Méthodes Formelles Approche Probabiliste

Arnaud Sangnier

IRIF - Université de Paris

Cours 8

Propriétés qualitatives

- On compare la probabilité d'un événement avec > 0 ou $= 1$
- Par exemple :
  - A-t-on $\mathbb{P}_M(s \models FGB) > 0$?
  - A-t-on $\mathbb{P}_M(s \models FB) = 1$?
- On va voir que pour les chaînes de Markov avec un nombre **fini** d'états, les propriétés qualitatives dépendent seulement du 'graphe' de la chaîne de Markov et pas des probabilités
- **Attention :** Cela n'est plus vrai pour les chaînes de Markov avec un nombre infini d'états !

Notions de graphes sur les chaînes de Markov

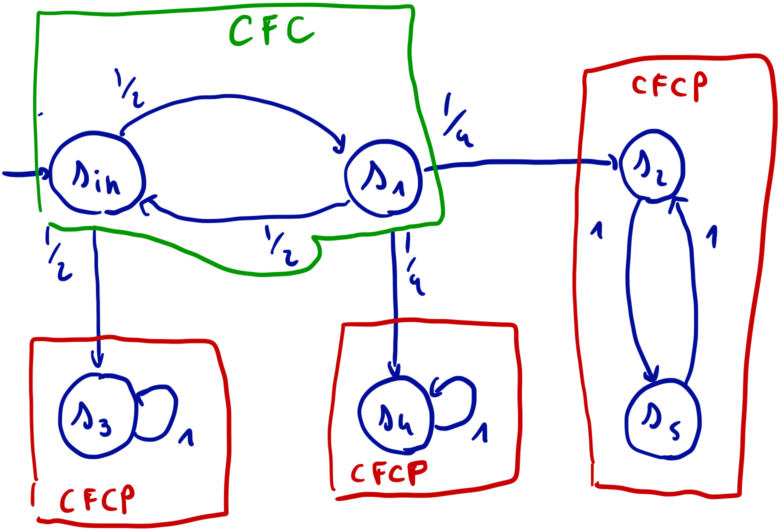
Soit $M = (S, P, s_{in}, PA, L)$ une chaîne de Markov (avec S fini).

- Un ensemble $T \subseteq S$ est **fortement connexe** ssi pour toute paire d'états $(s, t) \in T \times T$ il existe un chemin fini $s_0 \ldots s_n$ telle que $s_i \in T$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et $s_0 = s$ et $s_n = t$.
  T est appelée une **composante fortement connexe** (CFC)
- Une **CFC puits** (CFCP) est une CFC T dont on ne peut pas sortir. C'est-à-dire, pour tout $s \in T$, on a $\sum_{t \in T} P(s, t) = 1$.
- Un état $s \in S$ est dit **absorbant** si $P(s, s) = 1$. Un état absorbant est une CFCP.

Notations :

- $CFC(M) = \{T \subseteq S \mid T \text{ est une CFC}\}$
- $CFCP(M) = \{T \subseteq S \mid T \text{ est une CFCP}\}$

Exemple



Un petit résultat

Lemme

Si $T, T' \in CFCP(M)$ et $T \neq T'$ alors $T \cap T' = \emptyset$

Preuve :

- Soient $T, T' \in CFCP(M)$ telles que $T \neq T'$ et $T \cap T' \neq \emptyset$.
- Soit $s \in T \cap T'$ et $s' \in T \setminus T'$ (si il n'y a pas de telle s' on inverse T et T')
- Comme $s' \in T$, il existe un chemin de s vers s', mais du coup ce chemin part de T' et sort de T'
- Contradiction avec $T' \in CFCP(M)$

Observer les états qui se répètent

Soit $M = (S, P, s_{in}, PA, L)$ une chaîne de Markov (avec S fini).

