{(i)}$ la sous-carte de \bar{N}_i induite par les sommets de A .

DÉMONSTRATION. Démontrons ce lemme par récurrence sur i . Pour $i = 0$, la carte \bar{N}_0 est l'arbre N lui-même, qui est connexe, ainsi que tous ses sous-arbres. Soit maintenant $i \geq 1$, et supposons le lemme vérifié pour tout $j < i$. Soit c l'arête de clôture ainsi formée, ℓ le lien correspondant et c' l'arête de clôture jumelle de c .

⁶En toute rigueur, le terme de sous-carte ne peut pas être employé ici *a priori*, puisqu'une carte est, par définition, connexe. Nous nous autorisons cependant cette licence justifiée *a posteriori* par la connexité des objets en question.

FIGURE 6.20 – Décomposition de N selon deux arêtes.

Quelle que soit la nature exacte de ℓ , d'après les lemmes 6.6 et 6.7, c est alors incidente à un sommet de $N_1(\ell)$ et un sommet de $N_2(\ell)$; les cartes $N_1(\ell)^{(i-1)}$ et $N_2(\ell)^{(i-1)}$ étant connexes par hypothèse de récurrence, \bar{N}_i est également connexe, même dans le cas où ℓ est supprimée.

Considérons maintenant une arête interne ou un lien e de N , distinct de ℓ . Les arêtes e et ℓ définissent trois sous-arbres de N , notés respectivement N_e , N_{ℓ_e} et N_ℓ (voir la figure 6.20). Montrons que les cartes $N_e^{(i)}$ et $(N_\ell \cup N_{\ell_e})^{(i)}$ sont connexes. C'est immédiat dans le cas de $N_e^{(i)}$, qui est identique à $N_e^{(i-1)}$, connexe par hypothèse de récurrence. Quant à $(N_\ell \cup N_{\ell_e})^{(i)}$, elle est obtenue à partir de $(N_\ell \cup N_{\ell_e})^{(i-1)}$ en ajoutant l'arête de clôture c , puis en supprimant le lien ℓ à condition que l'arête c' jumelle de c appartienne à $(N_\ell \cup N_{\ell_e})^{(i-1)}$. Si tel est le cas, la suppression de ℓ crée au plus deux composantes connexes, chacune contenant une extrémité de ℓ . Or l'une des arêtes jumelles c et c' relie l'extrémité de ℓ appartenant à N_{ℓ_e} à un sommet de N_ℓ , et $N_\ell^{(i-1)}$ est connexe par hypothèse de récurrence; $(N_\ell \cup N_{\ell_e})^{(i)}$ est donc connexe. \square

— o —

Arêtes séparatrices de \bar{N} Le lemme précédent montre non seulement que la carte \bar{N} est connexe, mais également qu'elle est « localement connexe » : entendre par là que les sous-cartes induites par des ensembles « raisonnables » de sommets sont également connexes. Cela permet de donner une description précise des arêtes séparatrices de \bar{N} .

LEMME 6.9 *Les seules arêtes séparatrices de \bar{N} sont des arêtes internes de N qui séparent ses deux feuilles libres.*

DÉMONSTRATION. Considérons un couple d'arêtes de clôture jumelles, c et c' , et soit ℓ le lien correspondant. D'après les lemmes 6.6 et 6.7, c et c' sous toutes deux entrantes relativement à ℓ . Soit c_1 et c_2 (resp. c'_1 et c'_2) les extrémités de c (resp. c') appartenant respectivement à $N_1(\ell)$ et $N_2(\ell)$. Le lemme 6.8 assure l'existence d'un chemin entre c_1 et c'_1 (resp. c_2 et c'_2) dans la sous-carte de \bar{N} induite par $N_1(\ell)$ (resp. $N_2(\ell)$). Les arêtes c et c' appartiennent donc à un même cycle de \bar{N} . Si ℓ est un lien spécial, le même argument assure l'existence dans \bar{N} d'un cycle contenant c et ℓ . Les liens et les arêtes de clôture ne sont donc pas des arêtes séparatrices de \bar{N} .

Soit maintenant e une arête interne de N séparatrice dans \bar{N} . D'après le lemme 6.8, les sous-cartes de \bar{N} induites par $N_1(e)$ et $N_2(e)$ sont connexes, donc aucune arête de clôture ne relie un sommet de $N_1(e)$ à un sommet de $N_2(e)$. D'après le lemme 6.5, chacun des deux sous-arbres contient donc une feuille libre. \square

— o —

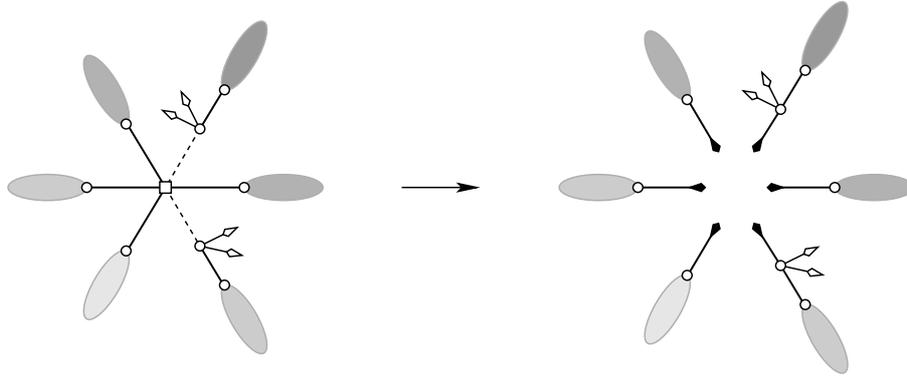


FIGURE 6.21 – Décomposition d'un arbre bourgeonnant au niveau de son nœud spécial.

Arêtes séparatrices de \bar{N} Intéressons-nous maintenant aux conséquences de la suppression des liens spéciaux sur la connexité et la séparabilité de \bar{N} .

LEMME 6.10 *Les seules arêtes séparatrices de \bar{N} sont des arêtes internes de N qui séparent ses deux feuilles libres.*

DÉMONSTRATION. Si N ne possède pas de lien spécial, $\bar{N} = \bar{N}$, et le résultat est équivalent au lemme 6.9.

Supposons donc que N possède un sommet spécial de degré $2k - 2$, avec $k \geq 3$. Rappelons qu'une arête séparatrice est une arête incidente deux fois à une même face. Pour montrer que la suppression des liens spéciaux ne rend aucune arête interne ou de clôture séparatrice, il suffit donc de montrer que deux faces quelconques de \bar{N} fusionnées par la suppression des liens spéciaux ne peuvent partager une telle arête.

Considérons les $2k - 2$ sous-arbres obtenus en décomposant N au niveau de son sommet spécial s , comme illustré par la figure 6.21. Chacun de ces sous-arbres est dit *générique* ou *pathologique* selon la nature de l'arête qui le relie à s . D'après les lemmes 6.5 et 6.7, tous contiennent une feuille entrante. D'autre part, pour chaque étape i de la construction de \bar{N} , le lemme 6.8 assure que ces sous-arbres induisent des sous-cartes connexes de \bar{N}_i .

Considérons une application particulière de la construction incrémentale de la clôture de N , telle qu'il existe une étape i vérifiant :

- pour tout $j \leq i$, b_j et f_j appartiennent au même sous-arbre de N en s ,
- pour tout $j > i$, b_j et f_j appartiennent à deux sous-arbres de N en s distincts.

À l'issue de l'étape i , tous les appariements internes à un sous-arbre donné de N en s ont donc été effectués, tandis qu'aucune arête de clôture n'a été créée entre deux sous-arbres distincts. La carte \bar{N}_i est donc formée d'un bouquet de $2k - 2$ sous-cartes connectées entre elles par le seul sommet s , parmi lesquelles k sont *génériques* et possèdent $p + 1$ feuilles et p bourgeons, pour un certain $p \geq 0$, tandis que les $k - 2$ restantes sont *pathologiques*, et possèdent $p + 1$ feuilles et $p + 2$ bourgeons, toujours pour un $p \geq 0$. Pour chacun des $k - 2$ sous-arbres pathologiques, le bourgeon précédant le lien (en sens direct autour du sommet pathologique) peut alors être apparié à la première feuille entrante de la sous-carte suivante (en tournant en sens direct autour de s).

Supposons maintenant que la carte \bar{N} possède une arête séparatrice (t, u) qui n'est pas séparatrice dans \bar{N} . Il existe alors un cycle γ dans la carte duale de \bar{N} formé de (l'arête duale de) (t, u) et de p (arêtes duales de) liens pathologiques, avec $1 \leq p \leq k - 2$. Ce cycle partitionne \bar{N} en un *intérieur* et un *extérieur*.

Une étude de cas (selon que s se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de γ , et selon la nature de l'arête (t, u)) permet alors de conclure. \square

— ○ —

Conclusion sur la structure de \bar{N} La carte \bar{N} est donc formée d'un chapelet de sous-cartes sans arête séparatrice, reliées entre elles par des arêtes internes de N , et telles que chacune des sous-cartes formant les extrémités du chapelet porte l'une des deux feuilles libres. La fusion de ces deux feuilles crée donc une carte sans arête séparatrice.

— ○ —

6.3.3 Cas du sommet spécial

Supposons que N possède un sommet spécial s . Pour montrer qu'aucun sommet de N n'est séparateur, il reste à traiter le cas de s .

LEMME 6.11 *Le sommet spécial de N n'est pas un sommet séparateur de la clôture complète de N .*

DÉMONSTRATION. Considérons une décomposition de \bar{N} en p composantes non séparables, notées $(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_p)$, connectées uniquement par s . Cette décomposition induit une décomposition de \ddot{N} : chaque lien spécial relie un sommet pathologique de l'un des \bar{N}_i à s , et ces liens n'interfèrent pas. Une fois ces liens replacés, chaque lien générique peut être replacé dans une face bornée, donc dans l'une des composantes.

À son tour, cette décomposition de \ddot{N} induit une partition de l'ensemble des sous-arbres de N en s telle qu'aucune arête de clôture ne relie deux parts distinctes. Or les lemmes de la section 6.3.1 montrent en particulier que le premier sous-arbre de chaque sous-ensemble possède une entrante, qui reste nécessairement libre dans \bar{N} . Chaque composante contient donc une des deux feuilles libres, ce qui entraîne en particulier que la partition a au plus deux parts. Le sommet s n'est donc pas séparateur dans la clôture complète de N , obtenue après fusion des deux feuilles de \bar{N} . \square

— ○ —

6.4 La construction inverse

Nous allons maintenant décrire la construction inverse, en procédant par récurrence sur le nombre d'arêtes de la carte considérée.

Considérons tout d'abord les plus petits éléments de \mathcal{C} , à savoir les cartes (quasi-)cubiques ayant au plus deux sommets. $\mathcal{C}_{2,-1}$ ne contient que la carte dégénérée formée d'une boucle sur un sommet spécial ; elle correspond à l'unique élément de $\mathcal{E}_{2,-1}$, l'arbre à un nœud spécial de

degré 2 et deux feuilles. \mathcal{C}_1 est également un singleton, contenant l'unique carte planaire cubique formée d'une arête triple entre deux sommets ; elle correspond à l'unique arbre bourgeonnant équilibré à deux nœuds génériques, quatre feuilles et deux bourgeons. Enfin, $\mathcal{C}_{3,-1}$ contient les deux enracinements différents de la carte formée d'une arête triple entre deux sommets, l'un étant spécial. ; ils correspondent aux deux enracinements équilibrés de l'unique arbre bourgeonnant formé d'un nœud spécial de degré 3, d'un nœud pathologique, de quatre feuilles et deux bourgeons.

Supposons maintenant que C est un élément quelconque de \mathcal{C} possédant au moins trois sommets, dont éventuellement un sommet spécial de degré quelconque, les autres sommets étant de degré 3. Soit s_1 son sommet racine, et s_2 la seconde extrémité de son arête racine. Soit \tilde{C} la carte obtenue en coupant l'arête racine de C pour en faire deux tiges portant des feuilles ℓ_1 et ℓ_2 . S'il existe un élément B de \mathcal{E} dont la clôture complète est C , B est nécessairement planté sur ℓ_1 , et ℓ_2 est sa seconde feuille libre. Reconstruire B équivaut à retrouver les liens entre ses nœuds : ceux-ci déterminent quels nœuds sont pathologiques ou génériques, et quelles tiges portent des bourgeons ou des feuilles.

Notre stratégie consiste à décomposer \tilde{C} en sous-cartes strictes dont nous montrons qu'elles sont nécessairement obtenues par clôture de sous-arbres de tout arbre N de \mathcal{N} qui vérifierait $\bar{N} = \tilde{C}$. Cette décomposition récursive nous permet de montrer qu'un tel arbre est unique, et qu'il existe : la clôture complète est donc une application bijective de \mathcal{E} vers \mathcal{C} .

La décomposition dépend de la séparabilité de \tilde{C} . \tilde{C} possède naturellement au moins deux sommets séparateurs, à savoir les sommets s_1 et s_2 portant les feuilles ℓ_1 et ℓ_2 . Dans la suite, « sommet séparateur » signifiera « sommet séparateur autre que s_1 ou s_2 ». C étant non séparable, \tilde{C} est nécessairement formée d'une chaîne (éventuellement réduite à un élément) de sous-cartes non séparables reliées entre elles par des sommets séparateurs, chaîne dont chaque extrémité porte l'une des feuilles. Comme on l'a vu précédemment, tout sommet de degré 3 séparateur est incident à une arête séparatrice⁷. \tilde{C} est donc formée d'une chaîne de sous-cartes sans arêtes séparatrices reliées entre elles par des arêtes, et dont l'une peut éventuellement contenir un sommet séparateur : le sommet spécial.



Cas où \tilde{C} possède une arête séparatrice e Au vu de la section précédente, s'il existe un élément N de \mathcal{N} vérifiant $\bar{N} = \tilde{C}$, alors e est une de ses arêtes internes. De plus, les deux sous-arbres $N_1(e)$ et $N_2(e)$ créés par la décomposition de N en e ont pour feuilles libres respectives ℓ_1 et f_1 d'une part, et ℓ_2 et f_2 d'autre part, si bien que \bar{N} s'obtient par recollement de $N_1(e)$ et $N_2(e)$ en fusionnant f_1 et f_2 .

Coupons donc e pour former deux tiges e_1 et e_2 portant des feuilles f_1 et f_2 . Soit \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 les sous-cartes de \tilde{C} obtenues. Par hypothèse de récurrence, il existe un unique élément N_1 et un unique élément N_2 de \mathcal{N} tels que $\bar{N}_1 = \tilde{C}_1$ et $\bar{N}_2 = \tilde{C}_2$. L'arbre N obtenu en fusionnant les tiges e_1 et e_2 de N_1 et N_2 est donc l'unique élément de \mathcal{N} tel que $\bar{N} = \tilde{C}$.



⁷et donc adjacent à un autre sommet séparateur : le seul cas où \tilde{C} possède un unique sommet séparateur est celui où cet unique sommet est s .

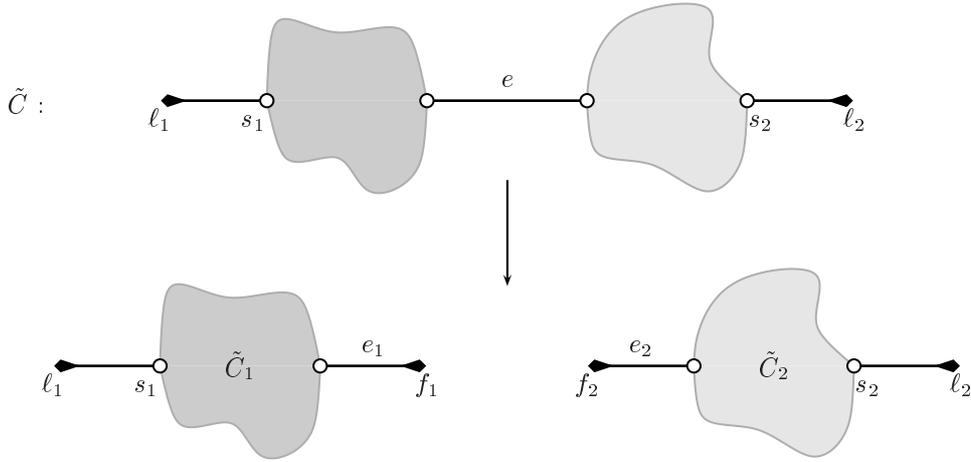


FIGURE 6.22 – Récurrence dans le cas d'une arête séparatrice.

Cas où \tilde{C} possède un unique sommet séparateur Il s'agit nécessairement du sommet spécial s . C n'étant pas séparable, s ne peut séparer \tilde{C} qu'en deux composantes, portant chacune une des deux feuilles. Soit \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 ces deux sous-cartes de \tilde{C} . Comme cela a été analysé à la section 6.3.3, s'il existe un arbre N tel que $\bar{N} = \tilde{C}$, alors les liens et arêtes internes de N incidents à s sont ordonnés (en sens direct autour de s) en deux suites d'arêtes e_1, \dots, e_p et e'_1, \dots, e'_q dont les extrémités appartiennent respectivement à \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 ; \tilde{C} ne possédant pas d'arête séparatrice, p et q sont nécessairement au moins égaux à 2.

Montrons qu'alors le sous-arbre A de N attaché à e_1 est nécessairement réduit à un sommet pathologique. Par construction, les entrantes de A_1 sont libres; A_1 n'en possède donc au plus qu'une, et donc exactement une au vu des lemmes de la section 6.3.1. Si e_1 était une arête interne, A n'aurait donc pas de bourgeon sortant, et e_1 serait donc séparatrice. Il s'agit donc d'un lien, pathologique naturellement. Si le nœud pathologique correspondant était incident à une arête interne, celle-ci serait séparatrice dans \bar{N} . A (et de même A' , porté par e'_1) est donc réduit à un nœud pathologique, ses bourgeons et une feuille, libre dans \bar{N} .

Un arbre N tel que $\bar{N} = \tilde{C}$ se décompose donc au niveau de son nœud spécial en :

- un lien pathologique e_1 , le nœud pathologique p correspondant portant une feuille libre;
- un arbre N_1 formé du sommet s , des arêtes e_2, \dots, e_p , et des sous-arbres qu'elles portent;
- un lien pathologique e'_1 , le nœud pathologique p' correspondant portant une feuille libre;
- un arbre N_2 formé du sommet s , des arêtes e'_2, \dots, e'_q , et des sous-arbres qu'elles portent.

