

# THÉORIE DES ENSEMBLES ET OPÉRATIONS ENSEMBLISTES

Paul Rozière  
Paris Diderot – Paris 7

15 juin 2022  
*version provisoire – (931)*

Les mathématiciens ont commencé à s'intéresser aux ensembles infinis et à le étudier dans le dernier quart du XIX<sup>e</sup>, avec les travaux de Georg Cantor et de Richard Dedekind. La première axiomatisation de la théorie des ensembles a été donnée par Ernst Zermelo en 1908. Ici on va se contenter de donner quelques indications à propos des axiomes proposés par Zermelo. On signalera d'abord les écueils qu'une telle axiomatisation doit éviter, mais on ne construira pas vraiment axiomatiquement la théorie. On ne cherchera pas non plus même à montrer comment toutes les notions mathématiques usuelles peuvent se réduire à des notions ensemblistes<sup>1</sup>.

## 1 La notion d'ensemble

la notion d'ensemble est liée à celle de prédicat ou propriété. Par exemple, nous avons vu dans la première partie sur l'arithmétique que la récurrence qui s'exprime souvent en terme de « propriété » peut aussi s'exprimer de façon ensembliste. Ce qui lie les deux est appelée *compréhension*. Ainsi une propriété  $P$  définie sur les nombres entiers naturels définit un sous-ensemble  $E$  qui est l'ensemble des entiers naturels vérifiant cette propriété. On note :

$$E = \{x \in \mathbb{N} / P[x]\}$$

qui est une définition de  $E$  en compréhension par la propriété  $P$  dans  $\mathbb{N}$ . Ainsi l'ensemble des nombres impairs se définit en compréhension par :

$$I = \{x \in \mathbb{N} / \exists y \in \mathbb{N} x = 2y + 1\}.$$

Clairement, deux propriétés équivalentes définissent le même ensemble (les propriétés  $P$  et  $Q$  sur les nombres entiers naturels sont équivalentes signifie que  $\forall x \in \mathbb{N}(P[x] \Leftrightarrow Q[x])$ ). Cela correspond à une notion d'égalité entre ensembles, appelée propriété d'*extensionnalité* :

Deux ensembles sont égaux quand ils ont les mêmes éléments, ce qui peut se dire encore,  $E$  et  $F$  étant des ensembles :

$$E = F \Leftrightarrow \forall x(x \in E \Leftrightarrow x \in F) . \qquad \text{propriété d'extensionnalité}$$

Dans cette équivalence c'est l'implication de droite à gauche qui est essentielle (celle de gauche à droite est une propriété usuelle de l'égalité).

Mais il n'est pas question de se restreindre aux entiers naturels. Nous avons vu certaines opérations, comme la réunion ou le produit cartésien, qui permettent de construire de nouveaux ensembles. Par exemple la réunion de deux ensembles  $E$  et  $F$  se définit en compréhension :

$$E \cup F = \{x / x \in E \vee x \in F\} .$$

Remarquez que le  $x$  n'est pas choisi dans un ensemble déjà existant, alors que c'était le cas pour la définition en compréhension des nombres impairs précédemment.

On rencontre des situations où il est utile que les ensembles soient eux-mêmes éléments d'autres ensembles. C'est un peu inévitable par exemple si on veut construire les nombres réels. Ainsi, pour la construction de Dedekind, on verra que le réel  $\sqrt{2}$  peut être défini comme l'ensemble des rationnels dont le carré est plus petit que 2 :

$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 2\},$$

---

1. Un développement axiomatique plus complet, mais qui reste introductif est donné dans le livre de Halmos ou dans le polycopié de Jean-Louis Krivine, cités sur la page web du cours.

et bien évidemment nous avons besoin de parler d'ensembles de nombres réels (intervalles, etc.).