- Si $\pi = s_0 s_1 \ldots$ est une exécution de M (un chemin infini partant de s_{in} alors on note :

$$inf(\pi) = \{s \in S \mid |\{i \in \mathbb{N} \mid s_i = s\}| \text{ est infini}\}$$

  $inf(\pi)$ sont les états qui apparaissent infiniment souvent dans π
- Pour $T \subseteq S$, l'ensemble $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\}$ est mesurable
- En effet, $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\} = \bigcap_{t \in T} \mathtt{GF}\{t\} \cap \mathtt{FG}\, T$
- De même $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) \in CFCP(M)\}$ est mesurable
- En effet, $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) \in CFCP(M)\} = \bigcup_{T \in CFCP(M)} \{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\}$

Propriété fondamentale

- Elle nous dit que si M a un ensemble fini d'états l'ensemble des exécutions π telles que $inf(\pi) \in CFCP(M)$ est de mesure 1
- En d'autres termes, presque toutes les exécutions finissent dans une CFCP de M (et celles qui ne finissent pas dedans ont une probabilité 0)

Théorème

Si M est une chaîne de Markov avec un nombre fini d'états, alors :

$$\mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) \in CFCP(M)) = 1$$

Preuve - I

- Comme M est fini, on a $Exec(M) = \bigcup_{T \in CFC(M)} \{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\}$ (dans un graphe fini tout chemin infini finit dans une CFC).
- De plus, si $T \neq T'$ alors $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\} \cap \{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T'\} = \emptyset$
- Donc $\mathbb{P}_M(Exec(M)) = 1 = \sum_{T \in CFC(M)} \mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T)$
- Le problème est que nous intéressons au CFCP et non au CFC, il faut donc montrer que si $T \in CFC(M) \setminus CFCP(M)$ alors $\mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T) = 0$.

Preuve - II

- Soit $T \in CFC(M) \setminus CFCP(M)$. Il existe donc $t \in T$ et $\bar{t} \notin T$ tels que $k = P(t, \bar{t}) > 0$
- On note alors T_n^t l'ensemble des exécutions qui visitent t au moins n fois qui ne vont jamais dans $S \setminus T$.
- On a alors $\mathbb{P}_M(T_1^t) \leq (1 - k)$ et $\mathbb{P}_M(T_n^t) \leq (1 - k)^n$
- On note $T_\infty^t = \bigcap_{n \geq 1} T_n^t$. Il s'agit des exécutions où t est vue infiniment souvent mais $S \setminus T$ n'est pas vu.
- On a $\mathbb{P}_M(T_\infty^t) \leq lim_{n \to +\infty}(1 - k)^n = 0$.
- Mais du coup on a que $\{\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T\} \subseteq T_\infty^t$.
- Par conséquence $\mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T) \leq \mathbb{P}_M(T_\infty^t) = 0$
- On a de plus :

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_M(Exec(M)) = 1 = \\ \sum_{T \in CFCP(M)} \mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T) + \\ \sum_{T \in CFC(M) \setminus CFCP(M)} \mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = T) \end{array}$$

- D'où $\mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) \in CFCP(M)) = 1$

Accessibilité presque sûre

- Soit $M = (S, P, s_{in}, PA, L)$ une chaîne de Markov (avec S fini).
- Pour $s \in S$, on dénote par $post^*(s)$ l'ensemble $\{t \in S \mid$ il existe un chemin fini de s vers $t\}$
- $post^*(s)$ sont les états que l'on peut atteindre depuis s (y compris s)
- et $pre^*(t) = \{s \in S \mid t \in post^*(s)\}$
- $pre^*(t)$ sont les états depuis lesquels on peut atteindre s
- Pour un ensemble $T \subseteq S$, on $post^* T = \bigcup_{t \in T} post^*(t)$ et $pre^* T = \bigcup_{t \in T} pre^*(t)$