De plus, les arbres N_1 et N_2 sont des éléments de \mathcal{N} bien formés, dont les feuilles libres sont appariées dans \bar{N} aux bourgeons des nœuds pathologiques p et p' .

Dans \tilde{C} , les sommets s_1 et s_2 portant les feuilles libres ℓ_1 et ℓ_2 sont donc identifiés comme pathologiques. Supprimons alors ces deux sommets de leur composante non séparable respective, et soit \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 les deux sous-cartes de \tilde{C} obtenues. Par hypothèse de récurrence, il existe un unique N_1 et un unique N_2 dans \mathcal{N} tels que $\bar{N}_1 = \tilde{C}_1$ et $\bar{N}_2 = \tilde{C}_2$. On obtient alors l'unique arbre N de \mathcal{N} tel que $\bar{N} = \tilde{C}$ en recollant N_1 et N_2 au niveau de leur sommet spécial, et en intercalant deux nœuds pathologiques.

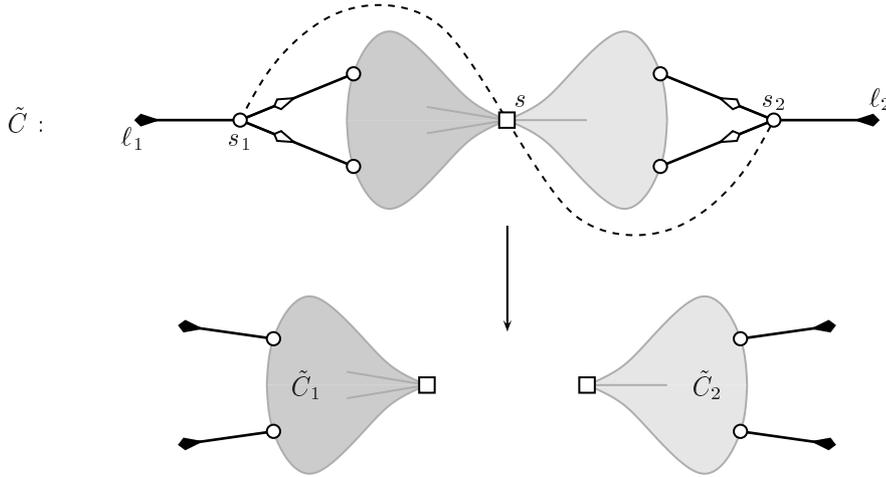


FIGURE 6.23 – Récurrence dans le cas d'un unique sommet séparateur.

On suppose maintenant que \tilde{C} ne possède pas de sommet séparateur (sous-entendu : autre que s_1 et s_2).

— o —

Cas où le sommet spécial s porte l'une des feuilles de \tilde{C} Il s'agit en fait d'un cas particulier du précédent, puisque l'ensemble des liens et arêtes internes incidents à s peut à nouveau être partitionné en deux suites sans arête de clôture entre elles, l'une de ces suites étant réduite à la tige reliant s à l'une des feuilles. Si $s = s_1$, alors s_2 est nécessairement un nœud pathologique. Soit \tilde{C}' la carte obtenue à partir de \tilde{C} en supprimant ℓ_1 et sa tige, ainsi que s_2 . Par hypothèse de récurrence, il existe un unique arbre N' de \mathcal{N} tel que $\overline{N'} = \tilde{C}'$, et l'arbre N obtenu en ajoutant à N' une tige portant une feuille suivie d'un lien portant un nœud pathologique est donc l'unique arbre de \mathcal{N} tel que $\overline{N} = \tilde{C}$.

— o —

Cas générique Lorsqu'aucune des conditions particulières précédentes n'est réalisée, on peut supposer, sans perte de généralité, que le sommet spécial s ne se trouve pas sur le chemin menant de s_2 à s_1 en parcourant la face infinie en sens direct : même si s se trouve sur la face infinie, il ne peut apparaître à la fois dans le chemin de s_1 à s_2 et dans le chemin de s_2 à s_1 puisqu'il n'est pas séparateur. Supposons qu'il existe un arbre N de \mathcal{N} tel que $\overline{N} = \tilde{C}$, et étudions les propriétés qu'un tel arbre doit nécessairement vérifier.

Observons tout d'abord que s_1 ne peut être un sommet pathologique : comme l'illustre la figure 6.24, même si s se trouve sur la face infinie de \tilde{C} , aucun lien ne peut relier s et s_1 sans violer la condition de planarité. Le sommet s_1 est donc un nœud générique de N . Soit F la⁸ face bornée voisine de s_1 . Un lien générique e relie s_1 à un autre sommet de la face F , s_3 . Considérons les sous-arbres attachés à s_1 et s_3 dans N (figure 6.25).

Puisque s_1 est adjacent à une feuille libre ℓ_1 , ainsi qu'à un bourgeon, il porte un unique sous-

⁸unique puisque s_1 est de degré 3.

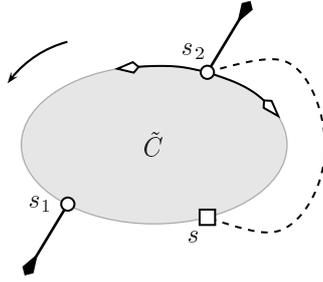


FIGURE 6.24 – Unique configuration avec un sommet pathologique sur la face infinie.

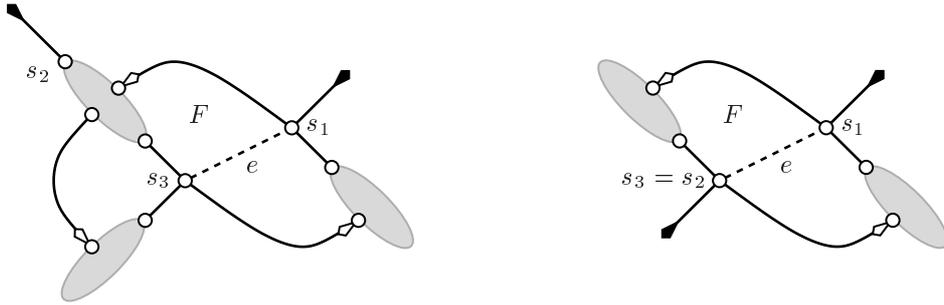


FIGURE 6.25 – Analyse du cas générique.

arbre (éventuellement réduit à une feuille) qui précède ℓ_1 en tournant en sens direct autour de s_1 . Soit A_1 ce sous-arbre. D'après le lemme 6.5, et vu l'existence de ℓ_1 , A_1 a *exactement* une entrante. Celle-ci est appariée au bourgeon de s_3 , et cette arête de clôture est incidente à la fois à F et à la face infinie. Quant à s_3 , il porte deux sous-arbres, A_2 et A_3 , dont l'un est éventuellement réduit à une feuille si $s_2 = s_3$. Si tel n'est pas le cas, soit A_2 le sous-arbre dans lequel se referme le bourgeon de s_1 , et A_3 le second sous-arbre en s_3 . A_3 ne possède pas de bourgeon sortant, et possède donc une entrante exactement ; il ne peut s'agir de ℓ_2 , sinon l'arête interne joignant A_3 à s_3 serait séparatrice. Elle est donc appariée à un bourgeon issu de A_2 , qui possède donc une seconde entrante – ℓ_2 . Remarquons qu'aucune arête située sur le chemin de s_2 à s_3 le long de la face infinie n'est incidente à F : l'arête de clôture issue de s_3 est donc la première possédant cette propriété sur le chemin de s_2 à s_1 .

Considérons la décomposition de N selon le lien e , avec $N_1(e)$ contenant s_1 . L'arbre A_1 est en fait obtenu à partir de $N_1(e)$ en supprimant s_1 , et il s'agit d'un arbre bourgeonnant équilibré. Définissons un arbre A_{23} à partir de $N_2(e)$ de la façon suivante. Supprimons tout d'abord le bourgeon et sa tige incidente à s_3 hérités de e ; s_3 a alors degré 2, et n'est donc en quelque sorte qu'un sommet au milieu d'une arête. « Lissons » alors ce sommet pour fusionner les deux arêtes qui lui sont incidentes en une seule, e' , qui peut éventuellement être une tige si $s_3 = s_2$. On obtient ainsi un arbre dont la clôture laisse e' sur la face infinie, et dont les feuilles libres sont ℓ_2 d'une part, et la feuille f_1 appariée au bourgeon de s_1 dans $\bar{N} = \tilde{C}$ d'autre part.

Or il existe une unique manière de construire ces arbres A_1 et A_{23} à partir de \tilde{C} , comme l'illustre la figure 6.26. Soit tout d'abord F la face bornée incidente à s_1 ; le sommet s_3 est caractérisé par le fait qu'il est le premier sommet incident à F apparaissant sur le chemin de s_2 à s_1 le long de la face infinie. En particulier, $s_3 = s_2$ si et seulement si s_2 est incident à F . On peut alors décomposer \tilde{C} en deux cartes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 de la façon suivante : supprimer s_1 et sa feuille ℓ_1 , pour créer deux

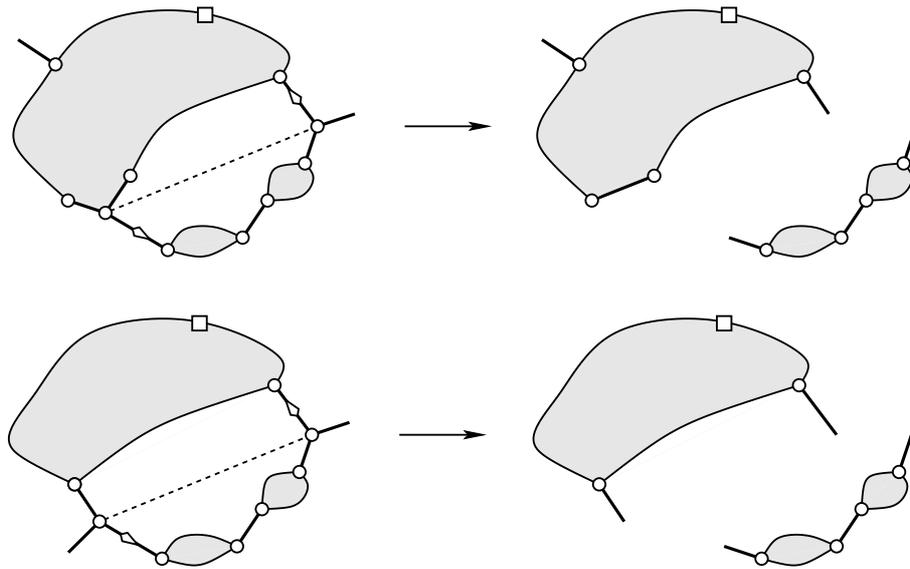


FIGURE 6.26 – Récurrence dans le cas générique.

nouvelles feuilles, f_1 , appariée au bourgeon de s_1 , et f_2 . Couper ensuite l'arête qui suit s_3 le long de la face infinie - ce qui revient à couper le bourgeon de s_3 . Cette arête étant incidente à F , cette opération coupe la carte en deux sous-cartes. On crée également ainsi une feuille f_3 , dans la même composante que f_2 , que l'on note \tilde{C}_1 . Le sommet s_3 est alors de degré 2 et peut être lissé. On obtient ainsi \tilde{C}_2 , qui contient les feuilles f_1 et f_2 . Par hypothèse de récurrence, il existe un unique N_1 et un unique N_2 dans \mathcal{N} tels que $\bar{N}_1 = \tilde{C}_1$ et $\bar{N}_2 = \tilde{C}_2$, à partir desquels on construit aisément l'unique élément N de \mathcal{N} tel que $\bar{N} = \tilde{C}$.

Ce qui achève la démonstration simultanée des théorèmes 6.2 et 6.3. □

— ○ —

6.5 Génération aléatoire

Comme cela a été évoqué au chapitre précédent, les preuves par conjugaison permettent d'obtenir des algorithmes de génération aléatoire uniforme particulièrement efficaces. Nous allons préciser la description générale que nous avons donnée à la section 5.5 dans le cas des triangulations non séparables. Soit donc $k \geq 2$, et $n \geq -1$; les différentes étapes décrites ci-dessous permettent de construire une triangulation d'un k -gone enraciné en $k + 2n$ triangles⁹, tirée aléatoirement parmi les éléments $\tilde{\mathcal{T}}_{k,n}$ selon la loi uniforme.

— ○ —

Génération aléatoire d'un arbre bourgeonnant Cette étape commence naturellement par le tirage d'un mot de Łukasiewicz de longueur $2k + 3n + 1$, formé d'une lettre a_{2k-2} , $n+1$ lettres a_4 , et $2k - 2n - 1$ lettres a_0 . Pour cela, il suffit de partir d'un mot w quelconque formé de ces lettres,

⁹L'algorithme permettant de tirer aléatoirement une triangulation plane est naturellement très similaire, et légèrement plus simple.

puis de lui appliquer une permutation aléatoire, par exemple en tirant aléatoirement une suite d'éléments $(b_i)_{1 \leq i \leq 2k+3n}$ avec $b_i \geq i$ et en appliquant successivement les transpositions (i, b_i) au mot w . Le mot obtenu possède alors un unique conjugué \tilde{w} possédant la propriété de Łukasiewicz.

Vient ensuite la construction de l'arbre plan correspondant, qui se fait également en temps linéaire, puis le tirage aléatoire uniforme des bourgeonnements décrits par les figures 6.11 et 6.12.



Clôture de l'arbre Elle peut être effectuée par un parcours en profondeur à main gauche à partir de la racine, en utilisant une pile annexe et deux variables f_1 et f_2 , initialement vides. Lorsqu'on rencontre un bourgeon, on l'empile, et lorsqu'on rencontre une feuille f , on tente de dépiler un bourgeon. En cas de succès, on apparie la feuille et le bourgeon dépilé. En cas d'échec, on a rencontré une feuille libre potentielle; on fait alors $f_1 \leftarrow f_2$ puis $f_2 \leftarrow f$, ce qui permet de garder trace des deux dernières feuilles potentiellement libres. On peut éventuellement compter les appariements effectués, ce qui permet de s'arrêter dès qu'ils sont achevés. On peut aussi décider de faire deux tours complets de l'arbre, ce qui assure également que tous les appariements sont effectués. Dans les deux cas, les variables f_1 et f_2 contiennent alors les deux feuilles libres, et un tirage à pile ou face permet d'achever le tirage uniforme d'un arbre bourgeonnant équilibré.



« Nettoyage » de la carte obtenue Reste à supprimer les liens, ce qui se fait par un parcours supplémentaire. Puis à joindre les deux feuilles libres. On a ainsi obtenu un élément de $\mathcal{C}_{k,n}$ tiré uniformément. On peut en construire la duale, toujours en temps linéaire, pour obtenir un élément de $\mathcal{T}_{k,n}$. Si l'on désire un élément de $\tilde{\mathcal{T}}_{k,n}$, il suffit de tirer aléatoirement une arête du polygone. Il était alors inutile de tirer aléatoirement un enracinement de la carte obtenue par clôture.



Chapitre 7

Triangulations sans arêtes multiples

Dans ce chapitre, nous allons pousser d'un cran supplémentaire la contrainte de connexité, pour nous intéresser à une famille de cartes 3-connexes, c'est-à-dire dont la connexité est préservée lorsqu'on supprime deux sommets quelconques (ainsi que les arêtes qui leur sont incidentes). L'étude des cartes planaires rejoint ici celle des graphes planaires, en vertu du théorème suivant [129] :

THÉORÈME 7.1 (H. WHITNEY 1933) *Un graphe planaire 3-connexe admet un unique plongement planaire à homéomorphisme et inversion de la sphère près.*

Ces cartes sont donc particulièrement étudiées en théorie des graphes. En particulier, les triangulations planes 3-connexes, qui ont la particularité d'être les *graphes maximaux planaires*, sont des objets privilégiés de la géométrie algorithmique. C'est à cette famille de cartes 3-connexes que nous allons appliquer une méthode d'énumération par conjugaison.

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec G. Schaeffer.



7.1 Préliminaires

Description des triangulations 3-connexes Les cartes 3-connexes sont, comme on l'a déjà vu, les cartes dans lesquelles il n'existe pas de 2-séparateur, c'est-à-dire de paire de sommets s et s' adjacents l'un et l'autre à deux faces f et f' . Or, dans le cas des triangulations, deux sommets sont adjacents à une même face si et seulement s'ils sont adjacents entre eux. La 3-connexité est donc une condition équivalente, pour les triangulations, à l'absence d'arêtes multiples. Cela se traduit également par le fait que ces triangulations peuvent être dessinées dans le plan en représentant les arêtes par des segments.



Résultats énumératifs Les triangulations planes 3-connexes à $2n$ triangles, $3n$ arêtes, et $n + 2$ sommets (trois appelés externes et $n - 1$ internes), sont énumérées par la formule suivante [57] :

$$T_n = \frac{2(4n - 3)!}{n!(3n - 1)!}. \tag{7.1}$$

Cette formule particulièrement simple ne possède à ce jour aucune démonstration bijective. C'est cette lacune que nous allons tenter de combler dans ce chapitre, en utilisant une construction apparentée aux constructions des deux chapitres précédents, bien que très différente par plusieurs points, pour établir une bijection entre l'ensemble des triangulations planes 3-connexes et une famille d'arbres bourgeonnants équilibrés.

On trouvera représentées figure 7.1 les triangulations 3-connexes à au plus huit triangles.

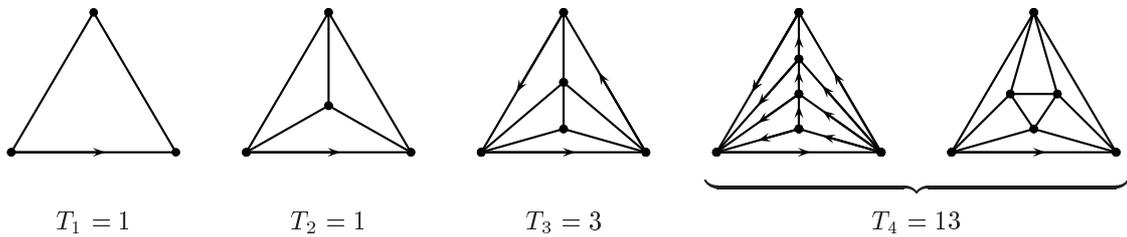


FIGURE 7.1 – Les plus petites triangulations 3-connexes.



