M2 LMFI – Logique 09-10
Cours fondamental 2 23 novembre 2009

Feuille d'exercices

Théorème de Rice-Shapiro.

Définitions.

Le théorème de Rice-Shapiro fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble qui vérifie des conditions analogues à celles du théorème de Rice soit récursivement énumérable. Dans les deux première parties de cette feuille, on donne deux conditions suffisantes pour qu'un tel ensemble ne soit pas récursivement énumérable. Le théorème de Rice-Shapiro est démontré dans la dernière partie.

Un ensemble d'entier X est dit *non trivial* s'il vérifie

i. $X \neq \emptyset$;

ii. $X \neq \mathbb{N}$.

Il est dit *extensionnel pour les ensembles* s'il vérifie :

iii. pour tous i et j, si $i \in X$ et $W_i = W_j$ alors $j \in X$.

Une classe $\mathcal{C}$ de sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbb{N}$ est dite *complètement récursivement énumérée* si l'ensemble de tous les indices des ensembles de $\mathcal{C}$:

$$\{i \in \mathbb{N} \ / \ \exists W \in \mathcal{C} \ W_i = W\}$$

est récursivement énumérable.

1 Stabilité par inclusion des classes complètement énumérées.

On rappelle que φ^p désigne la fonction d'énumération des fonctions récursives partielles à p arguments, W_i^p le domaine de la fonction φ_i^p, et T^p un prédicat primitif récursif de terminaison (on omettra les exposants pour $p = 1$) vérifiant :

$$\exists d \ T^p[i, x_1 \ldots, x_p, d] \quad \text{ssi} \quad \varphi^p(i, x_1, \ldots, x_p) \downarrow (\quad \text{ssi} \quad (x_1, \ldots, x_p) \in W_i^p) \ .$$

1. **a.** Soient deux fonctions récursives partielles définies sur $\mathbb{N}$, f de domaine A et g de domaine B. Rappeler comment l'on construit une fonction récursive partielle h de domaine $A \cup B$ (utiliser le prédicat T pour i et j indices de f et g).

b. En reprenant la construction ci-dessus montrer qu'il existe une fonction primitive récursive u telle que

$$W_{u(i,j)} = W_i \cup W_j \ .$$

2. Soit X un sous-ensemble récursivement énumérable de $\mathbb{N}$, et f une fonction récursive partielle à un argument. Montrer qu'il existe une fonction primitive récursive α telle que

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha(i)}(x) = f(x) & \text{si } i \in X \\ \varphi_{\alpha(i)}(x) \uparrow & \text{si } i \notin X \end{cases}$$

3. Soient X, E et F des sous-ensembles récursivement énumérables de $\mathbb{N}$ avec $E \subset F$. Montrer en vous servant des résultats des deux questions précédentes qu'il existe une fonction primitive récursive β vérifiant :

$$\begin{cases} W_{\beta(i)} = F & \text{si } i \in X \\ W_{\beta(i)} = E & \text{si } i \notin X \end{cases}$$

4. On suppose maintenant que X est un ensemble récursivement énumérable extensionnel pour les ensembles. En utilisant le résultat de la question précédente et le théorème du point fixe montrer que :

$$\text{si } j \in X \text{ et } W_j \subset W_k \text{ alors } k \in X \ .$$

5. En déduire que F, l'ensemble des indices des ensembles finis, R l'ensemble des indices des ensembles récursifs ne sont pas récursivement énumérables.

2 Une classe complètement énumérée contient un sous-ensemble fini non vide de chacun de ses sous-ensembles.

On suppose que X est un ensemble récursivement énumérable non vide.

1. Soit Y un ensemble récursivement énumérable, et e un élément de X. Définir une fonction récursive α de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :
   – si $x \in Y$, $W_{\alpha(x)} \subset W_e$ et $W_{\alpha(x)}$ est fini ;
   – si $x \notin Y$, $W_{\alpha(x)} = W_e$.
   Indication : utiliser pour un indice k de Y le prédicat suivant :
   $$T[e, z, d] \wedge \forall d' \leqslant z \ \neg T[k, x, d'] \ .$$
2. On suppose maintenant que X est un ensemble extensionnel pour les ensembles, non vide, et récursivement énumérable. Montrer qu'alors, si $e \in X$:
   $$\exists j \in X(W_j \text{ est fini} \wedge W_j \subset W_e)$$
   Indication : utiliser la question précédente avec Y non récursif.
3. Application : montrer que l'ensemble des indices de fonctions totales, et l'ensemble des indices de fonctions d'ensemble de définition infini ne sont pas récursivement énumérables.

3 Théorème de Rice-Shapiro.

On démontre maintenant une sorte de réciproque des résultats des deux parties précédentes.

1. Montrer qu'il existe une énumération $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ telle que $y \in F_x$ est un prédicat récursif (on ne demande pas que l'énumération soit sans répétition, bien que cela soit possible).
2. Montrer que, pour $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ comme ci-dessus, il existe une fonction récursive totale β telle que :
   $$W_{\beta(x)} = F_x$$
3. **Théorème de Rice Shapiro.** Soit une énumération $(F_x)_{x \in \mathbb{N}}$ de tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ telle que $y \in F_x$ est un prédicat récursif. Montrer qu'un ensemble X extensionnel pour les ensembles et non trivial est récursivement énumérable si et seulement s'il existe un ensemble récursivement énumérable A tel que :
   $$X = \{x \in \mathbb{N} \ / \ \exists i(i \in A \wedge F_i \subset W_x)\}$$