# Examen – Méthodes formelles/Vérification probabiliste
# Master 2 Informatique

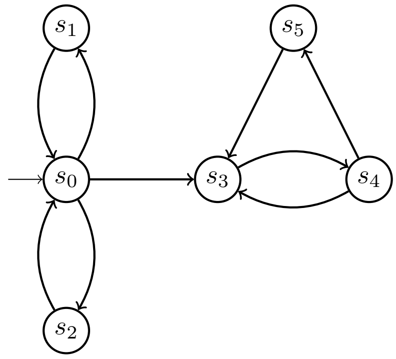
24 Mars 2020

**Durée recommandée :** 3h.

**Exercice** 1 : *Automates de Büchi* [**2 points**]
On considère un modèle avec l'ensemble suivant de propositions atomiques $PA = \{p, q, r\}$.

1. Donnez l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet $2^{PA}$ correspondant à la propriété temporelle suivante : $\{w \in (2^{PA})^\omega \mid \forall i \in \mathbb{N}.\exists j \in \mathbb{N}.j \geq i \text{ et } w(j) = \{p, q\}\}$.
2. Donnez l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet $2^{PA}$ correspondant aux mots de la formule LTL : $(\mathbf{G}p) \wedge (q\,\mathbf{U}\,r)$.

**Exercice** 2 : *Model-checking de formules de logique temporelle linéaire* [**3 points**]



| État | Étiquette |
|---|---|
| $s_0$ | $\{p\}$ |
| $s_1$ | $\{r\}$ |
| $s_2$ | $\{p\}$ |
| $s_3$ | $\{r\}$ |
| $s_4$ | $\{q\}$ |
| $s_5$ | $\{r\}$ |

FIGURE 1 – Système de transitions $\mathcal{S}_1$

On considère le système de transitions $\mathcal{S}_1$ donné à la Figure 1 (le tableau à droite représentant pour chaque état l'ensemble des propositions atomiques qui lui est associé) sur l'ensemble des propositions atomiques $AP = \{p, q, r\}$. Pour chacune des formules LTL $\phi$ suivantes, dîtes (en justifiant) si le système satisfait la formule (c'est-à-dire si l'on a $\mathcal{S}_1 \models \phi$). On rappelle qu'un système satisfait une formule si, et seulement si, toutes ses traces sont des mots de la formule.

1. $\phi = p\,\mathbf{U}\,r$
2. $\phi = (\mathbf{G}p) \vee (\mathbf{F}r)$
3. $\phi = (\mathbf{GF}q) \Rightarrow (\mathbf{GF}r)$

**Exercice** 3 : *Spécification en logique temporelle linéaire* [**5 points**]
On suppose que l'on a un modèle représentant un ascenseur pour un bâtiment à trois étages (en comptant le rez-de-chaussée). Cet ascenseur a 3 boutons avec écrit dessus respectivement **0**, **1** et **2** (pour chacun des étages) et trois voyants en face de chacun des boutons. De plus l'ascenseur peut se déplacer entre les étages et à chaque étage il a des portes qui sont soit ouvertes soit fermées. Pour décrire le comportement de cet ascenseur, on utilise les propriétés atomiques suivantes :

— $B0, B1, B2$ : pour dire que le bouton 0 ou 1 ou 2 est appuyé (on suppose que ces propriétés sont présentes quand on appuie sur le bouton et passe à fausse quand on relâche le bouton)
— $V0, V1, V2$ : pour dire que le voyant du bouton 0 ou 1 ou 2 est allumé (ces propriétés sont présentes si le voyant correspondant est allumé et absentes sinon).
— $P0, P1, P2$ pour dire que les portes de l'étage 0 ou 1 ou 2 sont ouvertes (ces propriétés sont présentes si les portes sont ouvertes et absentes sinon).
— $A0, A1, A2$ pour dire que l'ascenseur est à l'étage 0 ou 1 ou 2.

Ainsi dans le modèle de l'ascenseur, si dans un état les propositions atomiques sont $\{V0, V1, P2, A2\}$, cela signifie qu'aucun bouton n'est appuyé, que les voyants des boutons 0 et 1 sont allumés, que les portes de l'étage 2 sont ouvertes et que l'ascenseur se trouve à cet étage. On vous demande alors d'écrire les formules LTL correspondant aux propriétés suivantes (si certains des énoncés ne vous semblent pas clairs, vous pouvez les compléter pour expliquer votre formule) :

1. Les portes de deux étages différents ne sont jamais ouvertes en même temps.
2. À tout moment, si les portes d'un étage sont ouvertes, l'ascenseur se trouve à cet étage.
3. À tout moment, si un bouton est appuyé, dans l'état suivant le voyant correspondant est allumé sauf si l'ascenseur est à l'étage correspondant au bouton appuyé.
4. À tout moment, si un voyant correspondant à un étage est allumé, il reste allumé jusqu'à ce que l'ascenseur finisse par arriver à l'étage correspondant (et il finira par y arriver).
5. Si un utilisateur appuie infiniment souvent sur le bouton d'un étage, l'ascenseur sera infiniment souvent à cet étage.