On aimerait donc formaliser la théorie des ensembles suivant ces deux principes, compréhension et extensionnalité, et c'est d'ailleurs à peu près ce qu'avait tenté (dans le cadre d'un projet plus vaste) le logicien Gottlob Frege dans un ouvrage publié en 1903. Cette formalisation doit éviter deux écueils que Bertrand Russell a exprimé sous forme de paradoxes.

## 2 Deux paradoxes

### 2.1 Le paradoxe de Russell

Ce paradoxe a été publié par Russell en 1903, et communiqué à Frege juste avant la parution de son ouvrage. Le principe en était déjà connu de Georg Cantor, sur un exemple un peu plus complexe, au plus tard en 1899.

On se place dans un « univers » où peuvent coexister tous les objets mathématiques, y compris les ensembles, les ensembles d'ensembles etc. On peut imaginer énoncer un axiome de compréhension générale qui dit que pour toute propriété bien définie  $P$ , il existe un ensemble qui est celui des objets de l'univers ayant cette propriété, que l'on note  $\{x / P[x]\}$ .

Le paradoxe de Russell arrive quand on s'intéresse à la propriété « ne pas appartenir à soi-même », soit ma propriété  $P[x]$  définie par  $x \notin x$ . Cette propriété définit un ensemble selon le principe de compréhension générale :

$$R = \{x \text{ est un ensemble} / x \notin x\}.$$

Si  $R \in R$  alors  $R \notin R$  : c'est une contradiction. Donc  $R \notin R$ . Mais alors par définition de  $R$ ,  $R \in R$  et c'est encore une contradiction. Le schéma de compréhension générale est contradictoire.

Éliminons tout de suite une fausse piste pour résoudre le paradoxe. Il peut paraître curieux qu'un ensemble appartienne à lui-même. Pourquoi ne pas supposer que c'est toujours faux : un ensemble n'appartient jamais à lui-même? Mais cela signifie ajouter un axiome, ce qui ne peut en aucun cas éliminer la contradiction. Simplement l'ensemble  $R$  devient l'hypothétique ensemble de tous les ensembles, qui appartiendrait à lui-même d'où la contradiction.

L'intérêt du paradoxe de Russell est qu'il apparaît dès qu'on suppose la compréhension générale, sans supposer aucun autre axiome de théorie des ensembles. Il repose sur une propriété purement logique des relations binaires (ici l'appartenance), qui est que l'énoncé :

$$\exists R \forall x (x \in R \Leftrightarrow x \notin x)$$

est toujours faux (il suffit de reprendre la démonstration ci-dessus).

### 2.2 Le paradoxe de Berry

Nous avons souvent parlé de « propriété », sans autre précision. Or cela n'est pas si simple comme le montre cet autre paradoxe, publié par Russell en 1906, qui l'attribue à un certain Berry, bibliothécaire londonien. C'est une version un peu plus simple d'un paradoxe découvert en 1905 par un professeur de mathématiques français, Jules Richard.

Prenons pour propriété sur les entiers naturels :

$$P[n] \text{ signifie } n \text{ ne peut être décrit en moins de cent mots.}$$

Par compréhension (restreinte aux entiers naturels, ce n'est pas la compréhension générale), on peut définir l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} / P[n]\}$  des entiers qui ne peuvent pas être définis par une phrase de moins de cent mots. Cet ensemble est non vide : il est même infini car il existe un nombre fini de phrases comprenant moins de 100 mots. Le plus petit élément de cet ensemble est donc bien défini : c'est le plus petit entier que l'on ne peut pas définir en moins de cent mots. On vient de le définir en moins de cent mots : c'est une contradiction.