Théorème

Pour $s \in S$ et $B \subseteq S$ un ensemble d'états absorbants (pour tout $b \in B$, on a $P(b, b) = 1$), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} B) = 1$
2. $post^*(t) \cap B \neq \emptyset$ pour tout $t \in post^*(s_{in})$
3. $s_{in} \in S \setminus pre^*(S \setminus pre^*(B))$

Preuve - I

- $1 \Rightarrow 2$. Par contradiction.
  - Soit $t \in post^*(s_{in})$ tel que $post^*(t) \cap B = \emptyset$. Donc B n'est accessible depuis t.
  - Alors $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}B) \leq 1 - \mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}t)$
  - Comme $t \in post^*(s_{in})$, on a $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}t) > 0$, d'où $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}B) < 1$
- $2 \Leftrightarrow 3$. Les points suivants sont équivalents:
  - $post^*(t) \cap B \neq \emptyset$ pour tout $t \in post^*(s_{in})$
  - $post^*(s_{in}) \subseteq pre^*(B)$
  - $post^*(s_{in}) \cap S \setminus pre^*(B) = \emptyset$
  - $s_{in} \notin pre^*(S \setminus pre^*(B))$
  - $s_{in} \in S \setminus pre^*(S \setminus pre^*(B))$

Preuve - II

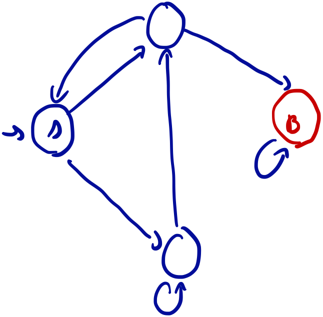
- $2 \Rightarrow 1$.
  - Supposons que $post^*(t) \cap B \neq \emptyset$ pour tout $t \in post^*(s_{in})$.
  - Comme les états de B sont absorbants, on a :

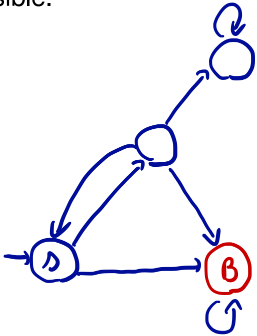
$$CFCP(M) = \bigcup_{t \in B} \{\{t\}\} \cup \bigcup_{T \in CFCP(M), T \cap B = \emptyset} \{T\}$$

  - Montrons que $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} B) = 1$
  - Soit $T \in CFCP(M)$ tel que $T \cap B = \emptyset$
  - Si $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} T) > 0$, alors il existe une exécution qui fini dans T (car $T \in CFCP(M)$). Prenons un état s dans T de cette exécution. Alors $post^*(s) \cap B = \emptyset$ et $s \in post^*(s_{in})$ **Contradiction**.
  - Donc $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} T) = 0$
  - D'où $1 = \mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) \in CFCP(M)) = \sum_{t \in B} \mathbb{P}_M(\pi \in Exec(M) \mid inf(\pi) = \{t\}) = \sum_{t \in B} \mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} t) = \mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F} B)$

En français + Exemple

- *s* peut atteindre presque sûrement un ensemble d'états absorbants *B* ssi depuis *s* on ne peut pas atteindre d'états *t* depuis lesquels *B* n'est pas accessible.





$\mathbb{P}(s \models F B) = 1$

$\mathbb{P}(s \models F B) < 1$

En pratique

Comment calculer l'ensemble d'états $s \in S$ tels que $\mathbb{P}_M(s \models \mathtt{F} B) = 1$ pour un $B \subseteq S$

1. Transforme tous les états de B en état absorbant. On obtient une nouvelle chaîne de Markov M_B.
2. Calculer l'ensemble $S \setminus pre^*(S \setminus pre^*(B))$
3. L'ensemble obtenu est celui recherché

Accessibilité répétée presque sûre

- Soit $M = (S, P, s_{in}, PA, L)$ une chaîne de Markov (avec S fini).

