# Automates avancés et applications
# Master 1 Informatique
# TD 6 : Suites automatiques et automates de Büchi

**Exercice 1** [Thue-Morse]

On définit la suite de mots $(w_n)_n$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ définie par

$$w_0 = 0,\ w_{n+1} = w_n \overline{w_n}$$

où $\overline{w}$ est obtenu en remplaçant dans le mot $w \in \{0, 1\}^*$ les 0 par des 1 et vice-versa.

- Calculer $w_1, w_2, w_3, w_4$.
- Montrer que les mots $w_n$ sont préfixes du mot infini de Thue-Morse $\sigma^\omega(0)$, engendré par la substitution définie sur l'alphabet $\{0, 1\}$ par $\sigma : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 10$.
- Montrer que l'ensemble des facteurs du mot de Thue-Morse est stable par l'application $w \mapsto \overline{w}$.
- L'image miroir du mot $w_1 \cdots w_n$ est définie par $w_n \cdots w_1$. L'ensemble des facteurs du mot de Thue-Morse est-il stable par image miroir?
- Donner les facteurs de longueur inférieure à 6 du mot de Thue-Morse.
- Montrer que chaque facteur $w$ du mot de Thue-Morse peut être décomposé comme $w = r_1\sigma(x)r_2$, où $x$ est un facteur et $r_i \in \{\varepsilon, 0, 1\}$. Si $|w| \geq 5$, alors cette décomposition est unique. Soit $p(n)$ la fonction de complexité du mot de Thue-Morse qui compte le nombre de facteurs de longueur $n$. Montrer que $p(2n) = p(n) + p(n + 1)$ et que $p(2n + 1) = 2p(n + 1)$, pour $n \geq 1$.

**Exercice 2** [Rudin-Shapiro] La substitution de Rudin-Shapiro est donnée par

$$\sigma : a \mapsto ab,\ b \mapsto ac,\ c \mapsto db,\ d \mapsto dc.$$

Soit $\varphi$ le morphisme alphabétique donné par $\varphi : a \mapsto 1,\ b \mapsto 1, c \mapsto -1, d \mapsto -1$. Le mot infini de Rudin-Shapiro $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par $u = \varphi(\sigma^\omega(a))$.

1. Donner les 10 premières lettres de $u$.
2. Donner l'automate avec fonction de sortie qui engendre le mot infini $u$ en lisant les chiffres du développement en base 2 des entiers en partant d'abord du poids fort.
3. Donner le carré de $\sigma$.
4. Exprimer les suites $(u_{4n})_n$, $(u_{4n+1})_n$, $(u_{4n+2})_n$, $(u_{4n+3})_n$ en fonction de la suite $(u_n)_n$. Montrer que $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = (-1)^n u_n$ pour tout $n$.
5. En déduire que le mot infini $u$ donne la parité du nombre d'occurrences avec chevauchement du mot 11 dans le développement en base 2 de $n$. Le vérifier sur les 10 premières valeurs de $n$.
6. Soit $v$ le mot infini $\sigma^\omega(a)$. Le mot $v$ est-il périodique? Le mot $u$ est-il périodique?

**Exercice 3** [La suite de pliage de papier] On plie une feuille de papier sur elle-même toujours de la même manière et on regarde la suite des creux et des bosses que l'on obtient après l'avoir dépliée. On code un creux par la lettre $-1$ et une bosse par la lettre $+1$. Cette suite de mots finis converge vers un mot infini automatique qui est engendré par l'automate suivant (lecture des poids fort en premier)

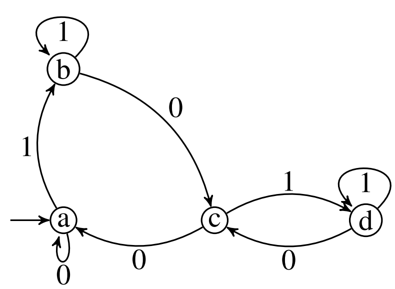


Figure 1: Automate $\mathcal{A}_1$

avec la fonction de sortie à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\varphi : a \mapsto 1, b \mapsto 1,\ c \mapsto -1,\ d \mapsto -1.$$

Donner ses 10 premiers termes et la liste de ses facteurs de taille 4.

**Exercice 4** Donnez des expressions $\omega$-rationnelles pour les langages de mots infinis suivants :

1. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels n'apparaissent qu'un nombre fini de $b$.
2. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre $a$ à toutes les positions paires (on rappelle que le premier indice d'un mot infini est $0$).
3. Les mots infinis sur $\{a, b\}$ où l'on trouve la lettre $a$ uniquement aux positions paires.
4. Les mots infinis sur $\{a, b, c\}$ dans lesquels apparaissent infiniment souvent les lettres $a$ et $b$.

**Exercice 5** On considère l'automate de Büchi suivant

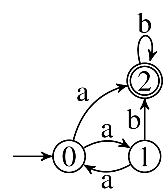


Figure 2: Automate $\mathcal{A}_2$

1. A-t-on $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset$?
2. Est-ce que $\mathcal{A}_2$ accepte le mot infini $a^\omega$?
3. Est-ce que $\mathcal{A}_2$ accepte le mot infini $ab^\omega$?