## 3 Les axiomes de Zermelo

### 3.1 Quelques pistes

Ernst Zermelo a publié en 1908 une axiomatisation qui évite ces deux paradoxes. Pour éviter le paradoxe de Berry, il introduit la notion de *propriété bien définie* qu'il décrit comme une propriété dont

il doit être clair, pour chaque élément du domaine sur auquel elle s'applique, qu'elle est ou non réalisée. Ce n'est pas encore une définition très mathématisée. Aujourd'hui, on définit d'abord le langage dans lequel s'expriment les propriétés<sup>2</sup>, qui est le calcul des prédicats du premier ordre, et n'est pas abordé dans ce cours. Mais il vous suffit de savoir qu'il est construit à partir de variables pour les objets de la théorie, en particulier les ensembles; de l'appartenance ( $\in$ ), de l'égalité ( $=$ ), des connecteurs logiques (et,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\Rightarrow$ ) et des quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ , et éventuellement d'opérations ensemblistes. Ce langage peut être étendu par de nouvelles définitions, parfois de simples abréviations (voir l'inclusion plus loin), mais le plus souvent quand il y a une preuve d'existence et d'unicité. C'est ainsi que l'on a introduit les opérations arithmétiques usuelles dans la première partie du cours. Mais l'usage de ces nouvelles définitions peut toujours être remplacé par des périphrases dans le langage initial. L'expression « ne pas se définir en moins de cent mots dans ce langage » a bien un sens (dans le langage initial), mais elle ne s'exprime pas dans le langage en question.

Pour éviter le paradoxe de Russell, Zermelo remplace la compréhension générale par un nombre assez restreint de cas particuliers, dont il s'avère qu'il sont suffisants pour développer les mathématiques. Une conséquence est que certaines propriétés ne définissent pas d'ensembles : on parle de *classe*, et on distingue parmi celles-ci les ensembles et les *classes propres*, celles qui ne sont pas des ensembles. Par exemple la classe des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes ne peut être considérée comme un ensemble d'après le paradoxe de Russell : c'est nécessairement une classe propre. La différence essentielle entre classe et ensemble est qu'une classe n'est pas un objet de la théorie : on ne peut pas construire des ensembles ou des classes de classes. En paraphrasant un peu Cantor, qui avait déjà l'intuition que cette distinction était nécessaire, certaines classes sont trop grosses pour que l'on puisse concevoir que ses éléments soient rassemblés en un seul objet (un ensemble).

Sans définir en détail le langage, on peut dire que la théorie des ensembles est d'abord une théorie de l'appartenance : la relation binaire notée  $\in$ . On peut écrire  $a \in E$ , où  $a$  est un objet, qui peut lui-même être un ensemble, et  $E$  un ensemble. Il est possible d'avoir des objets primitifs qui ne sont pas des ensembles, on parle d'atome. On pourrait prendre par exemple les entiers comme atomes. Par définition, rien ne peut appartenir à un atome, ou plutôt cela n'a pas de sens de dire que quelque chose appartient, ou n'appartient pas à un atome.

Mais il est possible aussi de développer une théorie des ensembles sans aucun objet primitif, dans laquelle tout est ensemble. Dans ce cadre, par exemple l'entier 3 est un certain ensemble à 3 éléments. On ne s'engage pas ici dans cette voie : dans la suite, ce qu'on appellera « objet » pourra être soit un ensemble, soit un atome (s'il en existe).

Une autre relation ensembliste utile est la relation d'inclusion, notée  $\subset$ , qui se définit à partir de l'appartenance :

$$A \subset B \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) .$$

## 3.2 L'extensionnalité

On a déjà parlé d'extensionnalité. Pour l'axiome cette implication suffit :

$$\forall E \forall F (\forall x(x \in E \Leftrightarrow x \in F) \Rightarrow E = F) \quad \text{axiome d'extensionnalité}$$

et on déduit l'équivalence par les propriétés de l'égalité.

