Examen – Modélisation et spécification
Master MIC

29 Mars 2019

Durée : 3h.
Documents autorisés : Deux feuilles A4 recto-verso

Rédaction : Il faut rendre deux copies : Les exercices 1,2,3 et 4 sont à rendre ensemble sur une même copie, et les exercices 5 et 6 sont à rendre sur une autre copie.

Exercice 1 : *Analyse qualitative de chaînes Markov* [**3 points**]

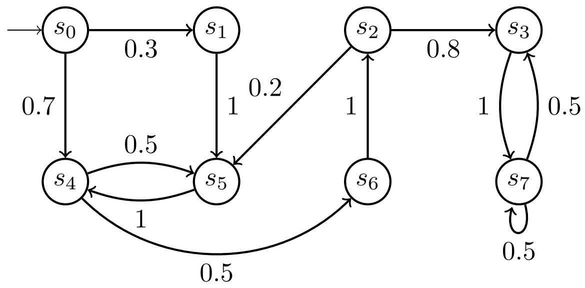


Figure 1 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$ représentée à la Figure 1 et les ensembles d'états $B_1 = \{s_4\}$ et $B_2 = \{s_7\}$. Déterminez quelles sont les propositions ci-dessous qui sont vraies en justifant votre réponse.

1. $Pr(s_0 \models \mathbf{F}B_1) = 1$
2. $Pr(s_0 \models \mathbf{GF}B_1) = 1$
3. $Pr(s_0 \models \mathbf{GF}B_2) = 1$

Exercice 2 : *Analyse de processus de décision Markovien* [**2 points**]

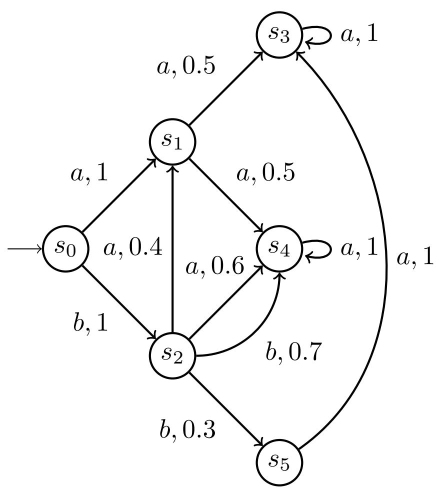


Figure 2 – Processus de décision markovien $\mathcal{M}_2$

On considère le processus de décision Markovien $\mathcal{M}_2$ représenté à la Figure 2. Calculez $Pr_{sup}^{\mathcal{M}_2}(s_0 \models \mathbf{F}\{s_4\})$.

Exercice 3 : *Analyse quantitative de chaînes de Markov* [**2 points**]

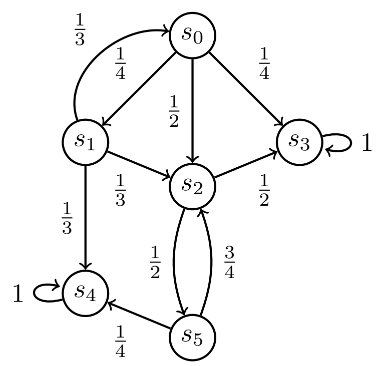


FIGURE 3 – Processus de décision markovien $\mathcal{M}_3$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_3$ représentée à la Figure 3. Calculez pour chacun des états la probabilité d'atteindre l'état s_3.

Exercice 4 : *Modélisation* [**3 points**]

Le professeur Tournesol possède deux parapluies qu'il utilise pour aller de chez lui à son laboratoire ainsi que pour le trajet retour. Comme il habite en Belgique, on sait qu'à chaque fois qu'il se déplace, il y a deux chances sur trois qu'il pleuve. Le professeur fait des aller-retours entre son domicile et son laboratoire. Si il pleut au moment où il part et qu'il y a un parapluie à son point de départ, il le prend (et l'amène à son arrivée), sinon il se déplace sans parapluie. Si il ne pleut pas quand il part et si il y a deux parapluies là où il se trouve, il y a trois chances sur quatre qu'il prenne un des deux parapluies avec lui (et le laisse à destination) (et donc une chance sur quatre qu'il ne prenne pas de parapluie). Dans l'état initial, le professeur est chez lui tout comme les deux parapluies.

1. Proposez une modélisation du système précédent.
2. Déterminez la probabilité qu'un jour les deux parapluies soient au laboratoire du professeur ?

Exercice 5 : *Logiques temporelles CTL et LTL* [**4 points**]

Dans cet exercice, on considère les quatre systèmes de transitions étiquetés de la figure 4 : l'état initial de $\mathcal{S}_1$ est q_0, celui de $\mathcal{S}_2$ est r_0, celui de $\mathcal{S}_3$ est s_0 et celui de $\mathcal{S}_3$ est t_0.

