

TD2 : Recherche en espace constant et recombinaisons

1 Recombinaison de mots

Question 1 : Donner un algorithme qui teste en temps $O(n)$ si deux mots de longueurs n sont des rotations circulaires l'un de l'autre. Par exemple, $ab\text{cad}$ et cadab sont des rotations circulaires l'un de l'autre.

On considère des mots u, v, w, \dots sur un alphabet fini $\Sigma = \{a, b, \dots\}$ et on notera \tilde{u} le mot obtenu en retournant u . P.ex. $\widetilde{abcc} = ccba$.

On dit qu'un mot u se recombine en v , noté $u \sim v$, si u peut se décomposer en $u = u_1u_2u_3$ de sorte que $v = u_1\tilde{u}_2u_3$, c.-à-d. que v est obtenu en retournant un facteur quelque part dans u . Ce genre de transformation apparaît en biologie, quand des gènes sont copiés.

Question 2 : Montrez que $au \sim av$ ssi $u \sim v$ pour $a \in \Sigma$. Qu'en déduisez-vous de la relation entre $ua \sim va$ et $u \sim v$?

Question 3 : En déduire un algorithme efficace qui teste, étant donnés deux mots u et v , si $u \sim v$. Vous établirez sa complexité en fonction de la taille n des mots.

Soit $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ deux relations. La relation $\mathcal{R}\mathcal{R}'$ est définie par $u\mathcal{R}\mathcal{R}'v$ ssi $\exists w u\mathcal{R}w \wedge w\mathcal{R}'v$. On note $u \circ v$ quand on peut passer de u à v par une rotation des lettres (i.e. u se décompose en xy et v en yx où x et y sont eux-mêmes des mots).

Question 4 : Montrer que $u \sim \tilde{v} \Rightarrow u \circ \sim \circ v$.

Question 5 : Montrer que $u \sim \circ v \Rightarrow u \circ \sim v$ ou $u \circ \sim \tilde{v}$.

On étend la notion de recombinaison par la définition suivante : $u \approx v$ ssi il existe deux mots u' et v' tels que $u \circ u' \sim v' \circ v$ (autrement dit, $u \approx v$ ssi $u \circ \sim \circ v$).

Question 6 : Proposer un algorithme efficace qui teste, étant donnés deux mots u et v , si $u \approx v$. Vous établirez sa complexité en fonction de la taille n des mots. *Indication :* Commencer par montrer que $u \approx v$ ssi $u \circ \sim v$ ou $u \circ \sim \tilde{v}$.

2 Recherche en espace constant

2.1 Recherche d'un motif auto-maximal

On fixe un ordre total sur l'alphabet, et on note $\text{MaxSuf}(w)$ le suffixe maximal de w au sens de l'ordre lexicographique. Le mot w est dit *auto-maximal* si $\text{MaxSuf}(w) = w$.

Définition 1 (Période) On dit que $p \in \{1, \dots, |u|\}$ est une période d'un mot $u \in \Sigma^*$ si pour tout $\forall i \in \{1, \dots, |u| - p\}, u[i] = u[i + p]$. On note $\text{Period}(u)$ la plus petite période de u .

Lors du TD précédent, nous avons vu que $\text{Period}(w) = |w| - \pi_w(|w|)$.

Question 1 : Montrer qu'il existe des mots qui ne sont pas auto-maximaux, peu importe l'ordre choisi sur l'alphabet.

Question 2 : Montrer que si un mot est auto-maximal, alors tous ses préfixes le sont.

On considère l'algorithme suivant :

```
période_naïve( $w, j$ ) :=  
   $pe := 1$ ;  
  pour  $i$  de 2 à  $j$  faire  
    si  $w[i] \neq w[i - pe]$  alors  $pe := i$ ;  
  retourner  $pe$ ;
```

Question 3 : Montrer que, lorsque w est auto-maximal, $\text{période_naïve}(w, j)$ calcule bien $\text{Period}(w[1, j])$. Pour cela, on montrera que, pour $p = \text{Period}(w[1, i - 1])$, si $w[i] \neq w[i - p]$ alors $w[i] < w[i - p]$. On montrera qu'on obtient alors une contradiction si on suppose en plus que $\text{Period}(w[1, i]) < i$.

Question 4 : On suppose que le motif w à rechercher est auto-maximal. Adapter l'algorithme de Morris-Pratt pour le faire fonctionner en espace mémoire "constant", plus exactement, le nombre de variables codant des entiers doit rester constant (ce qui correspond en réalité à un espace logarithmique). Montrer que la complexité en temps reste linéaire.

2.2 Recherche de texte en espace constant

On suppose connue la décomposition $w = u \cdot v$ avec $v = \text{MaxSuf}(w)$, et on cherche les occurrences de w à l'intérieur d'un texte quelconque T .

Question 1 : Si v apparaît avec un décalage de i dans T , montrer que u ne peut apparaître avec un décalage de j dans T , pour tout $j \in \{i - |u| + 1, i - |u| + 2, \dots, i\}$.

Question 2 : En déduire un algorithme de recherche de w dans T en temps linéaire et espace constant.