Examen – Méthodes formelles Approche probabiliste
Master 2 Informatique

Durée conseillée : 2h.
À rendre : Cet examen est à rendre par mail à `sangnier@irif.fr` avant le mardi 4 avril 2023 12h00

Exercice 1 : *Propriétés temporelles linéaires* [**3 points**]

On considère un modèle avec l'ensemble de propositions atomiques $PA = \{a, b\}$. Dire en justifiant si les propriétés temporelles linéaires suivantes sont des propriétés de vivacité ou de sûreté ou n'entrent dans aucune de ces deux classes.

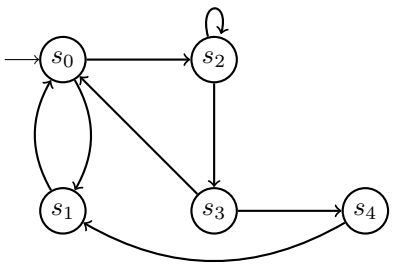
1. À chaque fois que l'on voit un a alors on verra un b dans l'un des deux états qui suit.
2. On finit par ne voir que des b.
3. On voit infiniment souvent a et on ne voit b qu'un nombre fini de fois.

Exercice 2 : *Automates de Büchi* [**2 points**]

On considère un modèle avec l'ensemble suivant de propositions atomiques $PA = \{a, b\}$.

1. Donner l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet 2^{PA} correspondant à la propriété temporelle suivante : $\{(w_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in (2^{PA})^\omega \mid \forall i \in \mathbb{N}.(\text{si } b \in w_i \text{ alors } (i = 1 \text{ OU } w_{i-1} = \{a\}))$ ET il existe un nombre infini de j dans $\mathbb{N}$ tels que $\{a, b\} \subseteq w_j\}$.
2. Donner l'automate de Büchi qui reconnait les mots infinis sur l'alphabet 2^{PA} correspondant aux mots de la formule LTL : $(\mathbf{GF}a) \wedge \neg(\mathbf{FG}a)$.

Exercice 3 : *Model-checking de formules de logique temporelle linéaire* [**5 points**]



État	Étiquette
s_0	$\{p\}$
s_1	$\{q, r\}$
s_2	$\{r\}$
s_3	$\{q\}$
s_4	$\{p\}$

FIGURE 1 – Système de transitions $\mathcal{S}_1$

On considère le système de transitions $\mathcal{S}_1$ donné à la Figure 1 (le tableau à droite représentant pour chaque état l'ensemble des propositions atomiques qui lui est associé) sur l'ensemble des propositions atomiques $PA = \{p, q, r\}$. Pour chacune des formules LTL ϕ suivantes, dire (en justifiant) si le système satisfait la formule (c'est-à-dire si l'on a $\mathcal{S}_1 \models \phi$). On rappelle qu'un système satisfait une formule si, et seulement si, toutes ses traces sont des mots de la formule.

1. $\phi = \mathbf{XX}q$
2. $\phi = (\mathbf{F}p) \wedge (\mathbf{F}r)$
3. $\phi = (\mathbf{F}(p \wedge r))$
4. $\phi = \mathbf{GF}q$
5. $\phi = \mathbf{G}(p \Rightarrow \mathbf{X}r)$

Exercice 4 : *Construction et vérification d'un modèle probabiliste* [**5 points**]

Le jeu de Craps se base sur le pari de la valeur obtenue après des lancers de **deux** dés à six faces. Après le premier lancer, si la valeur 7 ou 11 est obtenue, le jeu est fini et le joueur gagne et si la valeur obtenue est 2,3 ou 12, le jeu s'arrête et le joueur perd. Si toutefois une autre valeur est obtenue, les dés sont lancés de nouveau mais la valeur du premier lancer est gardée en mémoire, on l'appelle le **point** (cette valeur est gardée en mémoire pour le reste de la partie). Si la valeur 7 ou celle du **point** est obtenu le jeu s'arrête et dans le premier cas, le joueur perd et gagne dans le deuxième cas. Si une autre valeur est obtenue, le joueur relance les dés jusqu'à obtenir soit un 7 soit la valeur du **point**.

1. Proposer un modèle pour le jeu de Craps.
2. Donner la probabilité de gagner dans ce jeu.

<u>Exercice</u> 5 : *Analyse qualitative de chaînes de Markov* [**5 points**]

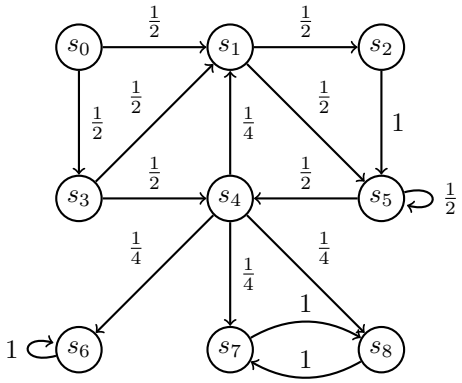


FIGURE 2 – Chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$

On considère la chaîne de Markov $\mathcal{M}_1$ représentée à la Figure 2 et les ensembles d'états $A = \{s_5\}$ et $B = \{s_8\}$. Calculer pour chaque état $s \in \{s_0, \ldots, s_8\}$ les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_1}(s \models \mathbf{F}A)$.
2. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_1}(s \models (S \setminus A)\ \mathbf{U}\ B)$.
3. $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_1}(s \models \mathbf{G}(S \setminus A))$.