Théorème

Pour $s \in S$ et $B \subseteq S$ un ensemble d'états , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF} B) = 1$
2. $T \cap B \neq \emptyset$ pour chaque CFCP T telle que $T \subseteq post^*(s_{in})$ (ie accessible depuis s_{in})

Preuve - I

- $1 \Rightarrow 2$. Par contradiction,
  - Supposons qu'il existe $T \in CFCP(M)$ telle que $T \cap B = \emptyset$ et $T \subseteq post^*(s_{in})$
  - Alors il existe une exécution de s_{in} vers T (qui reste toujours dans T ensuite car $T \in CFCP(M)$). Prenons s un état de T sur cette exécution.
  - On a $\mathbb{P}_M(s \models \mathtt{GF}B) = 0$ (car $T \cap B = \emptyset$)
  - Et $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}B) \leq 1 - \mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}s)$.
  - mais comme s est accessible depuis s_{in}, alors $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}s) > 0$. d'où $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}B) < 1$

Preuve - II

- $2 \Rightarrow 1$.
  - On a $1 = \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) \in \mathit{CFCP}(M))$
  - et $\mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) \in \mathit{CFCP}(M)) = \sum_{T \in \mathit{CFCP}(M), T \subseteq \mathit{post}^*(s_{in})} \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) = T)$
  - Mais on a aussi $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}\,B) = \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) \subseteq B) = \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \exists T \in \mathit{CFCP}(M).\mathit{inf}(\pi) = T \text{ et } T \cap B \neq \emptyset)$
  - Cette dernière égalité est du au fait que les chemins ne finissant pas dans une CFCP ont une probabilité nulle
  - Mais du coup

$$\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}\,B) = \sum_{\substack{T \in \mathit{CFCP}(M) \\ T \subseteq \mathit{post}^*(s_{in}), T \cap B \neq \emptyset}} \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) = T)$$

  - Mais comme $T \subseteq \mathit{post}^*(s_{in})$ implique $T \cap B \neq \emptyset$ (par 2) alors, on a :

$$\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}\,B) = \sum_{\substack{T \in \mathit{CFCP}(M) \\ T \subseteq \mathit{post}^*(s_{in}}} \mathbb{P}_M(\pi \in \mathit{Exec}(M) \mid \mathit{inf}(\pi) = T) = 1$$

En pratique

Comment calculer l'ensemble d'états $s \in S$ tels que $\mathbb{P}_M(s \models \mathtt{GF}B) = 1$ pour un $B \subseteq S$

1. On calcule les CFCP de M
2. On a $\mathbb{P}_M(s \models \mathtt{GF}B) = 1$ ssi il n'y a pas de CFCP T de M atteignable depuis s et telle que $T \cap B = \emptyset$

Une autre application

- Nous avons vu que tous les chemins finissent presque sûrement dans une CFCP, cela nous permet de calculer la probabilité pour l'accessibilité répétée en utilisant le calcul pour l'accessibilité
- Il faut aussi remarquer que quand on rentre dans une CFCP, alors **tous les états** de la CFCP seront visités presque sûrement (avec probabilité 1)

Théorème

Soit $M = (S, P, s_{in}, PA, L)$ une chaîne de Markov (avec S fini), $B \subseteq S$ et $U = \bigcup_{T \in CFCP(M), T \cap B \neq \emptyset} T$ alors

$$\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}B) = \mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}U)$$

- Donc pour calculer $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{GF}B)$, on peut se servir de la méthode avec système linéaire permettant de calculer $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \mathtt{F}U)$ vue au cours précédent

Un dernier point

- De même on a $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \texttt{FG}B) = 1$ ssi $T \subseteq B$ pour chaque CFCP T telle que $T \subseteq post^*(s_{in})$
- et $\mathbb{P}_M(s_{in} \models \texttt{FG}B) = \mathbb{P}_M(s \models \texttt{F}\,V)$ avec $V = \bigcup_{T \in CFCP(M), T \subseteq B} T$