On exprime l'axiome d'extensionnalité de façon équivalente :

$$\forall E \forall F [(E \subset F \text{ et } F \subset E) \Rightarrow E = F] .$$

## 3.3 Cas particuliers de la compréhension générale

La compréhension en toute généralité conduit à des contradictions comme le montre le paradoxe de Russell. Nous allons voir un certain nombre de cas particuliers qui seront considérés comme licites. Un peu plus formellement, pour certaines propriétés  $P[x]$  (avec paramètres le plus souvent), on peut donner un axiome pour l'existence d'un ensemble des  $x$  ayant cette propriété :

$$\exists E (x \in E \Leftrightarrow P[x]) .$$

Par extensionnalité, il n'y a alors qu'un seul ensemble  $E$  ayant cette propriété que l'on note, comme on l'a fait jusqu'à présent (on verra des variantes) :

$$\{x / P[x]\} .$$

2. C'est analogue avec ce que faisait déjà Frege dont la théorie n'est pas sujette au paradoxe de Berry.

Comme déjà dit, dès que l'on a preuve d'existence et d'unicité, on s'autorise à introduire une nouvelle notation.

Pour les cas particuliers qui suivent, on passe directement à la nouvelle notation introduite, qui est familière. L'axiome d'existence (ou la démonstration d'existence quand il n'y a pas besoin de nouvel axiome) n'est pas explicité.

### 3.3.1 Compréhension restreinte

Un premier cas particulier est l'axiome de compréhension restreinte : étant donné un ensemble  $E$  et une propriété bien définie  $P$  définit un *sous-ensemble* de  $E$ , qui est celui des éléments de  $E$  vérifiant  $P$ , noté :

$$\{x \in E / P[x]\} \quad \text{compréhension restreinte}$$

Nous avons déjà vu ci-dessus des exemples de compréhension restreinte (entiers impairs etc.). La propriété  $P$  peut tout à fait avoir des *paramètres*. On peut par exemple, l'entier  $a$  étant donné, définir l'ensemble des multiples de  $a$  par :

$$a\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} / \exists y \in \mathbb{N} x = a \cdot y\}.$$

À cause de la compréhension bornée, on voit que la classe de tous les ensembles ne peut former un ensemble, dit autrement il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, car sinon on pourrait reproduire le paradoxe de Russell en bornant la compréhension à cet ensemble de tous les ensembles.

**Ensemble vide** L'ensemble vide se définit naturellement par compréhension générale, comme l'ensemble auquel nul objet n'appartient :

$$\emptyset = \{x / \forall yy \notin x\}.$$

Dès qu'il existe un ensemble, il est possible de restreindre la compréhension à celui-ci pour définir un ensemble vide, qui est en fait indépendant de l'ensemble en question par extensionnalité : il existe un unique ensemble vide<sup>3</sup>. C'est souvent un présupposé des théories logico-mathématiques de supposer qu'elles ne concernent que des domaines non vides, et on en déduit l'existence d'un ensemble vide. Sans ce présupposé, il faut ajouter un axiome.

**Intersection** L'intersection  $E \cap F$  de deux ensembles  $E$  et  $F$  se définit naturellement par compréhension générale :

$$E \cap F = \{x / x \in E \text{ et } x \in F\}$$

mais il est très facile de se ramener à la compréhension restreinte à l'un des deux ensembles.

Plus généralement on peut définir, étant donné un ensemble d'ensembles  $\mathcal{A}$  non vide, l'intersection de tous les ensembles éléments de  $\mathcal{A}$  :

$$\cap \mathcal{A} = \{x / \forall A \in \mathcal{A} x \in A\}$$

cette compréhension n'est pas bornée, mais comme  $\mathcal{A}$  est non vide, on sait qu'il existe un ensemble  $E$ , tel que  $E \in \mathcal{A}$ , sur lequel on peut borner la compréhension. Il n'y a donc pas besoin de nouvel axiome.

Si  $\mathcal{A}$  était vide,  $\forall A \in \mathcal{A} x \in A$  serait toujours vraie : la définition de  $\cap \mathcal{A} = \{x / \forall A \in \mathcal{A} x \in A\}$  ne peut donc se prolonger à  $\mathcal{A} = \emptyset$ , on aurait un ensemble de tous les ensembles.

