# Examen – Méthodes formelles Approche probabiliste
# Master 2 Informatique

23 Mars 2021

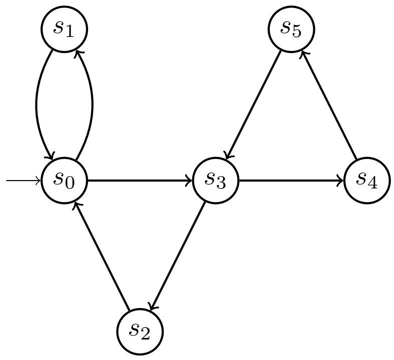
**Durée :** 2h.
**Documents autorisés :** Deux feuilles A4 recto-verso

**Exercice** 1 : *Automates de Büchi* **[2 points]**

On considère un modèle avec l'ensemble suivant de propositions atomiques $PA = \{a, b\}$.

1. Donnez l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet $2^{PA}$ correspondant à la propriété temporelle suivante : $\{(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (2^{PA})^\omega \mid \forall i \in \mathbb{N}.$si $i$ est pair, alors $w_i = \{a\}$ et il existe un nombre fini de $j$ dans $\mathbb{N}$ tels que $b \in w_j\}$.
2. Donnez l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet $2^{PA}$ correspondant aux mots de la formule LTL : $(\mathbf{GF}b) \wedge (\mathbf{G}\neg a)$.

**Exercice** 2 : *Model-checking de formules de logique temporelle linéaire* **[5 points]**



| État | Étiquette |
|---|---|
| $s_0$ | $\{p\}$ |
| $s_1$ | $\{r\}$ |
| $s_2$ | $\{p\}$ |
| $s_3$ | $\{r\}$ |
| $s_4$ | $\{q\}$ |
| $s_5$ | $\{r\}$ |

Figure 1 – Système de transitions $\mathcal{S}_1$

On considère le système de transitions $\mathcal{S}_1$ donné à la Figure 1 (le tableau à droite représentant pour chaque état l'ensemble des propositions atomiques qui lui est associé) sur l'ensemble des propositions atomiques $PA = \{p, q, r\}$. Pour chacune des formules LTL $\phi$ suivantes, dîtes (en justifiant) si le système satisfait la formule (c'est-à-dire si l'on a $\mathcal{S}_1 \models \phi$). On rappelle qu'un système satisfait une formule si, et seulement si, toutes ses traces sont des mots de la formule.

1. $\phi = \mathbf{F}q$
2. $\phi = \mathbf{GF}r$
3. $\phi = \mathbf{G}(p \Rightarrow (\mathbf{X}r))$
4. $\phi = (p\,\mathbf{U}\,r)$
5. $\phi = \mathbf{FG}p$

**Exercice** 3 : *Construction et vérification d'un modèle probabiliste* **[5 points]**

On considère le jeu suivant avec deux dés à six faces. Dans l'état initial, le joueur peut choisir de lancer soit un seul dé, soit deux dés. Si il choisit de lancer les deux dés et qu'il obtient un double (les deux dés ont la même face), le joueur gagne ; si il fait un 7, il revient dans l'état initial et recommence le jeu ; et dans les autres cas il perd. Si depuis l'état initial, le joueur choisit de lancer un dé, alors si il fait un chiffre impair, il perd ; sinon il peut de nouveau soit choisir de lancer un dé ou deux dés. Si il choisit de lancer de nouveau un dé et qu'il tombe sur la même valeur que celle du coup d'avant, il gagne ; sinon si il tombe de nouveau sur un chiffre pair, il retourne dans l'état initial (ou il recommence à jouer) ; et sinon il perd. Si il choisit de lancer deux dés, il gagne si il fait un 7 ou un 9 ; et sinon il perd.

1. Proposez une modélisation de ce jeu (en précisant quel modèle vous utilisez).
2. Calculez la plus grande chance de gagner (en détaillant votre calcul).

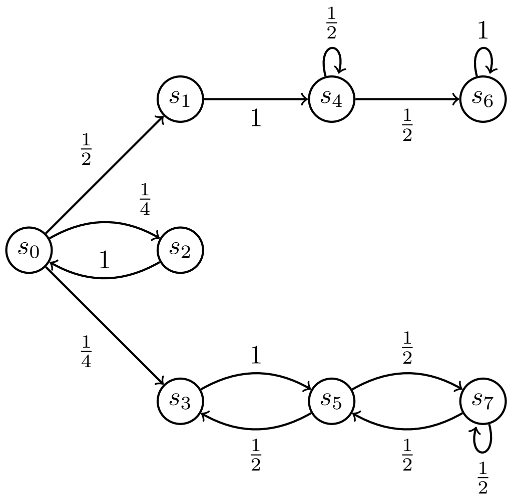



FIGURE 2 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$

**<u>Exercice</u>** 4 : Analyse quantitative de chaînes de Markov [**3 points**]

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$ représentée à la Figure 2. Calculez pour chacun des états la probabilité d'atteindre l'état $s_7$ (vous devez détailler votre calcul).

**<u>Exercice</u>** 5 : Analyse qualitative de chaînes de Markov [**5 points**]

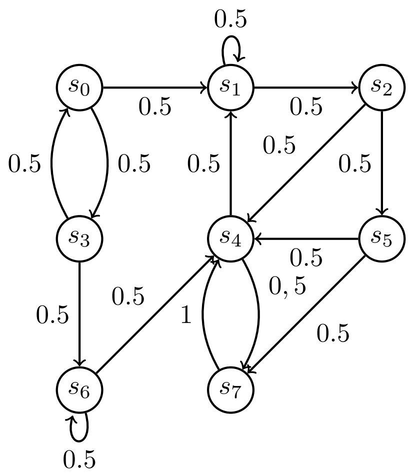



FIGURE 3 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_2$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_2$ représentée à la Figure 3 et les ensembles d'états $B_1 = \{s_6\}$ et $B_2 = \{s_3, s_4\}$ et $B_3 = \{s_1, s_2, s_4, s_5, s_7\}$. Déterminez si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_2}(s_0 \models \mathbf{F}B_1) = 1$
2. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_2}(s_0 \models \mathbf{F}B_2) = 1$
3. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_2}(s_0 \models \mathbf{GF}B_2) = 1$
4. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_2}(s_0 \models \mathbf{FG}B_3) = 1$