Etant donnés un STE $\mathcal{S}$ et son état initial s_0, on dit qu'une formule ϕ de CTL est vraie pour $\mathcal{S}$ (noté $\mathcal{S} \models \phi$) si et seulement si on a $s_0 \models \phi$. Et pour une formule ϕ de LTL, on dit que ϕ est vraie pour $\mathcal{S}$ (noté $\mathcal{S} \models \phi$) si et seulement si on a $\rho \models \phi$ pour toute exécution ρ qui part de s_0. On rappelle aussi qu'une logique L distingue deux modèles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ si et seulement si il existe une formule ϕ de L telle que $\mathcal{S} \models \phi$ et $\mathcal{S}' \not\models \phi$.

1. Pouvez-vous distinguer $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ avec CTL ? Et avec LTL ?
2. Pouvez-vous distinguer $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$ avec CTL ? Et avec LTL ?
3. Pouvez-vous distinguer $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ avec CTL ? Et avec LTL ?

Justifier vos réponses.

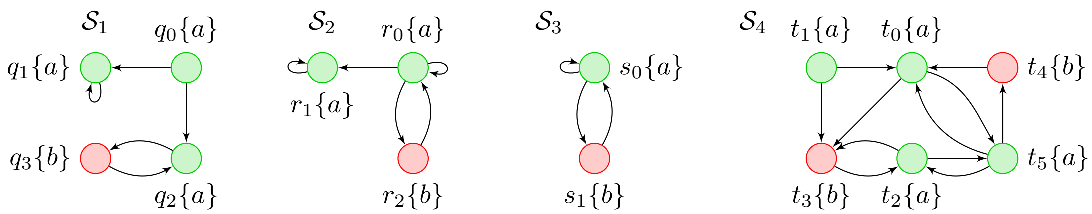
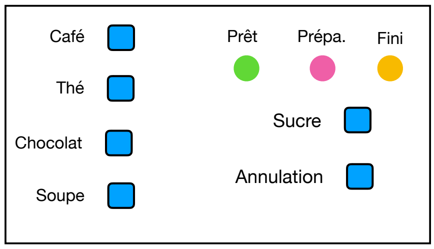


FIGURE 4 – STE pour l'exercice 5.

Exercice 6 : *Spécification en logique temporelle* [**6 points**]

On s'intéresse ici à la spécification en LTL d'un distributeur de boisson. Le tableau de bord de la machine (voir le dessin ci-contre) comporte :



— Quatre boutons Café, Thé, Chocolat, et Soupe pour choisir une boisson. Les propositions atomiques[1] associées sont : $\mathsf{B}_{\text{café}}, \mathsf{B}_{\text{thé}}, \mathsf{B}_{\text{choco}}, \mathsf{B}_{\text{soupe}}$.

— Un bouton Annulation. Sa propositions atomique est : B_{an}.

— Un bouton Sucre. Sa propositions atomique est : $\mathsf{B}_{\text{sucre}}$.

— Trois voyants Prêt, Prépa et Fini. Leurs propositions sont : $\mathsf{V}_{\text{prêt}}$, $\mathsf{V}_{\text{prépa}}$ et V_{fini}.

La machine peut se trouver dans quatre modes différents : (1) disponible (proposition $\mathsf{M}_{\text{dispo}}$), (2) choix d'une boisson (proposition $\mathsf{M}_{\text{choix}}$), (3) en cours de préparation d'une boisson (proposition $\mathsf{M}_{\text{prépa}}$), et (4) en fin de transaction (c'est-à-dire en attente de la prise du gobelet par l'utilisateur) (proposition M_{fin}).

Le comportement attendu de la machine est le suivant : lorsqu'un usager souhaite une boisson, il commence par mettre une pièce de 50¢ (la proposition $\mathsf{P}_{50¢}$ est alors vraie), puis il choisit sa boisson en appuyant sur le bouton correspondant, puis la machine prépare la boisson et ensuite attend que le gobelet soit retiré pour revenir dans le mode de départ. Entre le moment où la pièce est insérée et le choix de la boisson, l'utilisateur a la possibilité d'utiliser le bouton sucre ($\mathsf{B}_{\text{sucre}}$) pour ajouter du sucre. Appuyer sur le bouton Annulation après l'insertion d'une pièce et avant le choix de la boisson permet de revenir en mode disponible et rend la pièce.