Caractérisation des triangulations 3-connexes Nous allons faire appel à la notion suivante, introduite par W. Schnyder [113].

DÉFINITION 7.1 Soit \mathcal{T} une triangulation plane, enracinée sur l'arête (s_1, s_2) , et s_0 son troisième sommet externe. Un *réalisateur* de \mathcal{T} est un coloriage de ses arêtes internes en trois couleurs c_0 , c_1 et c_2 vérifiant les hypothèses suivantes :

- pour chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, les arêtes de couleur c_i forment un arbre couvrant de \mathcal{T} enraciné en s_i ; ceci induit une orientation des arêtes de couleur c_i telle que de chaque sommet interne sort exactement une arête de couleur c_i ;
- autour de chaque sommet interne, les arêtes sortantes de chaque couleur apparaissent toujours dans l'ordre cyclique décrit par la figure 7.2, et les arêtes entrantes de couleur c_i apparaissent entre les sortantes des deux autres couleurs.

Cette seconde condition sera désignée dans la suite sous le nom de *condition de Schnyder*.

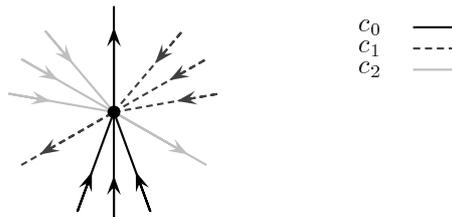


FIGURE 7.2 – Propriété locale d'un réalisateur.

W. Schnyder a montré que les réalisateurs de triangulations 3-connexes vérifient un certain nombre de propriétés, parmi lesquelles les suivantes nous seront particulièrement utiles :

PROPOSITION 7.1 – *Toute triangulation 3-connexe possède un réalisateur.*

- *L'ensemble des réalisateurs d'une triangulation 3-connexe peut être muni d'un ordre pour lequel il existe un unique élément minimal (resp. maximal).*
- *Le réalisateur minimal d'une triangulation 3-connexe \mathcal{T} est l'unique réalisateur de \mathcal{T} ne possédant pas de cycle orienté en sens direct.*

— o —

7.2 Des arbres aux triangulations : comment fabriquer un réalisateur minimal

7.2.1 La construction

La formule 7.1 évoque le nombre d'arbres plans quaternaires : le nombre de tels arbres à n nœuds est en effet égal à $\frac{(4n)!}{n!(3n+1)!}$, ce qui pousse à rechercher une éventuelle famille d'arbres énumérée par 7.1 parmi les avatars des arbres quaternaires à $n - 1$ nœuds.

— o —

Une nouvelle famille d'arbres Considérons la famille suivante d'arbres bourgeonnants :

NOTATION 7.2 On note \mathcal{B}_n l'ensemble des arbres plans à n nœuds portant chacun deux bourgeons, et enracinés sur l'un de ces bourgeons. On adoptera comme paramètre déterminant la *taille* d'un arbre son nombre de nœuds. La réunion des ensembles \mathcal{B}_n , pour $n \geq 0$, est notée \mathcal{B} .

La figure 7.3 représente les 9 éléments de la famille \mathcal{B}_3 , qui se répartissent en deux classes de conjugaison, l'une d'ordre 6 et la seconde d'ordre 3.

PROPOSITION 7.2 *L'ensemble \mathcal{B}_n a pour cardinal*
$$\frac{2(4n-3)!}{(n-1)!(3n-1)!} = \frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1}.$$

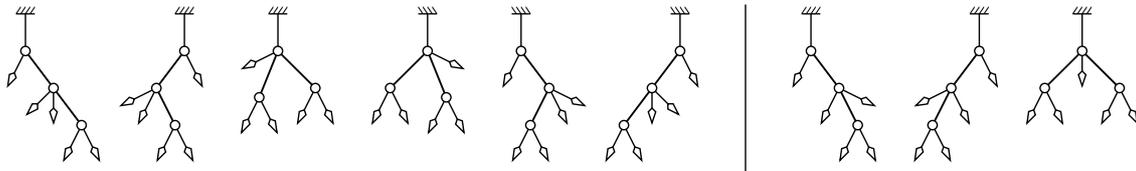


FIGURE 7.3 – Les 9 arbres de l'ensemble \mathcal{B}_3 .

DÉMONSTRATION. Comme l'illustre la figure 7.4, tout arbre non vide appartenant à \mathcal{B} se décompose, par suppression de son nœud racine, en deux forêts ordonnées (éventuellement vides) d'arbres plans non vides, plantés sur leur unique feuille, et portant deux bourgeons par nœud ; on note \mathcal{F} l'ensemble formé par ces forêts. Le cardinal de \mathcal{B}_n est donc égal au nombre de couples d'éléments de \mathcal{F} dont la taille cumulée est $n - 1$. Or les éléments de \mathcal{F} de taille k peuvent être mis en bijection

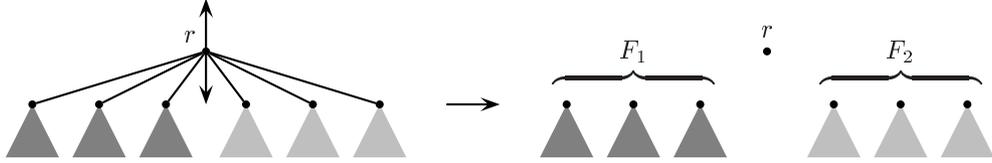


FIGURE 7.4 – Décomposition à la racine d'un élément de \mathcal{B} en deux éléments de \mathcal{F} .

avec les arbres quaternaires complets à k nœuds de la manière suivante : l'image de la forêt vide est l'arbre réduit à une feuille, et pour tout élément non vide F de \mathcal{F} , formé de ℓ arbres, on note

- $A_i(F)$ le i -ème arbre de F ,
- r le nœud racine de $A_1(F)$,
- F_1, F_2 et F_3 les trois forêts obtenues à partir de $A_1(F)$ en supprimant r ,
- F_4 la forêt $(A_2(F), \dots, A_\ell(F))$

et on associe à F l'arbre quaternaire enraciné sur r , et dont les quatre sous-arbres sont les arbres quaternaires correspondant aux forêts F_1, F_2, F_3 et F_4 . Cette construction, illustrée à la figure 7.5, est manifestement bijective.

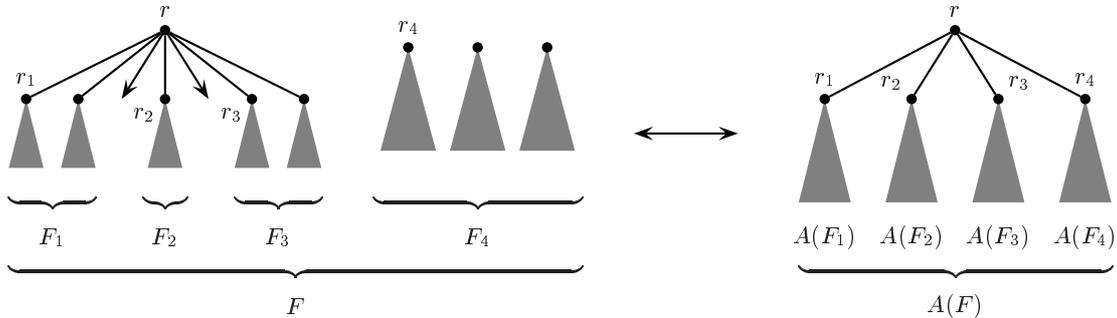


FIGURE 7.5 – Bijection entre \mathcal{F} et l'ensemble des arbres quaternaires.

Il en résulte que les éléments de taille k de \mathcal{F} peuvent être codés par des mots de Łukasiewicz¹ de longueur $4k + 1$ sur l'alphabet $\{a_4, a_0\}$. Le cardinal de \mathcal{B}_n est donc égal au nombre de mots formés de $n - 1$ lettres a_4 et $3(n - 1) + 2$ lettres a_0 factorisables en produit de deux mots de Łukasiewicz. \mathcal{B}_n a donc pour cardinal :

$$\frac{2}{4n - 2} \cdot \binom{4n - 2}{n - 1}.$$

□

— o —

¹Voir page 79.

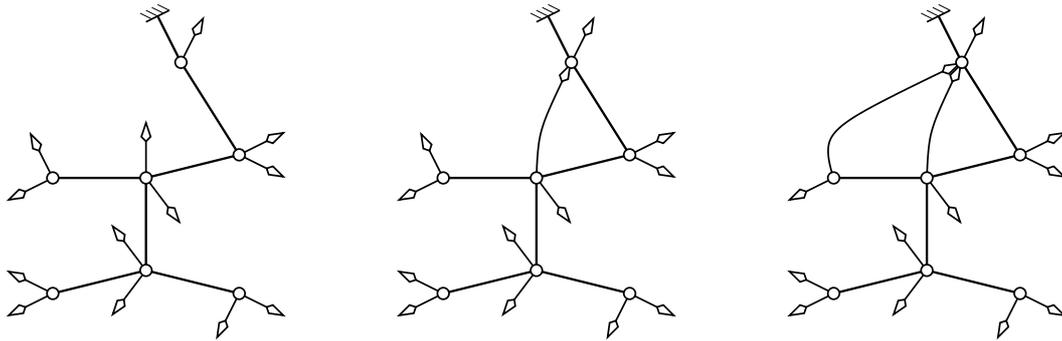


FIGURE 7.6 – Premières étapes de la clôture partielle d’un élément de \mathcal{B} .

Une nouvelle forme de clôture L’opération de clôture que nous allons introduire ici est d’un type différent des précédentes ; alors que les clôtures effectuées aux chapitres 5 et 6 préservent les degrés des sommets de l’arbre de base, tout en formant des faces de degré quelconque, nous allons ici définir une clôture qui contraint les faces à être triangulaires, en nous autorisant à faire croître les degrés des sommets.

DÉFINITION 7.3 Soit B un élément de \mathcal{B}_n ; B possède $2n$ bourgeons et $n - 1$ arêtes, ayant chacune deux côtés. Le *mot de bord* de B est le mot $w(B)$ écrit sur l’alphabet $\{b, c\}$ décrivant la succession des bourgeons et des côtés d’arêtes autour de la face (infinie) de B , en commençant par la racine. Ce mot de bord est donc de longueur $4n - 2$, avec un excédent de deux lettres b par rapport aux c .

Effectuer la *clôture partielle* de B consiste à refermer chaque bourgeon – si possible – dans l’un des coins de la face infinie de telle manière que la face bornée créée soit triangulaire, comme l’illustre la figure 7.6 : pour chaque occurrence du motif ccb dans le mot de bord de B considéré comme mot cyclique, le bourgeon correspondant est refermé dans le coin précédant le premier c du motif. Chaque opération de ce type aboutit donc à la création d’une face de degré 3, et à la réécriture d’un motif ccb en c dans le mot de bord cyclique ; la différence entre les nombres d’occurrences des lettres b et c est donc conservée.

La clôture partielle de B est achevée lorsque le mot de bord (cyclique) de la carte \ddot{B} obtenue ne contient plus d’occurrence du motif ccb . Or ce mot contient deux b de plus que de c ; il peut donc être schématisé comme le montre la figure 7.7. Chaque c peut alors être couplé au b qu’il

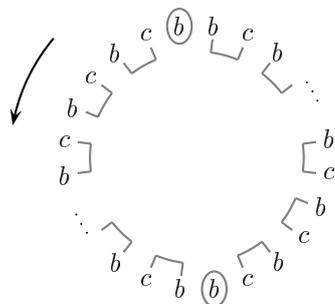


FIGURE 7.7 – Mot de bord cyclique de la clôture partielle d’un élément de \mathcal{B} .

précède, et deux lettres b restent seules : B est dit *équilibré* si l'un de ces bourgeons est sa racine. Les arbres équilibrés sont donc les arbres dont le mot de bord (linéaire cette fois, et non cyclique) se réécrit

$$w_1 w_2 \text{ avec } w_1 = b (cb)^{k_1} \text{ et } w_2 = b (cb)^{k_2}$$

en appliquant la règle $ccb \rightarrow c$. Remarquons que le second bourgeon du sommet racine s_0 précède immédiatement le bourgeon racine (en tournant en sens direct autour de s_0). D'autre part, le même raisonnement que dans les deux chapitres précédents permet d'énumérer les éléments équilibrés de \mathcal{B}_n :

PROPOSITION 7.3 *Le nombre d'arbres équilibrés dans \mathcal{B}_n est :*

$$\frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1} = \frac{2(4n-3)!}{n!(3n-1)!}.$$

REMARQUE 7.4 *Chaque bourgeon d'un arbre équilibré affecté par la clôture complète est refermé dans un coin de l'arbre situé « à sa gauche », c'est-à-dire qui le précède dans le parcours en profondeur de l'arbre à main gauche.*

— ○ —

Clôture complète des arbres équilibrés Soit B un tel arbre équilibré, et s_0 le nœud de B portant le bourgeon racine ; on obtient la *clôture complète* de B à partir de sa clôture partielle de la manière suivante :

1. factoriser le mot de bord de $\overset{\cdot\cdot}{B}$ en deux mots w_1 et w_2 comme décrit précédemment ;
2. refermer (de façon planaire) les bourgeons correspondant aux occurrences de b dans le mot w_1 (resp. w_2) sur un sommet supplémentaire s_1 (resp. s_2) ;
3. ajouter une arête entre s_1 et s_2 ;
4. enraciner la carte obtenue sur la nouvelle arête (s_1, s_2) .

Cette construction est schématisée par la figure 7.8. On note \overline{B} la carte ainsi définie.

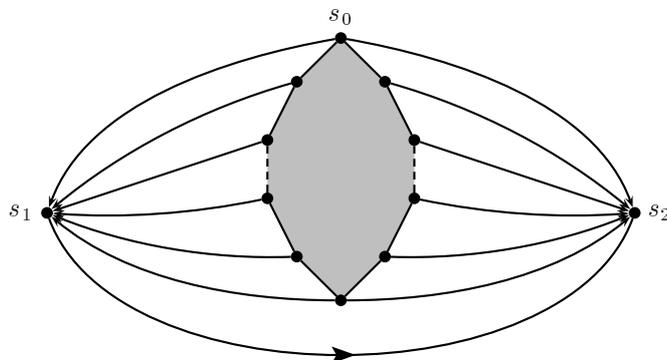


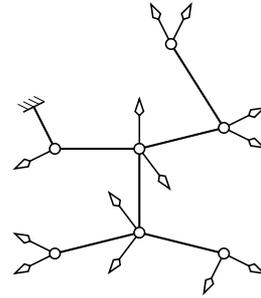
FIGURE 7.8 – Schéma de la clôture complète d'un arbre équilibré.

— ○ —

Il existe

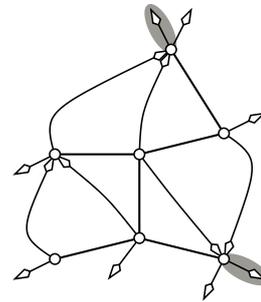
$$\frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1}$$

arbres à n nœuds et 2 bourgeons par nœud, enracinés sur un bourgeon.



La clôture partielle de ces arbres particula-
rise deux bourgeons parmi les $2n$.

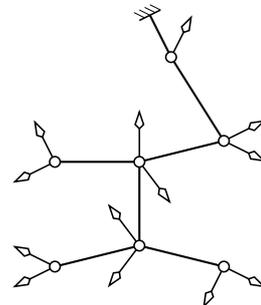
Est équilibré un arbre dont la racine est l'un
de ces deux bourgeons.



Seuls

$$\frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1}$$

éléments de \mathcal{B}_n sont donc équilibrés.



Ils correspondent bijectivement aux

$$\frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1}$$

triangulations 3-connexes.

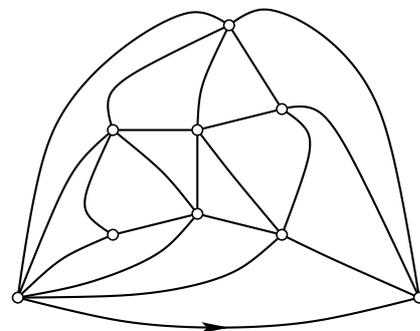


FIGURE 7.9 – Énumération constructive des triangulations 3-connexes.

7.2.2 Qu'a-t-on construit ?

La construction précédente se contentant d'ajouter dans le plan des arêtes à une carte plane (connexe et enracinée), et ne créant que des faces triangulaires, il est clair que la carte obtenue par clôture d'un arbre équilibré B est une triangulation plane (connexe), enracinée, dont les sommets externes sont les sommets s_0, s_1 et s_2 , et dont les sommets internes correspondent aux nœuds de B autres que le nœud racine s_0 . La triangulation plane \overline{B} a donc exactement deux sommets de plus que B n'a de nœuds. Les paragraphes suivants ont pour but d'étudier plus précisément le degré de connexité de cette triangulation.

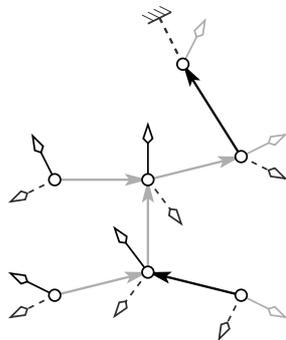
— o —

Coloriage des arbres équilibrés Soit B un arbre équilibré appartenant à \mathcal{B} . Attribuons au (plus exactement, à la tige du) bourgeon racine la couleur c_1 , au second bourgeon porté par s_0 la couleur c_2 , et aux arêtes internes qui lui sont incidentes la couleur c_0 . Rappelons que les deux bourgeons portés par s_0 sont consécutifs autour de s_0 . Ajoutons enfin un troisième bourgeon fictif de couleur c_0 entre les bourgeons de couleur respective c_2 et c_1 , et donc à l'opposé des arêtes internes de même couleur.

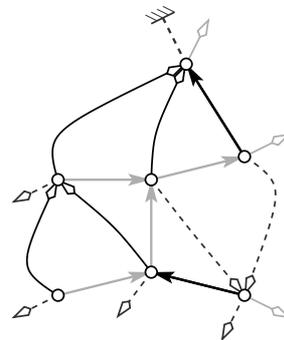
L'enracinement de B permet d'orienter canoniquement ses arêtes internes en direction de la racine; en orientant les tiges des bourgeons en direction de ceux-ci, on obtient une orientation des arêtes de B telle que chaque nœud interne possède exactement trois arêtes sortantes. De plus, cette orientation rend la coloration des arêtes incidentes au nœud racine cohérente avec la condition de Schnyder (voir la figure 7.2).

