# Fonctions récursives partielles et $\Sigma$-définissabilité

(résumé du cours)

## 1 Fonction $\beta$ de Gödel

L'exercice 2 utilisera un codage des suites finies d'entiers telle que la fonction de décodage s'expriment "sans récurrence" (voir exercice 2). Ce codage, contrairement à ceux introduits pour les fonctions récursives primitives, n'est pas injectif, et en fait une suite donnée aura une infinité de codes, mais ce n'est pas gênant pour l'usage que nous en aurons. On le construit en utilisant le *théorème des restes chinois*, dont voici une version :

**Théorème** Si $d_0, \ldots, d_n$ sont des entiers premiers entre eux 2 à 2, si $a_0, \ldots, a_n$ sont des entiers vérifiant

$$\text{pour tout } 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq a_i < d_i$$

alors ($r(a, d)$ étant le reste de la division de $a$ par $d$), il existe un entier $a$ tel que pour tout $0 \leq i \leq n$ :

$$a \equiv a_i \mod d_i \quad \text{c.a.d. } a_i = r(a, d_i)$$

Pour coder une suite d'entiers $a_0, \ldots, a_n$ on va donc utiliser un entier $a$ fourni par le théorème des restes chinois, pour $n+1$ entiers $d_i$ premiers entre eux 2 à 2 qu'il faut construire.

**1.** Montrer que si pour un entier $s \geq n$, on pose $d = s!$, alors les entiers

$$b_0 = 1 + d,\ 1 + 2d, \ldots, b_n = 1 + (n+1)d$$

sont premiers entre eux 2 à 2.

La fonction $\beta$ de Gödel est définie par :

$$\beta(i, a, d) = r(a, 1 + (i+1)d)$$

**2.** Montrer que pour toute suite finie d'entiers $(a_0, \ldots, a_n)$ il existe deux entiers $a$ et $d$ tels que :

$$\text{pour tout } 0 \leq i \leq n \quad \beta(i, a, d) = a_i$$

**3.** Montrer que la fonction $\beta$ est primitive récursive.

## 2 Caractérisation des fonctions récursives sans récurrence.

Soit $\mathcal{C}$ le plus petit ensemble de fonctions partielles à plusieurs arguments entiers :

- contenant l'addition, la multiplication, les fonctions projections et la fonction caractéristique de l'égalité $\delta$ (définie par $\delta(x, y) = 1$ si $x = y$, 0 sinon) ;
- clos par composition ;
- clos par minimisation.

**1.** Montrer que $\mathcal{C}$ est contenu dans l'ensemble des fonctions récursives partielles.

**2.** Montrer que la fonction constante égale à 1, la fonction successeur et la fonction nulle sont dans $\mathcal{C}$.

**3.** Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^p$ dont les fonctions caractéristiques sont dans $\mathcal{C}$ est clos pour les opérations booléennes.

**4.** Pour les besoins de la démonstration, il est pratique d'utiliser la forme suivante de minimisation bornée, $R$ est un prédicat :

$$f(x_1, \ldots, x_k, z) = (\tilde{\mu} y < z)\ R(x_1, \ldots, x_k, y)$$
$$= \begin{cases} \tilde{\mu} y\ R(x_1, \ldots, x_k, y) & \text{s'il existe } y < z \\ & \text{tel que } R(x_1, \ldots, x_k, y) \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est clos pour cet opérateur de minimisation bornée $\tilde{\mu}$ : si la fonction caractéristique du prédicat $R$ d'arité $k+1$ est dans $\mathcal{C}$, alors la fonction $f$ de $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ définie comme ci-dessus est dans $\mathcal{C}$.

**5.** Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^p$ dont les fonctions caractéristiques sont dans $\mathcal{C}$ est clos pour les quantifications (existentielle et universelle) bornées.

**6.** Montrer que les fonctions $\pi_2^1$ et $\pi_2^2$ qui calculent les composantes $x$ et $y$ du couple de Cantor $< x, y >= \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$ et la fonction $\beta$ de Gödel (section 1 précédent) sont dans $\mathcal{C}$.

**7.** Montrer que la fonction $\beta' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, définie à l'aide de la fonction de Gödel $\beta$, est dans $\mathcal{C}$ :

$$\forall z, i \in \mathbb{N},\ \beta'(z, i) = \beta(i, \pi_2^1(z), \pi_2^2(z)) \ .$$

**8.** Montrer la clôture de $\mathcal{C}$ par schéma de récurrence primitive pour des fonctions totales, c'est-à-dire que, si $g : \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^{p+2} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont des fonctions totales de $\mathcal{C}$, alors $f : \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie ci-dessous est une fonction totale de $\mathcal{C}$.

$$f(a_1, \ldots, a_p, 0) = g(a_1, \ldots, a_p)$$
$$f(a_1, \ldots, a_p, x+1) = h(a_1, \ldots, a_p, x, f(a_1, \ldots, a_p, x))$$

On commencera par calculer par minimisation un code de la suite $[f(\vec{a}, 0); \ldots; f(\vec{a}, x)]$ en utilisant la fonction $\beta$.

**9.** En déduire que $\mathcal{C}$ est égal à l'ensemble des fonctions récursives partielles.

## 3 formules $\Sigma$.

Le langage est celui de l'arithmétique $(0, s, +, \times)$. La classe des formules $\Sigma$ est la plus petite classe de formules :

**i.** qui contient Les formules atomiques égalitaires (égalités polynomiales) ;

**ii.** qui contient les négations de telles formules ;

**iii.** qui est close par conjonction et disjonction ;

**iv.** qui est close par quantification universelle bornée ;

**v.** qui est close par quantification existentielle.

Un ensemble $E \subset \mathbb{N}^k$ est $\Sigma$ s'il est définissable par une formule $\Sigma$, c'est à dire s'il existe une formule $\Sigma$ $A(x_1, \ldots, x_k)$ telle que pour tous entiers $n_1, \ldots, n_k$ :

$$(n_1, \ldots, n_k) \in E \text{ ssi } \mathbb{N} \models A(n_1, \ldots, n_k)$$

**1.** Montrer qu'un ensemble $\Sigma$ est récursivement énumérable.

**2.** Montrer que la classe des formules $\Sigma$ est close par quantification existentielle bornée.

**3.** Montrer que le graphe d'une fonction récursive partielle est $\Sigma$ (utilisez le résultat de la section 2 précédente).

**4.** En déduire qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}^k$ est récursivement énumérable si et seulement s'il est $\Sigma$, et qu'il est récursif si et seulement s'il est $\Sigma$ de complémentaire $\Sigma$.