### 3.3.2 Réunion

La situation est différente pour la réunion. La définition par compréhension générale ne peut être bornée, tant pour la réunion de deux ensembles  $E$  et  $F$  :

$$E \cup F = \{x / x \in E \vee x \in F\}$$

que pour la réunion des ensembles éléments d'un ensemble  $\mathcal{A}$  :

$$\cup \mathcal{A} = \{x / \exists E \in \mathcal{A} x \in E\} \quad \text{réunion}$$

Il faut donc un nouvel axiome pour pouvoir introduire cette notation. À noter que pour la réunion, on n'a pas eu besoin de supposer que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  : la réunion d'un ensemble vide d'ensembles est l'ensemble vide par définition.

3. Même si on ajoute des atomes à notre théorie, ceux-ci qui n'ont pas d'éléments, ne sont pas non plus des ensembles, donc cela ne contredit pas l'unicité de l'ensemble vide.

### 3.3.3 Paire

Étant donné deux objets  $a$  et  $b$ , il est commun de définir la paire  $\{a, b\}$  :

$$\{a, b\} = \{x / x = a \vee x = b\} \quad \text{paire}$$

et la compréhension ne peut être bornée : il faut donc un nouvel axiome pour pouvoir introduire les paires. L'écriture  $\{a, b\}$  ne suppose pas que  $a \neq b$ , et donc parmi ces paires, on trouve les « vraies paires » ( $a \neq b$ ) et les singletons ( $a = b$ ) : pas besoin de distinguer deux axiomes.

Une fois qu'on a les paires, les intersections et réunion binaires deviennent vraiment des cas particuliers du cas général :

$$A \cap B = \cap\{A, B\}; \quad A \cup B = \cup\{A, B\}.$$

Évidemment on continue d'utiliser les notations usuelles  $A \cap B$  et  $A \cup B$  mais, dans le cas de la réunion, cela permet de montrer que l'axiome de la réunion le plus général est suffisant, pas besoin d'un axiome de la réunion binaire.

**Ensembles finis** Nous avons déjà vu l'ensemble vide, les singletons et les paires. On peut poursuivre pour former tous les ensembles finis d'objet en utilisant la réunion, par exemple :

$$\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}.$$

### 3.3.4 Ensemble des parties

Étant donné un ensemble  $E$ , l'existence de l'ensemble des parties de  $E$ , soit :

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\} \quad \text{ensemble des parties}$$

nécessite un nouvel axiome d'existence. À titre d'exemple, on peut montrer par extensionnalité que :

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}; \quad \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

## 3.4 Couple et produit cartésien

### 3.4.1 Propriété fondamentale

Étant donné deux objets  $a$  et  $b$  le couple  $(a, b)$  nécessite une nouvelle construction qui n'est pas ensembliste a priori. Les couples doivent vérifier :

$$\forall a, b, c, d ((a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ et } b = d) \quad \text{propriété fondamentale des couples}$$

Toute construction qui permet d'obtenir cette propriété peut être appelée « couple », et il existe de telles constructions qui sont purement ensemblistes, ce qui simplifie la théorie des ensembles obtenue. Une très usuelle est due à Kuratowski. On va se contenter de donner les propriétés dont on va avoir besoin, que l'on peut voir comme de nouveaux axiomes, même ces propriétés sont démontrables pour les couples de Kuratowski (et d'autres)..

La construction se généralise aux triplets, quadruplets et plus généralement  $n$ -uplets ( $n$  entier), par exemple :

$$(a, b, c) = (a, (b, c)).$$

On défuit alors facilement de la propriété fondamentale des couples une propriété analogue pour les triplets<sup>4</sup>

### 3.4.2 Produit cartésien (cas fini)

On précise déjà le cas binaire, étant donné deux ensembles  $A$  et  $B$ , on peut former l'ensemble des couples d'éléments de  $A$  et de  $B$

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\} \quad \text{produit cartésien}$$

et il est possible d'étendre cette définition à un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles, par exemple :

$$A \times B \times C = A \times (B \times C).$$

Comme la compréhension n'est pas bornée, l'existence du produit cartésien doit être posée comme axiome, mais elle se démontre par compréhension bornée pour les couples de Kuratowski.