B étant acyclique, la coloration peut être propagée de manière unique à l'ensemble de ses arêtes de telle sorte que la condition de Schnyder soit vérifiée en chaque nœud. En particulier chaque nœud de B possède exactement une arête sortante de chaque couleur. Ce coloriage est illustré par la figure 7.10(a).

— o —



(a) Coloration de l'arbre B .



(b) Coloration induite sur \overline{B} .

FIGURE 7.10 – Illustration de la règle de coloration sur l'arbre B de la figure 7.6.

La règle de coloriage reste cohérente sur $\ddot{\bar{B}}$ Il s'agit ici de montrer que la clôture d'un bourgeon de couleur c_i ne contredit pas la condition de Schnyder au niveau du sommet cible, c'est-à-dire que le bourgeon se referme en un coin pouvant accepter les arêtes entrantes de couleur c_i . Pour cela, supposons cette hypothèse vérifiée après i fermetures de bourgeons, et considérons l'étape suivante. On peut supposer sans perte de généralité que le bourgeon considéré b est de couleur c_0 . Soit s le sommet adjacent à b , a l'arête précédant b autour de s , s' sa seconde extrémité, a' l'arête précédant a autour de s' , et enfin s'' sa seconde extrémité.

L'hypothèse de récurrence affirme que, relativement à s , a est soit une sortante de couleur c_2 , soit une entrante de couleur c_1 ; quant à a' , il s'agit – vis-à-vis de s' – soit d'une entrante de couleur c_2 , soit d'une sortante de couleur c_0 . Ceci permet de distinguer quatre cas, illustrés par la figure 7.11. Ces quatre cas donnent une coloration cohérente au niveau de s'' .

La carte $\ddot{\bar{B}}$ est donc correctement orientée et coloriée.

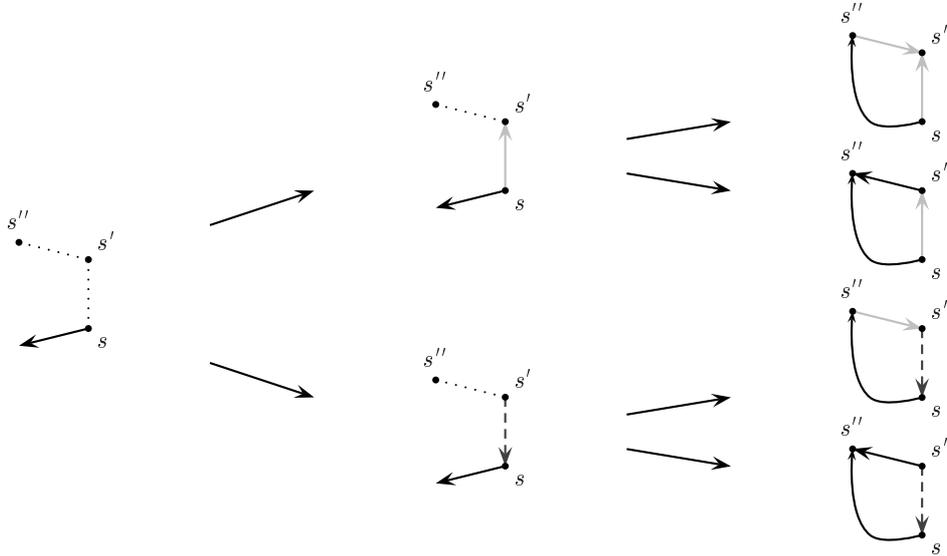


FIGURE 7.11 – Étude des différents cas de clôture d'un bourgeon.

REMARQUE 7.5 Si une face (triangulaire) de $\ddot{\bar{B}}$ est orientée de telle sorte que ses côtés forment un circuit, alors ce circuit est nécessairement orienté en sens horaire. Plus généralement, tout circuit dans $\ddot{\bar{B}}$ est créé par la fermeture d'un (dernier) bourgeon, dont l'orientation impose au circuit d'être orienté en sens horaire.



La règle de coloriage peut être étendue à \bar{B} La clôture partielle d'un arbre équilibré possède un *bord gauche* et un *bord droit* formés l'un et l'autre d'une alternance d'arêtes et de sommets portant chacun un bourgeon. La condition de Schnyder affirme que ces arêtes sont soit des arêtes dirigées vers s_0 et de couleur c_0 , soit des arêtes d'orientation opposée de couleur c_2 pour le bord gauche et c_1 pour le bord droit tandis que les bourgeons sont de couleur c_1 pour le bord gauche

et c_2 pour le bord droit : la clôture complète consiste donc à fermer les bourgeons de couleur c_1 sur le sommet s_1 , et les bourgeons de couleur c_2 sur le sommet s_2 .

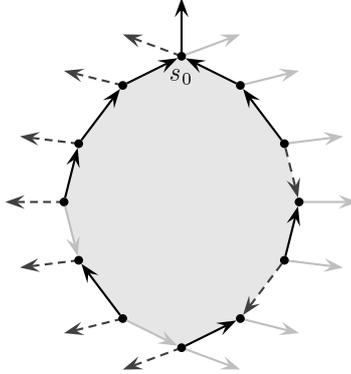


FIGURE 7.12 – Orientation et coloration des bords de la clôture partielle.

REMARQUE 7.6 *Par convention, les arêtes externes de la triangulation \overline{B} sont non orientées et non colorées. La condition de Schnyder est donc vérifiée pour tous les sommets internes de la triangulation \overline{B} , tandis que chacun des sommets externes s_0, s_1, s_2 est incident à deux arêtes externes non orientées et non colorées, et à des arêtes internes entrantes et de couleur c_0, c_1, c_2 respectivement.*

Nous allons maintenant étudier les propriétés de ce coloriage et les conséquences qui peuvent en être tirées quant à la structure de \overline{B} .



Chaque couleur définit un arbre Une première remarque à faire est que, de chaque sommet interne de \overline{B} , part un chemin de chaque couleur c_i et un seul. Deux quelconques chemins de même couleur passant par un même sommet interne s confluent donc nécessairement au niveau de s . En particulier, il n'existe pas de paire d'arêtes de mêmes extrémités, de même couleur et de même orientation. Enfin tout chemin maximal de couleur c_i dans \overline{B} , s'il ne boucle pas, aboutit en s_i puisque ce sommet est le seul à posséder une arête entrante de couleur c_i , mais pas de sortante de cette couleur. Montrer qu'il n'existe pas de circuit (orienté) monochrome dans \overline{B} suffit donc à montrer que les arêtes de couleur c_i forment un arbre (orienté) de racine s_i et couvrant les sommets internes de \overline{B} .

Considérons maintenant deux chemins de couleurs distinctes, par exemple c_0 et c_1 . Tout croisement entre ces deux chemins est nécessairement du type :



Deux tels chemins ne peuvent donc se croiser qu'une fois. Croiser doit être pris ici dans le sens faible d'avoir un sommet en commun, fût-il origine de l'un des chemins.

Supposons maintenant qu'il existe un circuit monochrome, par exemple de couleur c_0 . Les remarques précédentes impliquent que de tels circuits sont disjoints, tant au niveau des arêtes

que des sommets. Considérons un tel circuit, C , minimal pour l'inclusion², et supposons-le de couleur c_0 .

Si C est orienté en sens direct, de tout sommet s du circuit sort une arête de couleur c_1 orientée vers l'intérieur. Cette arête peut être prolongée soit en un circuit inclus dans C , ce qui contredit la minimalité de C , soit en un chemin aboutissant en s_1 , qui se trouve à l'extérieur de C ; or il faudrait pour cela que ce chemin croise une seconde fois le circuit C , ce qui est impossible.

Si C est orienté en sens indirect, il existe en chaque sommet de C une arête sortante de couleur c_2 orientée vers l'intérieur de C , pour laquelle on peut tenir le même raisonnement. On obtient donc la propriété suivante :

PROPOSITION 7.7 *Pour tout arbre équilibré B , les arêtes de couleur c_i de \overline{B} forment un arbre (orienté) de racine s_i et couvrant les sommets internes de \overline{B} .*

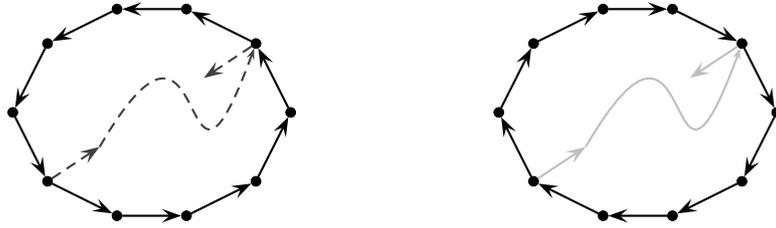


FIGURE 7.13 – Incohérence entre présence d'un cycle monochrome et règle de coloration.

— o —

La carte obtenue est une triangulation 3-connexe munie de son réalisateur minimal

La propriété suivante résulte des remarques formulées au paragraphe précédent :

PROPOSITION 7.8 *Pour tout arbre équilibré B , il n'existe pas dans \overline{B} de paire de chemins orientés monochromes – indifféremment de même couleur ou de couleurs distinctes – ayant mêmes extrémités.*

En particulier, il n'existe pas d'arêtes multiples dans \overline{B} . La carte \overline{B} est donc une triangulation plane 3-connexe. De plus, la coloration des arêtes de \overline{B} décrite ci-dessus répond à la définition 7.1 d'un réalisateur. Plus précisément, la remarque 7.5, qui affirme que les cycles de \overline{B} ne peuvent être orientés en sens direct, montre que ce réalisateur est le réalisateur minimal de \overline{B} ; en effet, aucune arête créée ultérieurement ne peut former un circuit, puisque les sommets externes de \overline{B} ne possèdent pas d'arête sortante. Nous avons donc montré le résultat suivant :

PROPOSITION 7.9 *La clôture partielle associée à chaque élément équilibré B de \mathcal{B}_n est une triangulation plane 3-connexe enracinée à $n + 2$ sommets, dont le réalisateur minimal peut être obtenu en étendant canoniquement à \overline{B} l'unique coloration de B vérifiant la condition de Schnyder.*

²Au sens suivant : tout circuit partitionne le plan en une zone *intérieure* et une zone *extérieure*, qui contient les sommets externes de la triangulation. Les circuits étant disjoints, on peut définir la relation « C contient C' » si les sommets de C' sont tous à l'intérieur de C .



7.3 Application réciproque : codage des triangulations 3-connexes

7.3.1 Parcours en profondeur

Soit T une triangulation plane 3-connexe, munie de son réalisateur minimal. On note s_1 et s_2 les extrémités de sa racine, et s_0 le troisième sommet externe. On construit un de ses arbres couvrants en se basant sur un parcours en profondeur de T à main droite « destructif », en ce sens que certaines arêtes sont coupées et non empruntées lorsqu'elles sont rencontrées. L'absence de cycles directs dans l'orientation sous-jacente au réalisateur minimal permet de décrire ce parcours de la manière suivante :

1. supprimer l'une des arêtes externes, par exemple (s_1, s_2) ;
2. orienter (s_0, s_2) et (s_0, s_1) de telle sorte que s_0 en soit l'origine ;
3. marquer (s_0, s_2) , s_0 et s_2 , puis faire $s \leftarrow s_0$ et $a \leftarrow (s_0, s_2)$;
4. tant qu'il reste une arête non marquée, faire :
 - (a) $b \leftarrow (s, t)$, où (s, t) est l'arête qui suit a autour de s en sens indirect ;
 - (b) si b est non marquée et d'origine s , couper b pour en faire un bourgeon issu de s ;
 - (c) sinon, marquer b si nécessaire puis faire $a \leftarrow b$ et $s \leftarrow t$.

Notons $A(T)$ la carte obtenue. Nous allons montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 7.10 *Pour toute triangulation T 3-connexe, la carte $A(T)$ est un arbre couvrant de T , dans lequel les sommets s_1 et s_2 sont de degré 1. En coupant les arêtes (s_0, s_1) et (s_0, s_2) pour en faire des bourgeons issus de s_0 , on obtient l'unique arbre bourgeonnant dont T est la clôture complète.*



7.3.2 Démonstration

L'algorithme termine Le fait que cet algorithme termine – et produise une carte couvrante – repose précisément sur l'absence de cycles directs : supposons qu'un sommet s ne soit pas atteint. Aucune de ses sortantes n'a donc été atteinte. Considérons la plus longue chaîne d'arêtes de couleur c_0 issue de s joignant des sommets non visités par l'algorithme. La dernière de ces arêtes, (t, u) , est telle que le sommet final u appartient à $A(T)$, ainsi que l'une de ses sortantes a . Or le déroulement de l'algorithme après parcours de a consiste à parcourir la première arête entrante de u suivant a en sens indirect autour de u . Puisque (t, u) n'a pas été parcourue, il existe nécessairement d'autres entrantes entre a et (t, u) . Considérons la première arête (v, u) suivant (t, u) en sens direct autour de u et qui appartient à $A(T)$. Puisque (t, u) n'appartient pas à $A(T)$, (v, u) n'est pas parcourue de v vers u ultérieurement. Il existe donc une chaîne d'arêtes parcourues à contresens et qui aboutit

en un sommet w de la chaîne joignant u à s_0 dans $A(T)$ en contournant le sommet t . Il existe donc un circuit direct dans T , ce qui contredit l'hypothèse de minimalité du réalisateur.



$A(T)$ est un arbre couvrant de T appartenant à \mathcal{B} dont la clôture complète est T

Le point précédent montre la connexité de $A(T)$. D'autre part, les éventuels circuits orientés (en sens indirect nécessairement) sont détruits par l'algorithme : soit c un tel circuit, s le premier sommet de c rencontré lors du parcours, et a la sortante de s parcourue pour y parvenir. Alors les deux autres sortantes de s sont détruites par l'étape 4b. Or a n'appartient pas à c puisque s est le premier sommet de c atteint, et c contient nécessairement une sortante de c . Le circuit c est donc coupé. Enfin, l'absence de cycles non orientés découle du fait que deux des trois sortantes de chaque nœud sont détruites par l'étape 4b, et que chaque nœud n'a donc qu'une sortante. $A(T)$ est donc un arbre couvrant de T .

Moyennant la suppression des arêtes (s_0, s_1) et (s_0, s_2) et leur remplacement par deux bourgeons issus de s_0 , $A(T)$ est un arbre possédant deux bourgeons par nœud. Pour montrer que sa clôture complète est T , il suffit de constater qu'à chaque ouverture de bourgeon, l'arête détruite est précisément celle qui serait reformée si on inversait momentanément la construction : en effet, le parcours à main droite assure que le bourgeon formé est le premier bourgeon libre rencontré en parcourant (à main gauche) la face infinie de la carte à partir de l'arête (s_0, s_1) , et la condition imposant de créer des faces triangulaires détermine le coin dans lequel le bourgeon doit être refermé.

En d'autres termes, $A(T)$ vérifie la propriété énoncée à la remarque 7.4.



Il s'agit du seul arbre couvrant de T possédant la propriété 7.4

Supposons qu'il existe deux tels arbres A et A' distincts. Considérons un parcours en profondeur à main gauche et en parallèle de ces deux arbres. Soit $a = (s, t)$ la première arête rencontrée appartenant à l'un d'eux – disons A – et non à l'autre. A' étant également couvrant, il existe dans A' un chemin de t à s_0 , dont la première arête (t, u) est orientée de t vers u . Cette orientation interdit à cette arête d'appartenir à l'arbre A ; elle correspond donc dans cet arbre à la clôture d'un bourgeon issu de t . Or l'arête (s, t) ayant été rencontrée avant l'arête (t, u) dans le parcours en profondeur, cela contredit la propriété 7.4 ; il n'existe donc qu'un arbre couvrant de T satisfaisant cette propriété.



Ceci achève la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 7.2 *La clôture complète réalise une bijection entre l'ensemble des arbres à n nœuds et deux bourgeons par nœud équilibrés, et l'ensemble des triangulations planes 3-connexes à $2n$ triangles, $3n$ arêtes et $n + 2$ sommets. Celles-ci sont donc énumérées par la formule :*

$$\frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{4n-2} \cdot \binom{4n-2}{n-1}, \quad \text{soit encore} \quad \frac{2(4n-3)!}{n!(3n-1)!}.$$



7.4 Génération aléatoire

On peut à nouveau tirer de cette bijection un algorithme de génération aléatoire uniforme en temps linéaire. Il est cependant légèrement différent des précédents, ce qui n'est guère que le reflet des variations apportées à l'algorithme de clôture. Voici une description de cet algorithme, permettant de construire une triangulation 3-connexe aléatoire tirée uniformément parmi les $\frac{2(4n-3)!}{n!(3n-1)!}$ triangulations 3-connexes à $2n$ triangles.

— ○ —

Tirage aléatoire et construction d'un arbre bourgeonnant Il faut tout d'abord tirer aléatoirement un mot de longueur $4n - 2$ formé de $n - 1$ lettres a_4 et $3n - 1$ lettres a_0 . Puis tirer à pile ou face l'un de ses deux conjugués s'écrivant comme produit de deux mots de Łukasiewicz. On construit ensuite un arbre possédant n nœuds, avec deux bourgeons par nœud, en appliquant la bijection décrite dans la démonstration de la proposition 7.2.

— ○ —

Clôture partielle de l'arbre Nous utilisons à nouveau un parcours en profondeur à main gauche, une pile annexe et deux variables b_1 et b_2 . Lors du parcours, on empile les arêtes de l'arbre. Lorsqu'on rencontre un bourgeon b , on tente de dépiler deux arêtes. Si la pile est vide, on fait $b_1 \leftarrow b_2$ et $b_2 \leftarrow b$; si la pile ne contient qu'une arête, on dépile; si la pile contient deux arêtes, après les avoir dépilées, on crée une nouvelle arête correspondant à la fermeture du bourgeon, puis on l'empile. On s'arrête lorsqu'on retombe sur b_1 , ce qui fait au plus deux tours. La carte obtenue est alors la clôture partielle de l'arbre de départ, et les variables b_1 et b_2 contiennent les deux bourgeons sur lesquels l'arbre peut être réenraciné pour obtenir un arbre équilibré.

— ○ —

Fin de la génération Il reste alors seulement à tirer à pile ou face l'un des enracinements, à créer deux nouveaux sommets, et à fermer les bourgeons sur le sommet adéquat. Tout cela peut naturellement être exécuté en temps linéaire, et on obtient une triangulation 3-connexe à $2n$ triangles choisie uniformément.

