Automates avancés – Master 1 Informatique
TD 4 : Langages algébriques et automates à pile

Exercice 1 :
Une grammaire (Σ, V, P) est dite *linéaire droite* si toutes ces règles sont de la forme $S \rightarrow w$ avec $w \in \Sigma^* \cup (\Sigma^* \cdot V)$.

1. Donner les grammaires linéaires droite correspondant aux langages rationnels suivants :
   (a) Les mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre impair de a.
   (b) Les mots sur $\{a, b\}$ où chaque paire de a est immédiatement suivie par une paire de b.
2. Montrer qu'un langage est rationnel si, et seulement si, il est reconnaissable par une grammaire algébrique linéaire droite.

Exercice 2 :
Rendez les grammaires suivantes propres :

1.
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \ + \ aS \ + \ a \\ A & \rightarrow & Ab \ + \ b \\ B & \rightarrow & AS \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & cB \ + \ cS \\ B & \rightarrow & aBb \ + \ \varepsilon \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & TU \ + \ VW \ + \ X \\ T & \rightarrow & TT \ + \ W \\ U & \rightarrow & aU \ + \ V \ + \ cW \ + \ \varepsilon \\ V & \rightarrow & U \ + \ W \ + \ XaV \\ X & \rightarrow & W \ + \ b \end{array}$$

Exercice 3 :
On considère l'automate suivant avec comme alphabet d'entrée $A = \{0, 1\}$, comme alphabet de pile $Z = \{Z_0, X\}$ (Z_0 est le symbole initial), comme états de contrôle $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ et les transitions suivantes :

$$\begin{array}{l} q_0, Z_0 \xrightarrow{1} q_0, X \\ q_0, X \xrightarrow{1} q_0, XX \\ q_0, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0 \\ q_0, X \xrightarrow{0} q_1, \varepsilon \\ q_1, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0 \\ q_1, X \xrightarrow{0} q_1, \varepsilon \\ q_2, Z_0 \xrightarrow{0} q_2, Z_0 \end{array}$$

1. Quel est le langage reconnu par cet automate à pile lorsque il accepte par pile vide ?
2. Qu'en est-il si le mode d'acceptation est par état final sur l'état q_2 ?

Exercice 4 :
On considère l'automate suivant avec comme alphabet d'entrée $A = \{a, b\}$, comme alphabet de pile $Z = \{Z_0, A, B\}$ (Z_0 est le symbole initial), comme états de contrôle $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}$ et les transitions suivantes :

$$
\begin{aligned}
&q_0, Z_0 \xrightarrow{a} q_1, AAZ_0\\
&q_0, Z_0 \xrightarrow{b} q_2, BZ_0\\
&q_0, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_f, \varepsilon\\
&q_1, A \xrightarrow{a} q_1, AAA\\
&q_1, A \xrightarrow{b} q_1, \varepsilon\\
&q_1, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0, Z_0\\
&q_2, B \xrightarrow{a} q_3, \varepsilon\\
&q_2, B \xrightarrow{b} q_2, BB\\
&q_3, B \xrightarrow{\varepsilon} q_1, \varepsilon\\
&q_3, Z_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1, AZ_0
\end{aligned}
$$

1. Les mots abb et bab sont-ils acceptés par l'automate ?
2. Quel est le contenu de la pile après lecture de b^7a^4 ?
3. Quel est le langage accepté par cet automate si on suppose qu'il accepte par état final q_f ?

Exercice 5 :

Construire des automates à piles reconnaissant chacun des langages suivant, et précisez dans chacun des cas le mode d'acceptation pour lequel vous avez opté :

1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b + 1$ et $\forall w_1w_2 = w$, on a $|w_1|_a \geq |w_1|_b\}$ où $|w|_c$ représente le nombre d'occurrences de la lettre c dans le mot w ;
2. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 2.|w|_b\}$;
3. $\{a^nb^p \mid n \geq p \geq 0\}$;
4. $\{a^nb^p \mid p \geq n \geq 0\}$;
5. $\{a^nb^p \mid n \neq p\}$;
6. $\{a^{i_1}ba^{i_2}b \ldots a^{i_n}b \mid n > 0$ et $\exists j. i_j \neq j\}$;
7. $\{a^nb^pa^n \mid n,p > 0\} \cup \{a^nb^pc^p \mid n,p > 0\}$.