4. Il y a deux choix possibles,  $(a, b, c) = ((a, b), c)$  fonctionne aussi, et aucune raison de préférer l'un à l'autre.

### 3.4.3 Projections

Étant donné un ensemble  $G$  (de couples a priori mais il suffit de s'intéresser aux couples appartenant à un ensemble quelconque), on peut former les deux ensembles projections :

$$G_1 = \{x / \exists y (x, y) \in G\} ; G_2 = \{y / \exists x (x, y) \in G\}.$$

Là aussi l'existence se démontre pour les couples de Kuratowski.

### 3.4.4 Relation

En toute généralité une relation  $R$  est définie par un ensemble de couples  $G$ . Une relation  $R$  entre deux ensembles  $A$  et  $B$  est définie par un ensemble  $G$  tel que  $G \subset A \times B$ , et on note  $x R y$  pour  $(x, y) \in G$ . L'ensemble  $G$  est appelé *graphe* de la relation  $R$ . Une relation  $R$  est une relation entre les projections  $G_1$  et  $G_2$  définies au paragraphe précédent.

On a parlé de relation d'appartenance ou d'inclusion, mais ce ne sont pas des relations au sens énoncé ici, car elles sont définies sur l'univers entier. Par projection on aurait un ensemble de tous les ensembles. Pratiquement l'ambiguïté ne posera pas de problème pour ce cours.

Étant donné un ensemble  $E$ , l'inclusion définit bien une relation (au sens donné ici) sur  $\mathcal{P}(E)$ , qui est une relation d'ordre.

### 3.4.5 Fonction ou application

Une fonction (ou application)  $f$  de  $E$  dans  $F$  peut être vue comme une relation particulière : elle est définie par son graphe  $G_f$  qui est un ensemble de couples vérifiant :

- $G_f \subset E \times F$ ;
- $\forall x \in E \exists y \in F (x, y) \in G_f$  (tout élément de  $E$  possède une image par  $f$ ) ;
- $\forall x \in E \forall y, y' \in F ((x, y) \in G_f \wedge (x, y') \in G_f \Rightarrow y = y')$  (unicité de l'image).

L'existence et l'unicité de l'image autorise la notation usuelle  $f(x)$  pour  $x \in E$ . Quand  $f : E \rightarrow F$ , et  $A \subset E$ , on utilise aussi la notation  $f(A)$  pour l'ensemble des images des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A y = f(x)\} (= \{f(x) / x \in A\})$$

notation qui peut s'avérer ambiguë en théorie des ensembles, où les ensembles sont aussi des objets de la théorie. En général le contexte permet de trancher.

De même la notation pour l'image réciproque d'un sous-ensemble  $B$  de  $F$  (toujours définie), n'est pas à confondre avec celle pour la réciproque de  $f$  quand  $f$  est bijective :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / \exists y \in B y = f(x)\}.$$

L'ensemble des fonctions de  $E$  dans  $F$  est noté généralement  $F^E$ , mais on trouve aussi la notation  $E \rightarrow F$  qui est plus intuitive dans certains contextes. On note  $f : E \rightarrow F$  pour  $f \in F^E$ .

En supposant que l'on dans l'univers un ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers vérifiant les axiomes de Peano, une autre façon de généraliser les couples aux  $n$ -uplets est de voir ceux-ci comme des fonctions définies sur les entiers de 1 à  $n$  : l'ensemble des  $n$ -uplets d'éléments de  $E$  s'identifie à  $E^{\{1, \dots, n\}}$ . L'équivalent de la propriété fondamentale est facile à vérifier.