— ○ —

Troisième partie

Fonctions de parking

Chapitre 8

Digression autour de n^{n-2}

On a vu au chapitre 1 que les factorisations minimales d'un grand cycle de \mathfrak{S}_n en produit de transpositions sont comptées par n^{n-2} . Cette formule est omniprésente dans l'énumération des structures étiquetées, à la manière des nombres de Catalan pour les structures non étiquetées : mots de longueur $n-2$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, bien sûr, ainsi que factorisations de grands cycles, mais également arbres de Cayley, chaînes dans le treillis des partitions non croisées, cellules dans l'arrangement d'hyperplans de Shi (ou *arrangement sandwich*), configurations récurrentes du modèle du tas de sable sur le graphe complet... Les structures énumérées par ces nombres se retrouvent dans des cadres extrêmement variés. L'une de ces familles semble faire une candidate naturelle pour le rôle de « représentant archétypal » de n^{n-2} : il s'agit des *suites de parking*. Elles semblent constituer un bon compromis entre l'absence de structure des mots et la trop grande spécificité de la plupart des autres familles citées, à l'exception peut-être des arbres de Cayley. Pour appuyer cette affirmation, nous présentons ici, après avoir défini et compté les suites de parking, une bijection d'une extrême simplicité entre factorisations de grand cycle et suites de parking. La troisième section de ce chapitre est consacrée à la description d'une autre bijection mettant en jeu les suites de parking. Cette bijection, que j'ai exposée [103], avait en fait déjà été mise en évidence indépendamment par L. H. Kalikow [82, 54].



8.1 Suites de parking

DÉFINITION 8.1 Soit E un ensemble totalement ordonné, possédant un plus petit élément. Pour tout entier $i \geq 1$ inférieur au cardinal de E , on note e_i le i -ème élément de E , et E_i le sous-ensemble de E formé des i plus petits éléments de E .

Soit n un entier. Une *suite de parking* de longueur n sur l'ensemble E est un mot $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ sur l'alphabet E tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \pi_j \in E_i\}| \geq i.$$

En l'absence de précision contraire, on supposera que $E = \mathbb{N}^*$, et donc, pour tout $i \geq 1$, $e_i = i$ et $E_i = \llbracket 1, i \rrbracket$.

Cette terminologie s'explique par le fait que les suites de parking sont exactement les mots pour lesquels un algorithme de hachage particulier, couramment appelé algorithme de parking, aboutit.

DÉFINITION 8.2 On considère tout mot $\pi_1 \dots \pi_n$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ comme la liste des numéros des places de parking désirées par les conducteurs de n voitures numérotées de 1 à n , et arrivant dans cet ordre dans un parking linéaire à n places, également numérotées de 1 à n . L'*algorithme de parking* consiste à faire entrer les voitures dans l'ordre, et à garer la i -ème voiture en π_i si la place est inoccupée, et dans la première place libre *au-delà* sinon.

L'algorithme réussit si toutes les voitures parviennent à se garer. On a immédiatement :

LEMME 8.1 Soit $\pi_1 \dots \pi_n$ un mot de $\llbracket 1, n \rrbracket^n$; l'*algorithme de parking réussit sur $\pi_1 \dots \pi_n$ si et seulement s'il s'agit d'une suite de parking.*

EXEMPLE 8.1 La figure 8.1 illustre cet algorithme sur un parking à six places, pour la suite de requêtes 3 1 3 5 4 1, qui est une suite de parking.

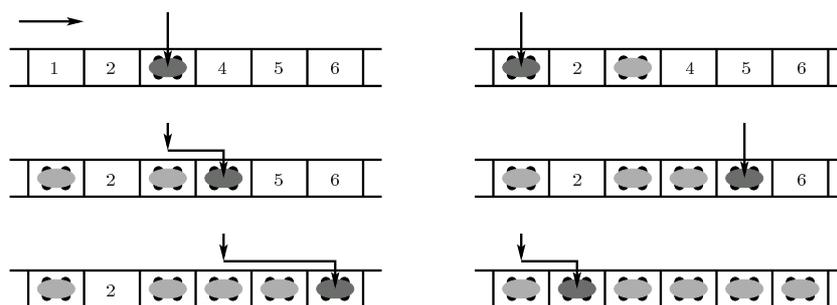


FIGURE 8.1 – Exemple d'exécution de l'algorithme de parking.

PROPOSITION 8.2 Soit $n \geq 1$. Le nombre de suites de parking de longueur n est $(n + 1)^{n-1}$.

DÉMONSTRATION. Il existe de nombreuses preuves de ce résultat, mais la plus élégante est probablement la suivante, attribuée à Pollack [52], qui repose sur un argument de conjugaison. Considérons non plus un parking linéaire à n places, mais un parking circulaire avec une place supplémentaire numérotée $n + 1$, avec un algorithme de parking adapté consistant à tourner autour du parking à partir de la place souhaitée jusqu'à la première place libre, comme l'illustre la figure 8.2. Toute suite de requêtes appartenant à $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket^n$ peut alors être satisfaite, et laisse exactement une place libre. Le nombre de telles suites laissant une place donnée libre ne dépend naturellement pas de la place, et les suites de parking sont exactement celles qui laissent la place supplémentaire $n + 1$ libre. Le nombre de suites de parking de longueur n est donc :

$$\frac{1}{n + 1} (n + 1)^n.$$

En d'autres termes, chaque classe de $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^n$ modulo $(1, 1, \dots, 1)$ contient exactement une suite de parking. \square

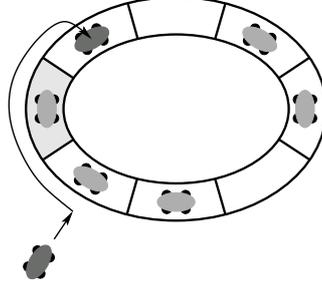


FIGURE 8.2 – Exemple de parking circulaire.

— \circ —

8.2 Bijection avec les factorisations minimales de $(1\ 2\ \dots\ n)$

Dans cette section, pour toute factorisation en transpositions (τ_1, \dots, τ_m) du grand cycle $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$ de \mathfrak{S}_n , on notera a_i et b_i les éléments permutés par la transposition τ_i , avec $a_i < b_i$. Nous proposons ici une seconde preuve bijective du théorème 1.3, reposant sur le théorème suivant :

THÉORÈME 8.1 *Soit $n \geq 1$. Alors l'application qui à toute factorisation (τ_1, \dots, τ_m) de $(1\ 2\ \dots\ n)$ en transpositions associe le mot $a_1 a_2 \dots a_m$ réalise une bijection entre l'ensemble des factorisations minimales et celui des suites de parking de longueur $n - 1$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons raisonner par récurrence ; le théorème est naturellement vrai pour $n = 2$, ou même $n = 1$. Considérons donc $n > 2$, et supposons le théorème vérifié pour tout $k < n$.

Montrons dans un premier temps que si $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ est une factorisation minimale de $(1\ 2\ \dots\ n)$, alors $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ est une suite de parking. Il existe un élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui n'est affecté que par l'une des transpositions, disons τ_j . Le $(n-2)$ -uplet $(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_{n-1})$ est alors une factorisation minimale du cycle $(1\ 2\ \dots\ k-1\ k+1\ \dots\ n)$, qui est de longueur $n - 1$; par hypothèse de récurrence, la suite $a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_{j+1} \dots a_{n-1}$ est donc une suite de parking de longueur $n - 2$ sur l'ensemble $\llbracket 1, k - 1 \rrbracket \cup \llbracket k + 1, n \rrbracket$. Or $a_j \leq k$, donc $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ est une suite de parking de longueur $n - 1$.

La démonstration de la réciproque s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 8.3 *Soit E un ensemble totalement ordonné, et $w_1 \dots w_n$ un mot sur l'alphabet E . Il existe un unique entier i tel que la restriction de $w_1 \dots w_n$ à E_i soit une suite de parking sur E de longueur $i - 1$.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit du plus petit indice i tel que la longueur de la restriction \tilde{w}_i de $w_1 \dots w_n$ à E_i soit $i - 1$. En effet, par minimalité de i , aucun entier $j < i$ ne satisfait la condition de longueur ; d'autre part, puisque $|\tilde{w}_i| < i$, aucun entier $j > i$ ne satisfait la

condition de parking; enfin, si $j < i$, alors par minimalité de i et croissance de la fonction $k \mapsto |\tilde{w}_k|$, $|\tilde{w}_j| \geq j$, ce qui assure que \tilde{w}_i est une suite de parking. \square

Étant donné une suite de parking $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, il existe d’après le lemme un unique b_1 tel que la restriction de $a_2 \dots a_{n-1}$ à $[a_1 + 1, b_1]$ soit une suite de parking de longueur $b_1 - a_1 - 1$. La restriction de $a_2 \dots a_{n-1}$ à $[[1, a_1] \cup [b_1 + 1, n]]$ est alors également une suite de parking sur cet ensemble, de longueur $n - b_1 + a_1 - 1$. Par hypothèse de récurrence, chacune de ces suites correspond à une unique factorisation minimale de $(a_1+1 \dots b_1)$ et de $(1 \dots a_1 \ b_1+1 \dots n)$ respectivement. On peut donc construire par récurrence l’unique factorisation minimale $(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ de $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ telle que, pour tout i , $\tau_i = (a_i, b_i)$ avec $a_i < b_i$. \square

EXEMPLE 8.2 Considérons la suite de parking $a = 3 \ 1 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4$, de longueur 8; $a_1 = 3$, et le lemme donne $\tau_1 = (3 \ 7)$, d’où la décomposition suivante :

1. d’une part, la suite de parking 4 6 4 sur l’ensemble $\{4, 5, 6, 7\}$; en itérant le procédé, on obtient $\tau_3 = (4 \ 5)$, puis $\tau_7 = (6 \ 7)$ et enfin $\tau_8 = (4 \ 6)$;
2. d’autre part, la suite de parking 1 1 3 2 sur l’ensemble $\{1, 2, 3, 8, 9\}$; d’où $\tau_2 = (1 \ 8)$, puis, d’une part, $\tau_4 = (1 \ 9)$, et d’autre part $\tau_5 = (3 \ 8)$ puis $\tau_6 = (2 \ 3)$.

On obtient donc finalement :

$$\tau_8 \tau_7 \dots \tau_2 \tau_1 = (4 \ 6) (6 \ 7) (2 \ 3) (3 \ 8) (1 \ 9) (4 \ 5) (1 \ 8) (3 \ 7)$$

dont on vérifie qu’il s’agit effectivement d’une factorisation du cycle $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)$. On trouvera figure 8.3 l’arbre plan correspondant.

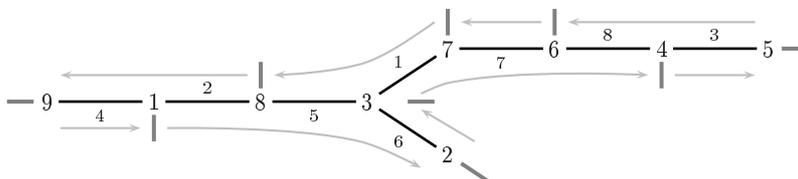


FIGURE 8.3 – Arbre de la factorisation obtenue à l’exemple 8.2.



8.3 Bijection avec les couples admissibles de permutations

Queues de priorité et couples admissibles Nous définissons ici une nouvelle famille énumérée par les nombres de Cayley, celle des *couples admissibles de permutations*. Pour cela, nous introduisons une méthode de tri reposant sur l’utilisation d’une structure de données particulière :

DÉFINITION 8.3 Une *queue de priorité* est une structure de données supportant les opérations d’insertion (i) et de suppression du minimum (s).

Un *tri par queue de priorité* est un mot de parenthèses sur l’alphabet $\{i, s\}$ de longueur $2n$, qui transforme un mot *entrée* σ de longueur n sur un alphabet ordonné en un mot *sortie* τ de même longueur et de même valuation en chaque lettre.

Un couple de mots (σ, τ) sur un alphabet ordonné est dit *admissible* s'il existe un tri par queue de priorité transformant σ en τ .

EXEMPLE 8.3 $\sigma = 631584972 \xrightarrow{\text{IIISIIISIISSIIISIISS}} \tau = 315468729$.

On pourra se reporter à [5, 6, 7, 55] pour plus de détails sur les couples admissibles, notamment les couples admissibles de permutations. En particulier, un résultat classique est que la clôture transitive de la relation d'admissibilité pour les permutations est l'ordre faible de Bruhat¹. Le résultat qui nous intéresse ici est énumératif : l'ensemble des couples admissibles d'éléments de \mathfrak{S}_n a pour cardinal n^{n-2} . On connaît en particulier des bijections entre paires admissibles et arbres de Cayley. Nous allons ici montrer ce résultat en établissant une bijection entre paires admissibles et suites de parking.

— o —

Un second algorithme de parking L'algorithme de parking décrit précédemment définit pour chaque suite de parking π de longueur n une permutation appartenant à \mathfrak{S}_n , en associant à chaque numéro de place le numéro de la voiture qui s'y gare. Nous allons maintenant définir un second algorithme, menant à un agencement en général différent des voitures dans le parking.

DÉFINITION 8.4 L'*algorithme de parking sauvage* consiste à faire entrer les voitures dans l'ordre, et à garer la i -ème voiture en a_i , en décalant d'une place les voitures garées en $a_i, \dots, a_i + k - 1$, où k est le plus petit entier tel que $a_i + k$ soit libre.

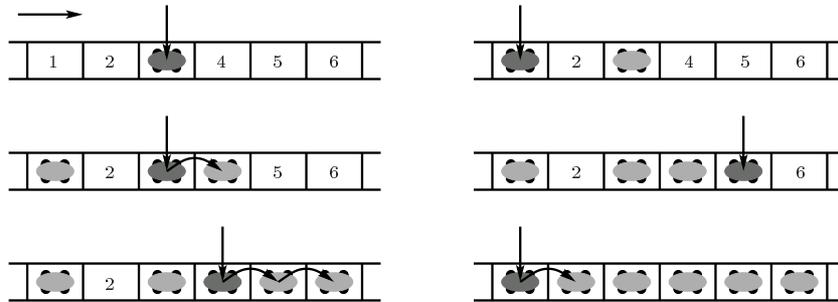


FIGURE 8.4 – Exemple d'exécution de l'algorithme de parking sauvage.

La figure 8.4 illustre cet algorithme sur la même entrée que la figure 8.1. Pour lever toute ambiguïté, on se référera dorénavant au premier algorithme comme à l'algorithme de parking *civilisé*. Le lemme suivant est immédiat :

LEMME 8.4 Lors de l'exécution en parallèle des deux algorithmes de parking sur une même entrée, à chaque étape, l'ensemble des places vacantes est le même pour les deux algorithmes.

En conséquence :

¹c'est-à-dire l'ordre (partiel) défini par la relation d'inclusion des ensembles d'inversions

LEMME 8.5 Soit $\pi_1 \dots \pi_n$ un mot de $\llbracket 1, n \rrbracket^n$; l'algorithme de parking sauvage réussit sur $\pi_1 \dots \pi_n$ si et seulement s'il s'agit d'une suite de parking.

— o —

La bijection

NOTATION 8.5 Pour toute suite de parking π de longueur n , on note σ_π (resp. τ_π) la permutation de \mathfrak{S}_n représentant l'agencement des voitures dans le parking après l'exécution de l'algorithme de parking sauvage (resp. civilisé) avec l'entrée π . On note φ l'application qui à toute suite de parking π associe le couple de permutations (σ_π, τ_π) .

EXEMPLE 8.4 Si $n = 6$ et $\pi = 3\ 1\ 3\ 5\ 4\ 1$ (exemple correspondant aux figures 8.1 et 8.4), alors :

$$\sigma_\pi = 6\ 2\ 3\ 5\ 1\ 4 \quad \text{et} \quad \tau_\pi = 2\ 6\ 1\ 3\ 4\ 5.$$

Nous allons montrer la propriété suivante, qui fournit une démonstration bijective de la formule d'énumération des couples de permutations admissibles :

PROPOSITION 8.6 L'application φ réalise une bijection de l'ensemble de suites de parking de longueur n sur l'ensemble des couples admissibles de permutations de \mathfrak{S}_n .

La démonstration de cette proposition repose sur les quelques lemmes suivants :

LEMME 8.7 L'application φ est injective.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme 8.4 : en effet, connaissant l'état des deux parkings à l'issue d'une étape i , l'emplacement de i dans le parking sauvage détermine la requête π_i , tandis que son emplacement dans le parking civilisé détermine l'emplacement passé de l'état vacant à l'état occupé au cours de l'étape i . L'état des parkings à l'étape $i - 1$ peut donc être reconstitué. \square

LEMME 8.8 Pour toute suite de parking π , $\varphi(\pi)$ est un couple admissible.

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que, pour tout i , $\tau_p(i)$ est le plus petit élément de l'ensemble

$$\pi^{-1}(\llbracket 1, i \rrbracket) \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{i-1}\}.$$

Considérons maintenant, pour tout entier $i \geq 1$, le plus court préfixe w_i de σ_π contenant l'ensemble $\pi^{-1}(\llbracket 1, i \rrbracket)$, et x_i la plus petite lettre autre que x_1, \dots, x_{i-1} apparaissant dans w_i . Alors nécessairement x_i appartient à l'image réciproque de $\llbracket 1, i \rrbracket$ par π .

On peut donc trier σ_π en τ_π à l'aide d'une queue de propriété en appliquant le processus consistant, avant la i -ème opération S, à effectuer suffisamment d'opérations I pour insérer dans

la queue les éléments de $\pi^{-1}([1, i])$ qui ne s'y trouvent pas encore. \square

La preuve de l'injectivité de φ (lemme 8.7) décrit l'application réciproque : elle consiste, étant donné un couple de permutations (σ, τ) appartenant à \mathfrak{S}_n , à écrire $\sigma = \alpha n \beta \gamma$ et $\tau = \delta n \varepsilon$, avec $|\gamma| = |\varepsilon|$, et à itérer sur les couples $(\alpha \beta, \delta)$ et (γ, ε) . Cette construction est définie dès que $\alpha \beta$ et δ , d'une part, et γ et ε , d'autre part, ont le même support. Ce qui est le cas si (σ, τ) est une paire admissible. \square

— \circ —

Chapitre 9

Une généralisation : les multisuites de parking

Le texte de ce chapitre reprend celui de [36], dans lequel nous proposons une généralisation des suites de parking. De manière assez amusante, nous faisons ici également appel à un argument de conjugaison sur des langages de Łukasiewicz pour leur énumération. Nous étendons la correspondance entre suites de parking et arbres de Cayley, *via* le modèle du *tas de sable*. En revanche, nous n'avons malheureusement pas trouvé d'interprétation de ces suites en termes de factorisations de permutations.