Écrire les formules suivantes :

1. Une formule exprimant que la machine est toujours dans un seul des quatre modes.
2. Une formule qui spécifie que : (1) dans le mode « disponible » et le mode « choix », seul le voyant $\mathsf{V}_{\text{prêt}}$ est allumé, (2) dans le mode « préparation », seul le voyant $\mathsf{V}_{\text{prépa}}$ est allumé et (3) dans le mode « fin », seul le voyant V_{fini} est allumé.
3. Lorsque la machine est dans le mode « disponible » et qu'une pièce est insérée, elle passe dans le mode « choix ».
4. Lorsque la machine est dans le mode « choix » et qu'un bouton de boisson est enfoncé, elle passe dans le mode « prépa », mais si c'est le bouton Annulation qui est utilisé, elle repasse en mode « disponible »et la pièce est rendue (proposition $\mathsf{R}_{50¢}$).
5. Lorsque la machine est dans le mode « fini » et que le gobelet est retiré (proposition G_{out}), elle passe en mode « disponible ».
6. Une formule qui spécifie le cycle des modes : le mode « disponible » est toujours suivi (après éventuellement plusieurs étapes...) par le mode « choix », le mode « choix » est toujours suivi par le mode « préparation » ou le mode « disponible », le mode « préparation » est toujours suivi par le mode « fini » et le mode « fini » est toujours suivi par le mode « disponible ». De plus, on spécifiera que le mode « disponible » est rencontré infiniment souvent.
7. Lorsque la machine est en mode « choix », une pression sur le bouton Sucre (proposition $\mathsf{B}_{\text{sucre}}$) rend vraie (dans l'état suivant) la proposition $\mathsf{P}_{\text{sucré}}$. Une seconde pression rend vraie la proposition $\mathsf{P}_{\text{très sucré}}$ et fausse $\mathsf{P}_{\text{sucré}}$, et une troisième pression revient dans la situation initiale où les deux propositions $\mathsf{P}_{\text{sucré}}$ et $\mathsf{P}_{\text{très sucré}}$ sont fausses. Cela permet à l'utilisateur de doser le sucre de trois manières (pas sucré, sucré, très sucré). Ecrire les formules correspondant à ce comportement.

1. Comme d'habitude, on associe aux boutons des propositions atomiques : la proposition d'un bouton (resp. voyant) est vraie ssi le bouton est enfoncé (resp. le voyant est allumé).

Annexe

Rappel : Syntaxe et sémantique de LTL. La syntaxe des formules de LTL est définie par la grammaire suivante : $\phi ::= P \mid \phi \vee \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \neg\phi \mid \mathbf{X}\phi \mid \phi\,\mathbf{U}\,\psi \mid \mathbf{X}^{-1}\phi \mid \phi\,\mathbf{S}\,\psi$ où P appartient à un ensemble de propositions atomiques AP. On utilise aussi les abréviations $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}^{-1}$ et $\mathbf{G}^{-1}$. Ces formules s'interprètent à une position $i \geq 0$ le long d'une exécution ρ d'un STE : $\rho(i)$ est le i-ème état et $\ell(\rho(i))$ est l'ensemble des propositions vraies en $\rho(i)$. La sémantique est définie par :

- $\rho, i \models P$ ssi $P \in \ell(\rho(i))$
- $\rho, i \models \mathbf{X}\phi$ ssi $\rho, i+1 \models \phi$
- $\rho, i \models \phi\,\mathbf{U}\,\psi$ ssi $\exists j \geq i$ t.q. $(\rho, j \models \psi) \wedge (\forall k \in [i, j[$, on a : $\rho, k \models \phi$)
- $\rho, i \models \mathbf{X}^{-1}\phi$ ssi $i > 0$ et $\rho, i-1 \models \phi$
- $\rho, i \models \phi\,\mathbf{S}\,\psi$ ssi $\exists j \leq i$ t.q.$(\rho, j \models \psi) \wedge (\forall k \in]j, i]$, on a : $\rho, k \models \phi$)

Sémantique de CTL. La syntaxe des formules de CTL est définie par la grammaire suivante : $\phi ::= P \mid \phi \vee \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \neg\phi \mid \mathbf{EX}\phi \mid \mathbf{AX}\phi \mid \mathbf{E}\phi\,\mathbf{U}\,\psi \mid \mathbf{A}\phi\,\mathbf{U}\,\psi$. Les formules de CTL s'interprètent sur des états de systèmes de transitions étiquetés. Soit $\mathcal{S} = (Q, \mathsf{AP}, \rightarrow, L)$ et soit $q \in Q$, on a :

- $q \models P$ ssi $P \in L(q)$
- $q \models \mathbf{EX}\phi$ ssi $\exists q \rightarrow q'$ tel que $q' \models \phi$
- $q \models \mathbf{AX}\phi$ ssi $\forall q \rightarrow q'$, on a $q' \models \phi$
- $q \models \mathbf{E}\phi\,\mathbf{U}\,\psi$ ssi $\exists \rho \in \mathsf{Exec}(q)$ telle que $\exists i \geq 0$ tel que $\rho(i) \models \psi$ et $\forall 0 \leq j < i$, on a $\rho(j) \models \phi$.
- $q \models \mathbf{A}\phi\,\mathbf{U}\,\psi$ ssi $\forall \rho \in \mathsf{Exec}(q)$, $\exists i \geq 0$ tel que $\Big(\rho(i) \models \psi$ et $\forall 0 \leq j < i$, on a $\rho(j) \models \phi\Big)$.