Pour  $f$  est une fonction de  $E$  dans  $F$ , on a une notation commode, qui est un raccourci pour une définition par compréhension bornée :

$$\{f(x) / x \in A \text{ et } P[x]\} = \{y \in B / \exists x \in A (y = f(x) \text{ et } P[x])\}$$

Par exemple :

$$2\mathbb{N} = \{2x / x \in \mathbb{N}\}.$$

### 3.4.6 Famille

Sur le plan de la définition formelle, la notion de famille d'objets est essentiellement une variante de la notion de fonction, avec des notations et un usage différent. Une famille est définie par un ensemble de couples  $G$  vérifiant la propriété d'unicité :

$$\forall x \forall y, y' \in F \left( (x, y) \in G \text{ et } (x, y') \in G \Rightarrow y = y' \right).$$

Une famille indexée sur un ensemble  $I$  est définie par un ensemble de couples  $G$  vérifiant de plus :

$$\forall i \in I \exists x (i, x) \in G ; \forall i \in I \forall x ((i, x) \in G \Rightarrow i \in I) .$$

L'existence et l'unicité autorise la notation  $x_i$  pour l'image de  $i$  ( $(i, x_i) \in G$ ). La famille est noté  $(x_i)_{i \in I}$ . On parle de famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  quand de plus  $G \subset I \times E$ .

Les opérations de réunion et d'intersection sur les familles sont définies sur toutes les images de la famille. L'axiome de la réunion est en général nécessaire pour définir la réunion d'une famille. Si la famille indexée sur  $I$  est définie par  $G$  :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A / \forall i \in I (i, A) \in G\} (I \neq \emptyset) ; \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A / \exists i \in I (i, A) \in G\} .$$

Le produit cartésien d'une famille  $(A_i)_{i \in I}$  de sous-ensembles de  $E$  indexée par  $I$  est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $E$  :

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow E / f(i) \in A_i\} .$$

Le rôle de l'ensemble  $E$  est mineur, s'il n'est pas précisé, on peut toujours prendre  $E = \cup_{i \in I} A_i$ .

### 3.5 Autres axiomes

En résumé, dans les mathématiques ordinaires, on a besoin de l'axiome d'extensionnalité, et d'axiomes pour les cas particuliers de la compréhension générale suivant : compréhension restreinte, paire, réunion, ensemble des parties. On n'a pas vraiment montré que c'était suffisant (par exemple pour les couples, les produits cartésiens), mais c'est possible.

Mais Zermelo avait introduit deux autres axiomes dont le premier est indispensable pour développer une théorie des ensembles suffisante pour les mathématiques.

#### 3.5.1 Axiome de l'infini

Aucun des axiomes précédents ne permet de montrer l'existence d'un ensemble infini. On a besoin plus précisément d'un ensemble des entiers naturels, soit un ensemble vérifiant les axiomes de Peano vu en première partie du cours. L'axiome correspondant est appelé axiome de l'infini, on peut le donner sous une forme qui permet la construction évoquée dans le polycopié du début du cours. On se contentera pour ce cours de voir les entiers comme des objets primitifs et d'ajouter aux axiomes les axiomes de Peano.

#### 3.5.2 Axiome du choix

Cet axiome énonce une propriété qui semblerait évidente à première vue : un produit cartésien d'une famille non vide d'ensembles tous non vides est non vide. Un élément de  $\prod_{i \in I} A_i$  est une fonction qui à  $i \in I$  associe un élément de  $A_i$ . Cette fonction effectue un « choix simultané » d'un élément dans chaque  $A_i$ , et c'est pour une infinité d'ensembles qu'il y a vraiment besoin d'un nouvel axiome, qui n'est pas si évident a posteriori.

L'axiome du choix est bien utile en mathématiques, mais a aussi des conséquences contre-intuitives, comme le fait qu'il existe un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  (voir le polycopié de Krivine pour une démonstration).