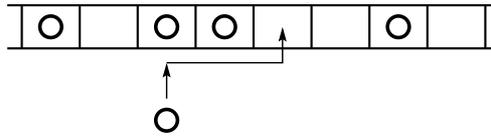
9.1 Introduction

Since parking functions were introduced more than thirty years ago in the context of hashing algorithm analysis [91, 92], they gained a preponderant place in combinatorics of labelled objects. As shown by the elegant proof due to Pollack (see [52]), they are enumerated by *Cayley* numbers n^{n-2} , that play towards labelled objects the same role as *Catalan* numbers $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ towards unlabelled ones : parking functions can actually be considered as a labelled version of Dyck paths. Many bijections are now known between parking functions and combinatorial objects such as Cayley trees, factorizations of a circular permutation as a minimal product of transpositions in \mathfrak{S}_n , maximal chains in the lattice of noncrossing partitions [47, 54], or cells in the Shi hyperplane arrangement [117, 118]. More recently, parking functions were found to be also useful in algebraic combinatorics [67].

Among the many definitions of parking functions, we use the following one : a *parking function of length n* is a sequence $u = u_1 u_2 \dots u_n$ of n non-negative integers such that there exists a permutation $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ in \mathfrak{S}_n (*strictly*) larger than u (which we denote $\sigma > u$), *i.e.* satisfying, for any index i , $\sigma_i > u_i$. This permutation σ will be said to be a *certificate* for u . For instance, 3 0 1 3 1 is a parking function since the permutation 4 1 2 5 3 is a certificate for it ; on the other hand, 0 3 2 3 2 is not a parking function.

This terminology is motivated by the following greedy *parking algorithm*, which helps to explain in everyday words the notion of open addressing. Consider a one-way road with n parking slots numbered 0 through $n - 1$; n cars arrive one at a time at the head of the road, that plan to park along this road. Each driver has a preferred parking place in mind, to which he proceeds. He parks there if it is free, but otherwise he has to drive ahead and park in the next empty slot.

EXAMPLE 9.1 Let $n = 8$. Consider a situation in which the 4 first cars are parked in places 0, 2, 3 and 6, and suppose that car number 5 tries to park in place 2; unfortunately, places 2 and 3 are occupied, so it has to drive ahead up to place 4.



The algorithm succeeds if each driver finds a parking place, and fails otherwise. Parking functions are exactly the preference functions for which the parking algorithm succeeds.

It was observed in [37] that there is a very simple bijection between parking functions of length n and some assignments of values to the vertices of the complete graph K_{n+1} called *recurrent configurations* in the sandpile model [44] introduced in statistical physics and considered by some combinatorialists as the *chip firing game* [16]. Since recurrent configurations may be defined for any graph in which a vertex is distinguished as the sink, it seems reasonable to examine recurrent configurations of other families of graphs. The first one which comes in mind is that of the complete k -partite graphs, but choosing a sink breaks symmetry; hence we consider the family of complete $(k + 1)$ -partite graphs of type $K_{p_1, p_2, \dots, p_k, 1}$, the lonely vertex being the sink.

It turns out that corresponding configurations have many similarities with parking functions, and can actually be considered as a generalization of them. These (p_1, \dots, p_k) -parking functions are k -tuples (u_1, \dots, u_k) of sequences of non-negative integers satisfying some combinatorial conditions which are detailed below.

Since general case is not substantially different, we concentrate on the particular case $k = 2$ for the sake of readability. We prove that the number of (p, q) -parking functions is

$$(p + q + 1)(p + 1)^{q-1}(q + 1)^{p-1},$$

and that the number of increasing ones is the Narayana number

$$\frac{1}{n + 1} \binom{n + 1}{p} \binom{n + 1}{q}$$

where $n = p + q$.



The paper is organized as follows : we first define (p, q) -parking functions in an elementary way without any reference to the sandpile model and give some characterizations of them. We recall some simple facts about the physical model and indicate the scheme of a possible proof for the enumerative result. Then, we use conjugacy on certain words to obtain directly this result.

Finally, we extend it to the case of increasing (p, q) -parking functions. Afterwards, we state the corresponding results in the general case of k -partite parking functions. Some perspectives for future investigations are suggested at the end of the paper.



9.2 Definition

We first give some notations and conventions which we adopt throughout the paper. Let p and q be two positive integers, and $n = p + q$; for any couple (a, b) of integers such that $a \leq b$, $\llbracket a, b \rrbracket$ denotes the set of *integers* between a and b :

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

A (p, q) -sequence is a pair (u, v) of sequences of non-negative integers with respective lengths p and q such that

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_i \in \llbracket 0, q \rrbracket \quad \text{and} \quad \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, v_j \in \llbracket 0, p \rrbracket.$$

Their set is denoted $\mathcal{S}_{p,q}$.

We define a partial order \preceq on pairs of sequences of respective lengths p and q : for any two such pairs (u, v) and (u', v') , $(u, v) \preceq (u', v')$ if for all indices i and j , $u_i \leq u'_i$ and $v_j \leq v'_j$.

As the set \mathcal{P}_n of parking functions, we define the set $\mathcal{P}_{p,q}$ of (p, q) -parking functions as an ideal for some order (here \preceq), determined by its maximal elements. These can be described thanks to permutations in \mathfrak{S}_{p+q} . Let us associate to any permutation $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ in \mathfrak{S}_n a (p, q) -sequence (x_σ, y_σ) (somewhat similar to its inversion table) : for any index $i \leq p$, let x_i denote the i -th letter of x_σ ; then x_i is the number of letters less than σ_i among the q last ones of σ , and for any index $j \leq q$, the j -th letter y_j of y_σ is the number of letters less than σ_{p+j} among the p first ones of σ . More formally,

$$\forall i \leq p, x_i = |\{1 \leq j \leq q \mid \sigma_{p+j} < \sigma_i\}|$$

and

$$\forall j \leq q, y_j = |\{1 \leq i \leq p \mid \sigma_i < \sigma_{p+j}\}|.$$

EXAMPLE 9.2 Let $p = 5, q = 4$, and $\sigma = \underbrace{3 \ 6 \ 5 \ 2 \ 8}_p \underbrace{4 \ 1 \ 9 \ 7}_q$.

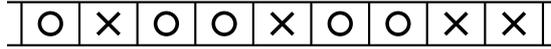
For any $i \leq 5$, x_i is the number of elements less than σ_i in $\{4, 1, 9, 7\}$, and symmetrically for the y_j 's. Hence $(x_\sigma, y_\sigma) = (1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3, 2 \ 0 \ 5 \ 4)$. Remark that σ is not uniquely determined by (x_σ, y_σ) , since, for instance, if $\tau = 2 \ 5 \ 6 \ 3 \ 8 \ 4 \ 1 \ 9 \ 7$, then $(x_\tau, y_\tau) = (x_\sigma, y_\sigma)$.

DEFINITION 9.1 A (p, q) -sequence (u, v) is a (p, q) -parking function if there exists a permutation σ in \mathfrak{S}_{p+q} such that $(u, v) \preceq (x_\sigma, y_\sigma)$. We say that the permutation σ is a *certificate* for (u, v) .

There is a more intuitive way to introduce (p, q) -parking functions, translating the definition into a parking quiz. Suppose that p blue cars and q red ones have to park in a one-way street

with n parking slots. Each driver i of a blue car asks to have at least u_i red ones parked before him and each driver j of a red car asks to have at least v_j blue ones parked before him. The (p, q) -sequence (u, v) is a (p, q) -parking function if there exists a parking that satisfies all the wishes of the drivers.

EXAMPLE 9.3 $(0\ 0\ 1\ 2\ 2, 0\ 2\ 3\ 5)$ is a $(5, 4)$ -parking function, since the following parking suits.



The following remark is elaborated on in Section 9.6 :

REMARK 9.1 $\mathcal{P}_{p,q}$ is invariant under the action of $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ on (p, q) -sequences. This means that corresponding unlabelled objects exist, whose set is isomorphic to that of increasing (p, q) -parking functions.



9.3 Characterization

9.3.1 In terms of parking functions

We show in what way (p, q) -parking functions themselves can be considered as a generalization of usual parking functions. We first give a straightforward criterion for checking whether (u, v) is a (p, q) -parking function.

Let $u = u_1\ u_2\ \dots\ u_p$ be an integer sequence. The *rank* function of u is the mapping

$$\rho_u : \begin{cases} [1, p] & \rightarrow \mathbb{N} \\ i & \mapsto |\{1 \leq j \leq p \mid u_j < u_i\}| + |\{1 \leq j < i \mid u_j = u_i\}| \end{cases}$$

i.e. for any index i , $\rho_u(i)$ is the number of indices j such that either $u_i > u_j$ or $j < i$ and $u_j = u_i$.

Hence ρ_u is such that the numbers $u_i + \rho_u(i)$ are all distinct and satisfy

$$\forall i, j \leq p, \quad u_i < u_j \implies u_i + \rho_u(i) < u_j + \rho_u(j).$$

Let \vec{u} be the sequence of length p whose i -th element is $u_i + \rho_u(i)$. Then, on the one hand, $\rho_{\vec{u}}(i) = |\{1 \leq j \leq p \mid \vec{u}_j < \vec{u}_i\}|$ for any index i , and on the other hand, $\rho_u = \rho_{\vec{u}}$.

EXAMPLE 9.4 If $u = 4\ 0\ 3\ 4\ 2$, then $\rho_u = 3\ 0\ 2\ 4\ 1$ and $\vec{u} = 7\ 0\ 5\ 8\ 3$.

PROPOSITION 9.2 A (p, q) -sequence (u, v) is a (p, q) -parking function if and only if the concatenation of the sequences \vec{u} and \vec{v} is a parking function.

PROOF. Let $w = \vec{u} \cdot \vec{v}$, i.e. $w_1 \dots w_p = \vec{u}$ and $w_{p+1} \dots w_{p+q} = \vec{v}$. Let $\sigma = \sigma_1\ \sigma_2\ \dots\ \sigma_n$ be a

permutation in \mathfrak{S}_n satisfying the following *monotony* condition :

$$\forall i, j \leq n, \quad w_i < w_j \implies \sigma_i < \sigma_j.$$

We prove that σ is a certificate for w if and only if it is a certificate for (u, v) .

Consider indeed its associated (p, q) -sequence (x_σ, y_σ) , and let $x_\sigma = x_1 \dots x_p$. Then, for any $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i = |\{1 \leq j \leq q \mid \sigma_{p+j} < \sigma_i\}|$. On the other hand,

$$\rho_u(i) = \rho_{\bar{u}}(i) = |\{1 \leq k \leq p \mid w_k < w_i\}| = |\{1 \leq k \leq p \mid \sigma_k < \sigma_i\}|.$$

Since σ is a permutation, it implies that $x_i + \rho_u(i) = \sigma_i - 1$, hence :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad x_i - u_i = \sigma_i - 1 - w_i.$$

Symmetrically, let $y_\sigma = y_1 \dots y_q$. For all $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $y_j - v_j = \sigma_{p+j} - 1 - w_{p+j}$. Hence $w < \sigma$ if and only if $(u, v) \leq (x_\sigma, y_\sigma)$.

To end the proof, just observe that any parking function or (p, q) -parking function has a monotonous certificate, hence this condition on σ is not restrictive. \square

A corollary of this Proposition is that the set of parking functions may be considered as the diagonal of the set of bipartite parking functions :

PROPOSITION 9.3 *A sequence $u = u_1 u_2 \dots u_n$ is a parking function if and only if (u, u) is an (n, n) -parking function.*

PROOF. Clearly if u is a parking function, it is certified by the bijection $i \mapsto \rho_u(i) + 1$. Hence a sequence u is a parking function if and only if, for any $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_i \leq \rho_u(i)$, *i.e.* if and only if, for any $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\bar{u}_i \leq 2\rho_u(i)$.

Let w be the square of \bar{u} for concatenation. Remark that \bar{u} is a sequence of n distinct elements, with rank function ρ_u . So w has rank function ρ_w given by :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \rho_w(i) = 2\rho_u(i) \quad \text{and} \quad \rho_w(n+i) = 2\rho_u(i) + 1.$$

According to the above arguments, w is a parking function if and only if $w_{n+i} = w_i \leq 2\rho_u(i)$ for any $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, which gives the result. \square



9.3.2 In terms of Łukasiewicz languages

We define a mapping φ from the set of (p, q) -sequences $\mathcal{S}_{p,q}$ into the free monoid over the alphabet $A = \{a, b\} \times \{a, b\}$, and give a necessary and sufficient condition on $\varphi(u, v)$ for (u, v) to be a (p, q) -parking function.

More precisely, let (u, v) be a (p, q) -sequence; then $\varphi(u, v) = (\varphi_q(u), \varphi_p(v))$, where $\varphi_q(u)$ is a word on the alphabet $\{a, b\}$ with p occurrences of a and $q + 1$ of b defined in the following way : consider the increasing rearrangement \tilde{u} of u , then $\varphi_q(u)$ is such that the i -th occurrence of the letter a in it is preceded by \tilde{u}_i occurrences of b ; $\varphi_p(v)$ is defined symmetrically.

EXAMPLE 9.5 $\varphi(1\ 5\ 0\ 2, 4\ 0\ 3\ 4\ 2) = (abababbab, abababaab)$.

Observe that the positions of the occurrences of a in $\varphi_q(u)$ and $\varphi_p(v)$ are the elements of \vec{u} and \vec{v} respectively.

Both words $\varphi_q(u)$ and $\varphi_p(v)$ have length $p + q + 1$. Hence we may consider $\varphi(u, v)$ as a word on the alphabet $A = \{(a, a), (b, a), (a, b), (b, b)\}$. For any word w in A^* and any letter $(x, y) \in A$, $|w|$ and $|w|_{(x,y)}$ denote respectively the length of w and the number of occurrences of (x, y) in w . We define :

$$\begin{aligned} |w|_a &= 2|w|_{(a,a)} + |w|_{(a,b)} + |w|_{(b,a)} = |w| + |w|_{(a,a)} - |w|_{(b,b)} \\ |w|_b &= 2|w|_{(b,b)} + |w|_{(a,b)} + |w|_{(b,a)} = |w| + |w|_{(b,b)} - |w|_{(a,a)}. \end{aligned}$$

Then $|\varphi(u, v)|_a = p + q$ and $|\varphi(u, v)|_b = p + q + 2$.

We define a morphism Δ from A^* to \mathbb{Z} by setting :

$$\begin{aligned} \Delta(a, a) &= 1 \\ \Delta(a, b) &= \Delta(b, a) = 0 \\ \Delta(b, b) &= -1 \end{aligned}$$

With this notation,

$$\Delta(\varphi(u, v)) = |\varphi(u, v)|_{(a,a)} - |\varphi(u, v)|_{(b,b)} = -1.$$

PROPOSITION 9.4 *The pair (u, v) is a (p, q) -parking function if and only if $\varphi(u, v)$ satisfies the following condition :*

$$\Delta(w) \geq 0 \text{ for any factorization } \varphi(u, v) = ww' \text{ such that } w' \neq \varepsilon,$$

i.e. if and only if $\varphi(u, v)$ belongs to the (Łukasiewicz) language \mathcal{L} defined by the equation

$$\mathcal{L} = (a, a) \cdot \mathcal{L}^2 + (a, b) \cdot \mathcal{L} + (b, a) \cdot \mathcal{L} + (b, b),$$

where $+$ denotes union and \cdot concatenation.

(For generalities about Łukasiewicz languages, see [96]).

Observe that, for any word w in A^* , $\Delta(w) \geq 0$ if and only if $|w|_a \geq |w|_b$, or equivalently $|w|_a \geq |w|$.

PROOF. By Proposition 9.2, (u, v) is a (p, q) -parking function if and only if $\vec{u} \cdot \vec{v}$ is a parking function. Let $i \leq p + q$, and w be the prefix of length i of $\varphi(u, v)$. There are as many occurrences of a in w as elements less than or equal to i in $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\begin{aligned} |w|_a &= |\{j \mid \vec{u}_j \leq i\}| + |\{j \mid \vec{v}_j \leq i\}| \\ &= |\{j \mid (\vec{u} \cdot \vec{v})_j \leq i\}| \end{aligned}$$

But $\vec{u} \cdot \vec{v}$ is a parking function if and only if $|\{j \mid (\vec{u} \cdot \vec{v})_j \leq i\}| \geq i$, that is, if and only if $|w|_a \geq i = |w|$.

But this means exactly $\Delta(w) \geq 0$. □

9.4 Sandpiles on $K_{p,q,1}$

The sandpile model is defined as an evolution process on the configurations of a graph, *i.e.* on the mappings from the set of vertices of a graph into \mathbb{N} . We consider here the graph $K_{p,q,1}$ and we show that (p, q) -parking functions correspond to the *recurrent* configurations of this model. This gives a proof for their enumeration.

The complete tripartite graph $K_{p,q,1}$ has three subsets of vertices of respective sizes p , q and 1, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$, and $\{z\}$, and its set of edges is

$$(X \times Y) \cup (\{z\} \times (X \cup Y)).$$

Figure 9.1 represents the tripartite graph $K_{5,4,1}$.

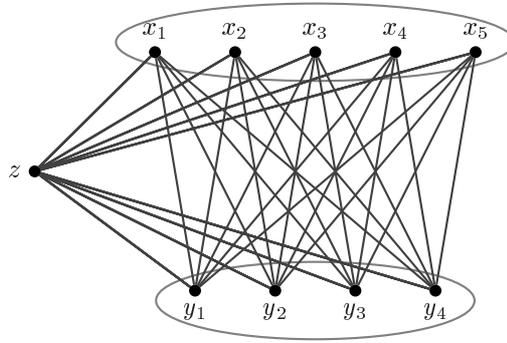


FIGURE 9.1 – The tripartite graph $K_{5,4,1}$.

A *configuration* of this graph is an assignment of non-negative integers to each vertex in $X \cup Y$. Hence a configuration is a pair (u, v) of sequences of respective lengths p and q . The integer u_i (resp. v_j) may be considered as a number of grains of sand lying in vertex x_i (resp. y_j).

