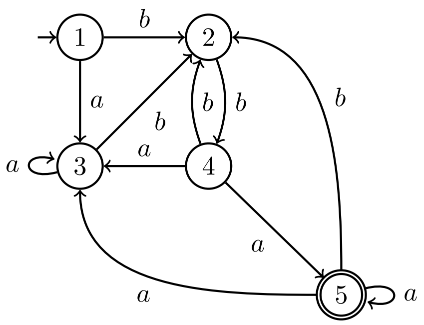
Automates avancés – Master 1 Informatique
TD 2 : Langages rationnels et automates finis (suite)

Exercice 1 :

1. Donnez l'automate sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ reconnaissant tous les mots ayant un nombre pair de a et de b et un nombre impair de c.
2. En utilisant la méthode par élimination en déduire l'expression rationelle reconnaissant le même langage.

Exercice 2 :
Appliquez la méthode par élimination pour obtenir l'expression rationnelle correspondant à l'automate suivant :



Exercice 3 :

Déterminiser les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

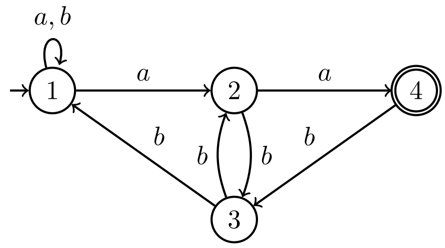


FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}_1$

Exercice 4 :

Le but de cet excice est de montrer qu'il existe des automates qui nécessitent un nombre exponentiel d'états par rapport à leur version non-déterministe.

1. Étant donné un entier $n \geq 1$, construisez un automate non-déterministe $\mathcal{B}_n$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ avec au plus $n + 1$ états et reconnaissant les mots de longueur supérieure à n tels que la n-ième lettre en partant de la fin est un a.

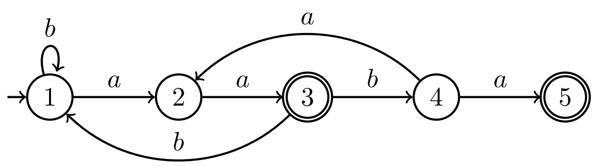


FIGURE 2 – Automate $\mathcal{A}_2$

2. Déterminiser $\mathcal{B}_4$. Combien d'états l'automate déterministe possède-t-il ? Qu'en est-il dans le cas $\mathcal{B}_5$?
3. Pour $n \geq 1$, on suppose que l'automate déterministe reconnaissant le même langage que $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{C}_n = (Q, \Sigma, E, \{i\}, F)$. On veut montrer qu'il possède 2^n états. Pour tout mot $u \in A^*$, on note $E^*(i, u)$ l'état où l'on arrive en lisant le mot u. Soient u et v deux mots distincts de longueur n. Montrez que $E^*(i, u) \neq E^*(i, v)$ (*Indication : trouvez un mot w tel que uw soit reconnu et pas vw*).
4. Combien y-a-t il de mots de longueurs n sur l'alphabet Σ ?
5. Vous pouvez alors conclure.

Exercice 5 :

Montrer que $\bigcup_{n \geq 0} (a^+c)^n (b^+c)^n + (a+b+c)^* cc (a+b+c)^*$ satisfait la condition du lemme de l'étoile. Est-ce que le langage est régulier pour autant ?

Exercice 6 :

Les langages suivant sont-ils réguliers ?

1. $L_1 = \{baba^2ba^3 \dots ba^n \mid n \geq 0\}$
2. $L_2 = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\} \setminus A^*\{aa, bb\}A^*$ avec $A = \{a, b\}$
3. $L_3 = \{a^n \mid n \text{ est un entier premier}\}$
4. $L_4 = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a < |u|_b\}$ (où $|u|_a$ représente le nombre de a dans le mot u et $|u|_b$ représente le nombre de b dans le mot u)

Exercice 7 :

On dit qu'un mot contient un carré si on peut l'écrire $uvvw$ avec $v \neq \epsilon$. Montrez que le langage $K = \{udv \mid u, v \in \{a, b, c\}^* \text{ and (soit } u \neq v, \text{ soit } u \text{ ou } v \text{ contient un carré)}\}$ sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ satisfait le critère du lemme de l'étoile fort mais n'est pas régulier.

Indication : On pourra montrer que K satisfait le critère avec $n = 3$. Pour montrer que K n'est pas régulier, on pourra admettre l'existence de mots sans carré arbitrairement longs sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

Exercice 8 :

(a) Montrer que le carré d'un langage régulier n'est pas nécessairement un langage régulier. Le carré du langage L étant défini par

$$L^2 = \{uu \mid u \in L\}.$$

(b) Montrer que la racine carrée d'un langage régulier est un langage régulier. La racine carrée du langage L étant définie par

$$\sqrt{L} = \{u \mid uu \in L\}.$$

On pourra exprimer $\sqrt{L}$ comme combinaison régulière de langages obtenus à partir d'un automate reconnaissant L.