**Exercice** 4 : Analyse qualitative de chaînes de Markov [**3 points**]

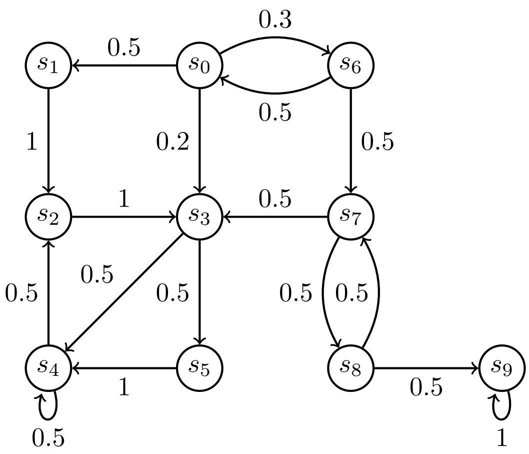



FIGURE 2 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$ représentée à la Figure 2 et les ensembles d'états $B_1 = \{s_9\}$ et $B_2 = \{s_4\}$. Déterminez si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1. $Pr(s_0 \models \mathbf{F}B_1) = 1$
2. $Pr(s_0 \models \mathbf{F}B_2) = 1$
3. $Pr(s_1 \models \mathbf{GF}B_2) = 1$

**Exercice** 5 : Analyse quantitative de chaînes de Markov [**2 points**]

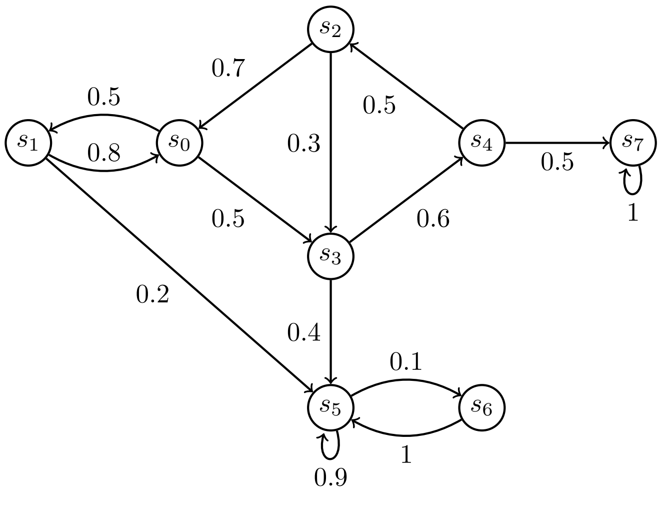



FIGURE 3 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_2$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_2$ représentée à la Figure 3. Calculez pour chacun des états la probabilité d'atteindre l'état $s_7$ (vous devez détailler votre calcul).

**<u>Exercice</u>** 6 : *Construction et vérification d'un modèle probabiliste* [**5 points**]

Dans un casino, il y a une machine à sous avec trois cases chacune pouvant afficher un chiffre compris entre 1 et 3 inclus. À chaque fois que l'on appuie sur le bouton, chaque case affiche un chiffre au hasard et a autant de chances d'afficher l'un de ses trois chiffres. Lorsqu'un utilisateur met une pièce, il peut jouer et appuyer sur le bouton, la machine suit alors les règles suivantes. Si l'utilisateur obtient la séquence 1,2,3 dans cet ordre au premier coup sur les trois cases, il gagne. Si l'utilisateur obtient trois fois le même chiffre, il peut rejouer, si quand il rejoue il obtient de nouveau trois fois le même chiffre qu'au coup précédent, il gagne, si il obtient la séquence 1,2,3 en rejouant il gagne aussi et si il obtient de nouveau trois fois le même chiffre (mais pas le même qu'au coup précédent), il peut rejouer. Dans tous les autres cas, il perd.

Pour résumer, un utilisateur peut gagner soit en obtenant à un moment 1,2,3 soit en obtenant deux fois de suite trois fois le même chiffre et il peut rejouer dès qu'il a trois fois le même chiffre (sauf bien sûr si il gagne).

1. Modélisez cette machine à sous par une chaîne de Markov.
2. Calculez la probabilité de gagner (en détaillant votre calcul) pour l'utilisateur qui met une pièce.