A *toppling* of vertex $x_i \in X$ occurs if $u_i > q$; in that case, the new configuration (u', v') is such that :

- $u'_i = u_i - q - 1$,
- $\forall k \leq p, k \neq i \implies u'_k = u_k$,
- $\forall j \leq q, v'_j = v_j + 1$.

The missing grain of sand is supposed to have fallen in the sink z . A toppling of vertex $y_j \in Y$ is defined similarly.

EXAMPLE 9.6 Figure 9.2 represents two successive topplings on $K_{3,2,1}$ (for convenience's sake, the sink z has been omitted).

DEFINITION 9.2 A configuration (u, v) is *stable* if no vertex can topple, *i.e.* if (u, v) is a (p, q) -sequence. A stable configuration (u, v) is *recurrent* if it can be obtained by a sequence of topplings from a configuration (u', v') such that, for any $i \leq p, u'_i > q$, and for any $j \leq q, v'_j > p$.

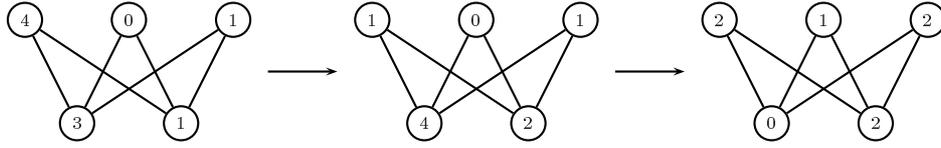


FIGURE 9.2 – Two topplings on the tripartite graph $K_{3,2,1}$.

PROPOSITION 9.5 A configuration (u, v) is recurrent if and only if the pair (u', v') defined by :

$$\forall i \leq p, u'_i = q - u_i \quad \text{and} \quad \forall j \leq q, v'_j = p - v_j$$

is a (p, q) -parking function.

PROOF. We use a characterization due to D. Dhar [44] of recurrent configurations. In the case of $K_{p,q,1}$, the criterion claims that (u, v) is recurrent if and only if the addition of 1 to each u_i and each v_j leads to a sequence of topplings in which each vertex topples exactly once. It is easy to verify that the order in which the vertices topple gives a permutation which is a certificate for (u', v') and vice versa. \square

Majumdar and Dhar [45] have also shown that recurrent configurations on a graph are in one-to-one correspondence with its spanning trees. This supplies a proof of the enumeration formula announced in Section 9.1, either by using known results on the number of spanning trees of multipartite graphs or by reproving them by arguments along the lines of Joyal’s method [81, 93] for Cayley’s formula. We do not detail this proof since we give another one in the next Section, that has the advantage of providing also a proof for the enumeration of increasing (p, q) -parking functions.



9.5 Enumeration by conjugacy

In order to enumerate (p, q) -parking functions, we establish a relationship between conjugacy on words and conjugacy on integer sequences, then we use a generalization due to L. Chottin of the so-called cyclic lemma [31].

Recall that two words w and w' are *conjugates* if $w = w_1 w_2$ and $w' = w_2 w_1$. Let ε denote the empty word, then any word w has $|w|$ factorizations $w = w_1 w_2$ such that $w_1 \neq \varepsilon$, which we call *proper* factorizations in the sequel. Hence it has at most $|w|$ conjugates (one of which is equal to w , for $w_2 = \varepsilon$). The number of different conjugates of w divides $|w|$ and each conjugate is due to the same number of distinct factorizations (see [96, p. 8]).

We define a related notion of conjugacy for integer sequences :

DEFINITION 9.3 Let $u = u_1 u_2 \dots u_p$ be an integer sequence such that for any index $i, 0 \leq u_i \leq q$, and let k belong to $\llbracket 0, q \rrbracket$. The k -th q -conjugate of u is the sequence $s_q^k(u)$ defined by :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, s_q^k(u)_i = u_i + k \pmod{q + 1}.$$

We denote by $\tilde{s}_q^k(u)$ the increasing rearrangement of $s_q^k(u)$. Observe that the $q+1$ q -conjugates of a sequence are all different, but this is not the case for the sequences $\tilde{s}_q^k(u)$. However, each *increasing* q -conjugate corresponds to the same number of q -conjugates of u .

PROPOSITION 9.6 *The mapping φ_q induces a bijection between q -conjugates of u and proper factorizations w_1w_2 of $\varphi_q(u)$ such that w_1 ends with a letter b (and realizes a bijection between increasing q -conjugates of u and conjugates of $\varphi_q(u)$ ending with a letter b).*

PROOF. Let $w = \varphi_q(u)$, then for any k in $\llbracket 0, q \rrbracket$, there is a unique factorization $w = w_1w_2$ such that w_1 ends with a b and $|w_2|_b = k$. Clearly $\varphi_q(s_q^k(u)) = w_2w_1$. \square

DEFINITION 9.4 Let (u, v) be a (p, q) -sequence; its *conjugates* are the pairs $(s_q^i(u), s_p^j(v))$, for all i and j in $\llbracket 0, q \rrbracket$ and $\llbracket 0, p \rrbracket$ respectively.

The following Proposition is a special case of Theorem 4.2 of [31]. We give its proof for the sake of completeness.

PROPOSITION 9.7 *For any pair (w', w'') of words in $\{a, b\}^*$ such that $|w'|_a = q$, $|w''|_a = p$ and $|w'| = |w''| = p + q + 1$, there exist exactly $p + q + 1$ ways of properly factorizing w' and w'' into $w'_1w'_2$ and $w''_1w''_2$ so that $(w'_2w'_1, w''_2w''_1)$ belongs to \mathcal{L} .*

PROOF. There are $(p + q + 1)^2$ pairs of proper factorizations of w' and w'' , which we gather in $p + q + 1$ classes with respect to the value of $|w'_1| - |w''_1| \pmod{p + q + 1}$. Each class is constituted of one pair of the type $w = (w'_1\varepsilon, w''_1w''_2)$ and its factorizations as a word of A^* . The cyclic lemma due to A. Dvoretzky and Th. Motzkin [46], sometimes attributed to G. N. Raney) claims that there is only one proper factorization w_1w_2 of w such that w_2w_1 belongs to \mathcal{L} . Since each class corresponds to a different word w and since there are $p + q + 1$ classes, this ends the proof. \square

Note that only $(p + 1)(q + 1)$ among the $(p + q + 1)^2$ ways of properly factorizing w' and w'' are such that both w'_1 and w''_1 end with a letter b . Moreover, any of the $p + q + 1$ decompositions whose existence is claimed by Proposition 9.7 satisfies this condition.

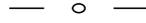
THEOREM 9.1 *Exactly $(p + q + 1)$ among the $(p + 1)(q + 1)$ conjugates of any (p, q) -sequence (u, v) are (p, q) -parking functions.*

PROOF. Each conjugate of (u, v) corresponds to a different way of properly factorizing $\varphi_q(u)$ and $\varphi_p(v)$ into $w'_1w'_2$ and $w''_1w''_2$ so that w'_1 and w''_1 end with a b . By Proposition 9.7, exactly $p + q + 1$ of them are such that $(w'_2w'_1, w''_2w''_1)$ belongs to \mathcal{L} , and by Proposition 9.4, this is the condition for (u, v) to be a (p, q) -parking function. \square

COROLLARY 9.8 *The number of (p, q) -parking functions is*

$$(p + q + 1) (p + 1)^{q-1} (q + 1)^{p-1}.$$

PROOF. The ratio of (p, q) -parking functions among the $(p + 1)^q(q + 1)^p$ (p, q) -sequences is $\frac{p + q + 1}{(p + 1)(q + 1)}$ by Theorem 9.1. □



9.6 Increasing (p, q) -parking functions

A (p, q) -sequence (u, v) is *increasing* if, for all $i < p$ and $j < q$, $u_i \leq u_{i+1}$ and $v_j \leq v_{j+1}$. The set $\mathcal{I}_{p,q}$ of increasing (p, q) -parking functions clearly constitutes a system of representatives of the orbits of the action of $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ on $\mathcal{P}_{p,q}$.

In this section we give two different proofs of the following result :

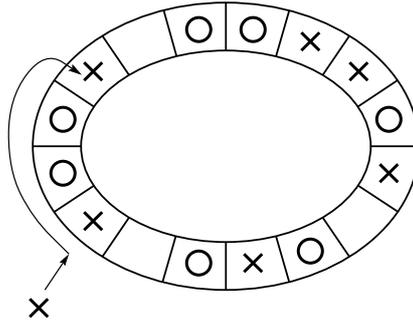
PROPOSITION 9.9 *The number of increasing (p, q) -parking functions is*

$$\frac{p + q + 1}{(p + 1)(q + 1)} \binom{p + q}{p} \binom{p + q}{q}.$$

Note that these numbers are usually known as Narayana’s numbers and have many interpretations. For instance, they enumerate plane trees with $n + 2$ vertices and $p + 1$ leaves, or noncrossing partitions of $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ into $p + 1$ blocks.

The first proof is an adaptation of Pollack’s one for counting parking functions :

PROOF 1. Consider a circular parking lot with $p + q + 1$ slots numbered clockwise 0 to $p + q$. The corresponding parking algorithm is similar to the usual one, except that preference $p + q$ is allowed and treated like any other : if slot $p + q$ is occupied, the car moves clockwise to the first empty slot.



The mapping $(u, v) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ realizes a one-to-one correspondence between $\mathcal{I}_{p,q}$ and sequences w of length $p + q$ such that :

- $\forall i \leq p + q, 0 \leq w_i \leq p + q,$
- $\forall i < p + q, i \neq p \implies w_i < w_{i+1},$
- the parking process leaves slot number $p + q$ unoccupied.

Clearly for any preference function satisfying the two first conditions, one slot is left empty, and by symmetry there are exactly as many sequences with a given empty slot as with any other.

Hence the number of increasing (p, q) -parking functions is

$$\frac{1}{p+q+1} \binom{p+q+1}{p} \binom{p+q+1}{q},$$

which is of course equal to the expected result. \square

The second proof shows that this result is also a straightforward consequence of Theorem 9.1 :

PROOF 2. Consider classes of $\mathcal{S}_{p,q}$ closed by conjugacy and by the action of $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$. Let C be one of these classes ; C is a disjoint union of orbits under the action of $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$. All these orbits have the same cardinality, since the action of an element of $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ is the same on all conjugates of a sequence, and each one contains exactly one increasing (p, q) -sequence. Moreover, either all elements of a given orbit are (p, q) -parking functions or none of them is. Hence, in C , the ratio of increasing (p, q) -parking functions among the increasing (p, q) -sequences is equal to the ratio of (p, q) -parking functions among (p, q) -sequences. Finally, since C is a disjoint union of conjugacy classes in which the ratio of (p, q) -parking functions is the same (by Theorem 9.1), the ratio of increasing (p, q) -parking functions among the increasing (p, q) -sequences in C , is equal to

$$\frac{p+q+1}{(p+1)(q+1)}.$$

Since this is true for any class C , their ratio among the total number of increasing (p, q) -sequences is the same. But the number of increasing (p, q) -sequences is

$$\binom{p+q}{p} \binom{p+q}{q},$$

thus ending the proof. \square

Remark that another generalization of parking functions called k -valet functions is defined in [54], whose particular case $k = 2$ is isomorphic to increasing (p, q) -parking functions.

— o —

9.7 Generalization

It is natural to introduce the set $\mathcal{P}_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ of (p_1, p_2, \dots, p_k) -parking functions in a similar way as (p, q) -parking functions by dividing the elements of a permutation into k intervals instead of two.

We adopt the following notations : let n and k be two positive integers, and (p_1, \dots, p_k) be a composition of n into k parts, i.e. a k -tuple of positive integers such that $p_1 + \dots + p_k = n$. For any $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, let $q_i = n - p_i$.

A (p_1, \dots, p_k) -sequence is a k -tuple $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ of integer sequences with respective lengths p_1, \dots, p_k and such that

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p_i \rrbracket, 0 \leq u_j^{(i)} \leq q_i.$$

For any permutation $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$, let $x_\sigma = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ be the (p_1, \dots, p_k) -sequence such that, for any $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ and any $j \in \llbracket 1, p_i \rrbracket$,

$$x_j^{(i)} = \left| \{1 \leq k \leq n \mid k \notin [\pi_{i-1} + 1, \pi_i] \text{ and } \sigma_k < \sigma_{\pi_{i-1} + j}\} \right|,$$

where $\pi_0 = 0$ and, for any $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\pi_i = p_1 + \dots + p_i$.

EXAMPLE 9.7 Let $k = 3$, $(p_1, p_2, p_3) = (3, 2, 4)$, and $\sigma = \underbrace{3\ 6\ 5}_{p_1} \underbrace{2\ 8}_{p_2} \underbrace{4\ 1\ 9\ 7}_{p_3}$.

Then $x_\sigma = (2\ 3\ 3, 1\ 6, 2\ 0\ 5\ 4)$.

DEFINITION 9.5 A (p_1, \dots, p_k) -sequence u is a (p_1, \dots, p_k) -parking function if there exists a permutation σ such that $u \preceq x_\sigma$.

Observe that the limit case $k = n$ corresponds to usual parking functions, while the case $k = 1$ is degenerated : the only (n) -parking function is a sequence containing n letters 0.

This definition gives rise to developments analogous to above. As proofs in the generic case are essentially the same as in the case $k = 2$, we only state the results.

For instance, (p_1, \dots, p_k) -parking functions correspond bijectively to recurrent configurations on the complete $(k+1)$ -partite graph $K_{p_1, \dots, p_k, 1}$, hence $\mathcal{P}_{p_1, \dots, p_k}$ can be put in one-to-one correspondence with the set of its spanning trees.

It can also be obtained that increasing (p_1, \dots, p_k) -parking functions are isomorphic to k -valet functions on (p_1, \dots, p_k) defined in [54].

The characterization in terms of Łukasiewicz languages suits as well : for any (p_1, \dots, p_k) -sequence $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$, let

$$\varphi(u) = \left(\varphi_{q_1}(u^{(1)}), \dots, \varphi_{q_k}(u^{(k)}) \right).$$

Then $\varphi(u)$ may be considered as a word over the alphabet $A_k = \{a, b\}^k$. For any letter w in A_k , let $|w|_a$ denote the number of occurrences of a in it, and $\Delta(w) = |w|_a - 1$. This defines a morphism from A_k^* to \mathbb{Z} such that, for any (p_1, \dots, p_k) -sequence u , $\Delta(\varphi(u)) = -1$.

Proposition 9.4 becomes :

PROPOSITION 9.10 Let $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ be a (p_1, \dots, p_k) -sequence. Then u is a (p_1, \dots, p_k) -parking function if and only if $\varphi(u)$ belongs to the Łukasiewicz language \mathcal{L}_k defined by the equation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \sum_{w \in A_k} w \cdot \mathcal{L}_k^{|w|_a} \\ &= (a, \dots, a, a) \cdot \mathcal{L}_k^k + (a, \dots, a, b) \cdot \mathcal{L}_k^{k-1} + \dots + (b, \dots, b, b). \end{aligned}$$

This enables to enumerate (p_1, \dots, p_k) -parking functions and increasing ones thanks to an argument of conjugacy :

DEFINITION 9.6 Let u be a (p_1, \dots, p_k) -sequence; then its *conjugates* are the k -tuples

$$\left(s_{q_1}^{i_1}(u^{(1)}), \dots, s_{q_k}^{i_k}(u^{(k)}) \right),$$

for all $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ and $i_j \in \llbracket 0, q_j \rrbracket$.

PROPOSITION 9.11 For any word $(w^{(1)}, \dots, w^{(k)})$ over A_k such that $|w^{(i)}|_a = q_i$ and $|w^{(i)}|_b = p_i + 1$ for any i , exactly $(n + 1)^{k-1}$ k -tuples of proper factorizations $w^{(i)} = w_1^{(i)} w_2^{(i)}$ are such that $(w_2^{(1)} w_1^{(1)}, \dots, w_2^{(k)} w_1^{(k)})$ belongs to \mathcal{L}_k .

As a consequence,

PROPOSITION 9.12 The ratio of (increasing) (p_1, \dots, p_k) -parking functions in the set of (increasing) (p_1, \dots, p_k) -sequences is

$$\frac{(n + 1)^{k-1}}{(n - p_1 + 1) \cdots (n - p_k + 1)}.$$

Hence the number of (p_1, \dots, p_k) -parking functions and increasing ones are respectively

$$(n + 1)^{k-1} \prod_{i=1}^k (n - p_i + 1)^{p_i - 1}$$

and

$$\frac{1}{n + 1} \prod_{i=1}^k \binom{n + 1}{p_i}.$$

— o —

Bibliographie

- [1] ALONSO, L., RÉMY, J. L., et SCHOTT, R. A linear-time algorithm for the generation of trees. *Algorithmica* 17, 2 (1997), pages 162–182.
- [2] AMBJORN, J., BIALAS, P., JURKIEWICZ, J., BURDA, Z., et PETERSSON, B. Effective sampling of random surfaces by baby universe surgery. *Phys. Lett. B* 325 (1994).
- [3] ARNOL'D, V. I. Topological classification of complex trigonometric polynomials and the combinatorics of graphs with an identical number of vertices and edges. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 30, 1 (1996), pages 1–17.
- [4] ARQUÈS, D. Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés. *Discrete Mathematics* 58, 1 (1986), pages 11–24.
- [5] ATKINSON, M. D., et BEALS, R. Priority queues and permutations. *SIAM J. Comput.* 23, 6 (1994), pages 1225–1230.
- [6] ATKINSON, M. D., LINTON, S. A., et WALKER, L. A. Priority queues and multisets. *Electron. J. Combin.* 2 (1995). R24, 18 pages (électronique).
- [7] ATKINSON, M. D., et THIYAGARAJAH, M. The permutational power of a priority queue. *BIT* 33, 1 (1993), pages 2–6.
- [8] BAKER, B. S. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *Journal of the ACM* 41, 1 (Jan. 1994), pages 153–180.
- [9] BÉDARD, F., et GOUPIL, A. The poset of conjugacy classes and decomposition of products in the symmetric group. *Canad. Math. Bull.* 35, 2 (1992), pages 152–160.
- [10] BENDER, E. A., et CANFIELD, E. R. The number of degree-restricted rooted maps on the sphere. *SIAM J. Discrete Math.* 7, 1 (1994), pages 9–15.
- [11] BENDER, E. A., CANFIELD, E. R., GAO, Z., et RICHMOND, L. B. Submap density and asymmetry results for two parameter map families. *Combin. Probab. Comput.* 6, 1 (1997), pages 17–25.
- [12] BENDER, E. A., et WORMALD, N. C. The number of rooted convex polyhedra. *Canad. Math. Bull.* 31, 1 (1988), pages 99–102.
- [13] BERGE, C. *Principes de combinatoire*. Dunod, Paris, 1968.
- [14] BERTRAM, E. A., et WEI, V. K. Decomposing a permutation into two large cycles : an enumeration. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 1, 4 (1980), pages 450–461.
- [15] BESSIS, D., ITZYKSON, C., et ZUBER, J.-B. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. *Adv. in Appl. Math.* 1, 2 (1980), pages 109–157.

- [16] BIGGS, N. The Tutte polynomial as a growth function. *J. Alg. Comb.* 10 (1999), pages 115–133.
- [17] BOCCARA, G. Nombre de représentations d’une permutation comme produit de deux cycles de longueurs données. *Discrete Mathematics* 29, 2 (1980), pages 105–134.
- [18] BOLLOBÁS, B. *Random graphs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1985.
- [19] BOUSQUET, M. *Théorie des espèces et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires*. Thèse, LaCIM, Université du Québec à Montréal, 1999.
- [20] BOUSQUET, M. Quelques résultats sur les cactus planaires. *Ann. Sci. Math. Québec* 24, 2 (2000), pages 107–128.
- [21] BOUSQUET-MÉLOU, M., et SCHAEFFER, G. Enumeration of planar constellations. *Adv. in Appl. Math.* 24, 4 (2000), pages 337–368.
- [22] BOUSQUET-MÉLOU, M., et SCHAEFFER, G. The degree distribution in bipartite planar maps : applications to the Ising model. arXiv:math.CO/0211070, novembre 2002.
- [23] BOUTTIER, J., DI FRANCESCO, P., et GUITTER, E. Census of planar maps : from the one-matrix model solution to a combinatorial proof. arXiv:cond-mat/0207682, juillet 2002.
- [24] BOUTTIER, J., DI FRANCESCO, P., et GUITTER, E. Critical and tricritical hard objects on bicolourable random lattices : exacts solutions. *J. Phys. A* 35, 17 (2002), pages 3821–3854.
- [25] BOUYA, D., et ZVONKIN, A. Topological classification of complex polynomials : new experimental results. <http://dept-info.labri.u-bordeaux.fr/~zvonkin>, May 1999.
- [26] BREZIN, E., ITZYKSON, C., PARISI, G., et ZUBER, J.-B. Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.* 59 (1978), pages 35–47.
- [27] BROWN, W. G. Enumeration of non-separable planar maps. *Canad. J. Math.* 15 (1963), pages 526–545.
- [28] BROWN, W. G., et TUTTE, W. T. On the enumeration of rooted non-separable planar maps. *Canad. J. Math.* 16 (1964), pages 572–577.
- [29] CHASSAING, P., et SCHAEFFER, G. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. In *Mathematics and computer science, II (Versailles, 2002)*, Trends Math. Birkhäuser, Basel, 2002, pages 127–145.
- [30] CHAUVE, C., GOUPIL, A., et POULALHON, D. Factorizations of signed permutations. Soumis à FPSAC/SFCA’03.
- [31] CHOTTIN, L. Énumération d’arbres et formules d’inversion de séries formelles. *J. Comb. Th. B.* 31 (1981), pages 23–45.
- [32] CHROBAK, M., et YUNG, M. Fast algorithms for edge-coloring planar graphs. *Journal of Algorithms* 10, 1 (Mar. 1989), pages 35–51.
- [33] CHUANG, R.-N., GARG, A., HE, X., KAO, M.-Y., et LU, H.-I. Compact encodings of planar graphs via canonical orderings and multiple parentheses. In *25th ICALP (New-York, 1998)*, n° 1443 in Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, pages 118–129.
- [34] CORI, R. Un code pour les graphes planaires et ses applications. *Astérisque* 27 (1975).
- [35] CORI, R., et MACHÌ, A. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey I, II, III. *Exposition. Math.* 10, 5 (1992), pages 403–427, 429–447, 449–467.

- [36] CORI, R., et POULALHON, D. Enumeration of (p,q) -parking functions. *Discrete Mathematics* 256, 3 (2002), pages 609–623.
- [37] CORI, R., et ROSSIN, D. On the sandpile group of dual graphs. *European Journal of Combinatorics* 21 (2000), pages 447–459.
- [38] CORI, R., et VAUQUELIN, B. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.* 33, 5 (1981), pages 1023–1042.
- [39] DE FRAYSSEIX, H., OSSONA DE MENDEZ, P., et ROSENSTIEHL, P. Bipolar orientations revisited. *Discrete Appl. Math.* 56, 2-3 (1995), pages 157–179.
- [40] DEL LUNGO, A., DEL RISTORO, F., et PENAUD, J.-G. Left ternary trees and non-separable rooted planar maps. *Theor. Comput. Sci.* 233, 1-2 (2000), pages 201–215.
- [41] DÉNES, J. The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 4 (1959), pages 63–71.
- [42] DENISE, A. Generation of random planar maps. In *Graph Drawing'93* (Paris, 1993).
- [43] DENISE, A., VASCONCELLOS, M., et WELSH, D. J. A. The random planar graph. *Congr. Numer.* 113 (1996), pages 61–79. Festschrift for C. St. J. A. Nash-Williams.
- [44] DHAR, D. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990), pages 1613–1616.
- [45] DHAR, D., et MAJUMDAR, S. N. Abelian sandpile model on the Bethe lattice. *J. Phys. A* 23, 19 (1990), pages 4333–4350.
- [46] DVORETZKY, A., et MOTZKIN, T. The asymptotic density of certain sets of real numbers. *Duke Math. J.* 14 (1947), pages 315–321.
- [47] EDELMAN, P. H., et SIMION, R. Chains in the lattice of noncrossing partitions. *Discrete Mathematics* 126 (1994), pages 107–119.
- [48] EDEN, M., et SCHÜTZENBERGER, M. P. Remark on a theorem of Dénes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 7 (1962), pages 353–355.
- [49] EZELL, C. L. Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 243 (1978), pages 123–133.
- [50] FARAHAT, H. K., et HIGMAN, G. The centres of symmetric group rings. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 250 (1959), pages 212–221.
- [51] FLAJOLET, P., ZIMMERMAN, P., et CUTSEM, B. V. A calculus for the random generation of labelled combinatorial structures. *Theoretical Computer Science* 132, 1-2 (1994), pages 1–35.
- [52] FOATA, D., et RIORDAN, J. Mappings of acyclic and parking functions. *Aequ. Math.* 10 (1974), pages 10–22.
- [53] GAO, Z. J., WANLESS, I. M., et WORMALD, N. C. Counting 5-connected planar triangulations. *J. Graph Theory* 38, 1 (2001), pages 18–35.
- [54] GILBEY, J., et KALIKOW, L. H. Parking functions, valet functions and priority queues. *Discrete Mathematics* 197/198 (1999), pages 351–373.
- [55] GOLIN, M., et ZAKS, S. Labelled trees and pairs of input-output permutations in priority queues. *Theoret. Comput. Sci.* 205, 1-2 (1998), pages 99–114.

-
- [56] GOULDEN, I. P. A differential operator for symmetric functions and the combinatorics of multiplying transpositions. *Trans. Amer. Math. Soc.* *344*, 1 (1994), pages 421–440.
- [57] GOULDEN, I. P., et JACKSON, D. M. *Combinatorial enumeration*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- [58] GOULDEN, I. P., et JACKSON, D. M. The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European Journal of Combinatorics* *13*, 5 (1992), pages 357–365.
- [59] GOULDEN, I. P., et JACKSON, D. M. Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* *125*, 1 (1997), pages 51–60.
- [60] GOULDEN, I. P., et JACKSON, D. M. Transitive factorizations in the symmetric group, and combinatorial aspects of singularity theory. *European Journal of Combinatorics* *21*, 8 (2000), pages 1001–1016.
- [61] GOULDEN, I. P., JACKSON, D. M., et VAINSHTEIN, A. The number of ramified coverings of the sphere by the torus and surfaces of higher genera. *Ann. Comb.* *4*, 1 (2000), pages 27–46.
- [62] GOULDEN, I. P., et PEPPER, S. Labelled trees and factorizations of a cycle into transpositions. *Discrete Mathematics* *113*, 1-3 (1993), pages 263–268.
- [63] GOUPIL, A. On products of conjugacy classes of the symmetric group. *Discrete Mathematics* *79*, 1 (1989/90), pages 49–57.
- [64] GOUPIL, A., POULALHON, D., et SCHAEFFER, G. Central characters and conjugacy classes of the symmetric group, or On some conjectures of J. Katriel. In *Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow, 2000)*. Springer, Berlin, 2000, pages 238–249.
- [65] GOUPIL, A., et SCHAEFFER, G. Factoring n -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics* *19*, 7 (1998), pages 819–834.
- [66] GROSS, J. L., et TUCKER, T. W. *Topological graph theory*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1987.
- [67] HAIMAN, M. D. Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants. *J. Alg. Comb.* *3* (1994), pages 17–76.
- [68] HARARY, F., PRINS, G., et TUTTE, W. T. The number of plane trees. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Indag. Math.* *26* (1964), pages 319–329.
- [69] HE, X. An efficient algorithm for edge coloring planar graphs with Δ colors. *Theoretical Computer Science* *74*, 3 (1990), pages 299–312.
- [70] HE, X., et KAO, M.-Y. Linear-time succinct encodings of planar graphs via canonical orderings. *SIAM J. Discr. Math.* *12*, 3 (1999), pages 317–325.
- [71] HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B* *72* (1974), pages 461–473.
- [72] HOPCROFT, J. E., et TARJAN, R. E. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM J. Comput.* *2* (1973), pages 135–158.
- [73] HURWITZ, A. Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.* *39* (1891), pages 1–66.
- [74] INGRAM, R. E. Some characters of the symmetric group. *Proc. AMS* *1* (1950), pages 358–369.

- [75] JACKSON, D. M. Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group. *J. Combin. Theory Ser. A* 49, 2 (1988), pages 363–369.
- [76] JACKSON, D. M., et VISENTIN, T. I. Character theory and rooted maps in an orientable surface of given genus : face-colored maps. *Trans. Amer. Math. Soc.* 322, 1 (1990), pages 365–376.
- [77] JACQUARD, B., et SCHAEFFER, G. A bijective census of nonseparable planar maps. *J. Combin. Theory Ser. A* 83, 1 (1998), pages 1–20.
- [78] JAMES, G., et KERBER, A. *The representation theory of the symmetric group. Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume 16. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. Préface de P. M. Cohn, introduction de G. de B. Robinson.
- [79] JONES, G. A. Trees, permutations and characters. Manuscrit, 1996.
- [80] JONES, G. A., et SINGERMAN, D. Belyı functions, hypermaps and Galois groups. *Bull. London Math. Soc.* 28, 6 (1996), pages 561–590.
- [81] JOYAL, A. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Adv. in Math.* 42 (1981), pages 1–82.
- [82] KALIKOW, L. H. *Enumeration of parking functions, allowable permutations pairs, and labeled trees*. Thèse, Brandeis University, 1999.
- [83] KATRIEL, J. Some useful results concerning the representation theory of the symmetric group. *J. Phys. A* 24, 22 (1991), pages 5227–5234.
- [84] KATRIEL, J. Representation-free evaluation of the eigenvalues of the class-sums of the symmetric group. *J. Phys. A* 26, 4 (1993), pages L135–L137.
- [85] KATRIEL, J. A conjecture concerning the evaluation of products of class-sums of the symmetric group. In *Groups '93 Galway/St. Andrews' conference* (1995), C. M. Campbell et al., éditeurs. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.*, volume 212, pages 322–332.
- [86] KATRIEL, J. Explicit expressions for the central characters of the symmetric group. *Discrete Applied Math.* 67 (1996), pages 149–156.
- [87] KATRIEL, J. Class-sum products in the symmetric group : minimally connected reduced class coefficients. *Math. Comput. Modelling* 26, 8-10 (1997), pages 161–167.
- [88] KATRIEL, J. The class algebra of the symmetric group. In *Proceedings of the 10th international Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'98), Toronto* (1998), pages 401–410.
- [89] KATRIEL, J., et PAUNCZ, R. Eigenvalues of single-cycle class-sums in the symmetric group ii. *Int. J. Quant. Chem.* 48 (1993), pages 125–134.
- [90] KNUTSON, D. *λ -rings and the representation theory of the symmetric group. Lecture Notes in Math.*, volume 308. Springer, 1973.
- [91] KONHEIM, A. G., et WEISS, B. An occupancy discipline and applications. *Siam J. Appl. Math.* 14 (1966), pages 1266–1274.
- [92] KREWERAS, G. Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Mathematics* 1 (1972), pages 333–350.
- [93] LABELLE, G. Une nouvelle démonstration combinatoire des formules de Lagrange. *Adv. in Math.* 42 (1981), pages 217–247.

- [94] LEHMAN, A. B. A bijective census of rooted planar maps. In *Communication at Ontario Math. Conference* (1970).
- [95] LISKOVEYS, V., et WALSH, T. Unicursal planar maps. In *Proceedings of the 14th international conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC'02)* (2002).
- [96] LOTHAIRES, M. *Combinatorics on words*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Réédition corrigée de la version originale de 1983.
- [97] MACDONALD, I. G. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, deuxième édition. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [98] MACMAHON, P. A. *Combinatorial analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1915. Réédition, Chelsea, New-York, 1960.
- [99] MOSZKOWSKI, P. A solution to a problem of Dénes : a bijection between trees and factorizations of cyclic permutations. *European Journal of Combinatorics* 10, 1 (1989), pages 13–16.
- [100] MULLIN, R. C. On counting rooted triangular maps. *Canad. J. Math.* 17 (1965), pages 373–382.
- [101] MUNRO, J., et RAMAN, V. Succinct representation of balanced parentheses, static trees and planar graphs. In *38th IEEE FOCS* (Miami Beach, Florida, Oct. 1997), pages 118–126.
- [102] PAK, I. *Random walks on groups : strong uniform time approach*. Thèse, Harvard University, 1997.
- [103] POULALHON, D. Suites de parking et paires admissibles. Exposé à l'École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel, Bordeaux, mars 1999.
- [104] POULALHON, D., et SCHAEFFER, G. A bijection for loopless triangulations of a polygon with interior points. *Theoretical Computer Science* (à paraître).
- [105] POULALHON, D., et SCHAEFFER, G. Factorizations of large cycles in the symmetric group. *Discrete Mathematics* 254, 1-3 (2002), pages 433–458.
- [106] RANEY, G. N. Functional composition patterns and power series reversion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 94 (1960), pages 441–451.
- [107] RICHMOND, L. B., et WORMALD, N. C. Almost all maps are asymmetric. *J. Combin. Theory Ser. B* 63, 1 (1995), pages 1–7.
- [108] SAGAN, B. E. *The symmetric group*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [109] SCHAEFFER, G. Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees. *Electron. J. Combin.* 4, 1 (1997). R20, 14 pages (électronique).
- [110] SCHAEFFER, G. *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. Thèse, Université Bordeaux I, 1998.
- [111] SCHAEFFER, G. Random sampling of large planar maps and convex polyhedra. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on theory of computing (STOC'99)* (Atlanta, Georgia, may 1999), ACM Press, pages 760–769.
- [112] SCHNEPS, L., éditeur. *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, volume 200. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [113] SCHNYDER, W. Planar graphs and poset dimension. *Order* 5, 4 (1989), pages 323–343.
- [114] SERRE, J.-P. *Topics in Galois theory*. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992. Notes préparées par H. Darmon, avec une préface par Darmon et l’auteur.
- [115] SHAPIRO, B., SHAPIRO, M., et VAINSHTEIN, A. Ramified coverings of S^2 with one degenerate branching point and enumeration of edge-ordered graphs. In *Topics in singularity theory*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pages 219–227.
- [116] STANLEY, R. P. Factorization of permutations into n -cycles. *Discrete Mathematics* 37, 2-3 (1981), pages 255–262.
- [117] STANLEY, R. P. Parking functions and noncrossing partitions. *Elec. J. Comb.* 4 (1997). R20, 14 pages (électronique).
- [118] STANLEY, R. P. Hyperplane arrangements, parking functions and tree inversions. In *Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota*. *Progr. Math.*, volume 161. Birkäuser, Boston/Basel/Berlin, 1998, pages 359–375.
- [119] STREHL, V. Minimal transitive products of transpositions – the reconstruction of a proof of A. Hurwitz. *Sém. Lothar. Combin.* 37 (1996). Article S37c, 12 pages (électronique).
- [120] TAMASSIA, R. Graphs drawing. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, J. Goodman et J. O’Rourke, éditeurs. CRC Press, 1997.
- [121] TUTTE, W. T. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.* 14 (1962), pages 21–38.
- [122] TUTTE, W. T. A census of slicings. *Canad. J. Math.* 14 (1962), pages 708–722.
- [123] TUTTE, W. T. A census of planar maps. *Canad. J. Math.* 15 (1963), pages 249–271.
- [124] TUTTE, W. T. On the enumeration of planar maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), pages 64–74.
- [125] TUTTE, W. T. Duality and trinity. In *Infinite and finite sets, Vol. III* (Amsterdam, 1975), North-Holland, pages 1459–1472. *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. 10.
- [126] TUTTE, W. T. *Graph theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. Réédition de la version originale de 1984.
- [127] WALKUP, D. W. How many ways can a permutation be factored into two n -cycles? *Discrete Mathematics* 28, 3 (1979), pages 315–319.
- [128] WALSH, T. R. S., et LEHMAN, A. B. Counting rooted maps by genus. I. *J. Combinatorial Theory Ser. B* 13 (1972), pages 192–218.
- [129] WHITNEY, H. A set of topological invariants for graphs. *Amer. J. Math.* 55 (1933), pages 231–235.
- [130] ZVONKIN, A. Matrix integrals and map enumeration : an accessible introduction. *Math. Comput. Modelling* 26, 8–10 (1997), pages 281–304.
- [131] ZVONKINE, D. Transversal multiplicities of the Lyashko-Looijenga map. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 325, 6 (1997), pages 589–594.
- [132] ZVONKINE, D., et LANDO, S. K. On multiplicities of the Lyashko-Looijenga mapping on strata of the discriminant. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 33, 3 (1999), pages 21–34.