

# Automates avancés–Master 1 Informatique

## TD 8 : Transducteurs et $p$ -automates

**Exercice 1** Donner un automate qui reconnaît la progression arithmétique  $2 + 3\mathbb{N}$  pour les entiers écrits en base 2, puis pour les entiers écrits en base 10. Donner un automate qui reconnaît la progression arithmétique  $5 + 3\mathbb{N}$  pour les entiers écrits en base 2.

**Exercice 2** Donner un transducteur qui donne le développement binaire de  $n/5$  quand  $n$  est divisible par 5.

**Exercice 3** Sur les critères de divisibilité.

1. Montrer qu'un entier dont l'écriture en base 2 appartient à l'ensemble  $101^*(00)^*1^*01$  (chiffres de poids forts à gauche) est divisible par 3.
2. Donner une description rationnelle de l'ensemble des écritures binaires des entiers divisibles par 3.
3. Donner un critère permettant de reconnaître sur l'écriture d'un entier écrit en binaire qu'il est divisible par 3.

**Exercice 4** Décrire l'ensemble des entiers reconnu par le 2-automate suivant où la fonction de sortie est indiquée par la valeur prise par les états. Décrire la suite caractéristique de cet ensemble en en donnant une substitution et un morphisme lettre-à-lettre qui l'engendrent.

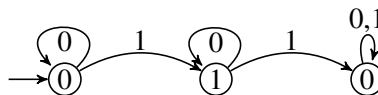


Figure 1: Automate  $A_1$

**Exercice 5** Quelle est la relation reconnue par le transducteur  $\mathcal{T}_1$  donné ci-dessous?

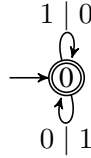


Figure 2: Transducteur  $\mathcal{T}_1$

**Exercice 6**

1. Donner un transducteur  $\mathcal{T}$  qui reconnaît la relation de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\{0, 1\}^*$  définie par les couples de mots  $(u, v)$  qui sont tels que  $v$  est obtenu en remplaçant dans  $u$  les 0 par des 1 lorsque le 0 est précédé d'un 1 :

$$|\mathcal{T}| = \{(u, v) \mid u, v \in \{0, 1\}^*, v \text{ est obtenu en remplaçant dans } u \text{ les } 0 \text{ par des } 1 \text{ lorsque le } 0 \text{ est précédé d'un } 1\}.$$

2. Donner un transducteur  $\mathcal{T}$  qui reconnaît la relation de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\{0, 1\}^*$  définie par les couples de mots  $(u, v)$  qui sont tels que  $u$  commence par 1 et  $v$  est obtenu en remplaçant dans  $u$  les 0 par des 1 :

$$|\mathcal{T}| = \{(u, v) \mid u \in \{0, 1\}^*, u \in 1\mathcal{A}^*, v \text{ est obtenu en remplaçant dans } u \text{ les } 0 \text{ par des } 1\}.$$

3. Donner un transducteur  $\mathcal{T}$  qui reconnaît la relation de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\{0, 1\}^*$  qui correspond aux couples de mots  $(u, v)$  tels que  $v$  est obtenu en remplaçant dans  $u$  les blocs de 1 par un seul 1 et les blocs de 0 par un seul 0 :

$$|\mathcal{T}| = \{(u, v) \mid u, v \in \{0, 1\}^*, v \text{ est obtenu en remplaçant dans } u \text{ les blocs de } 1 \text{ par un seul } 1 \text{ et les blocs de } 0 \text{ par un seul } 0\}.$$

4. Donner un transducteur  $\mathcal{T}$  qui reconnaît la relation de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\{0, 1\}^*$  définie par les couples de mots  $(u, v)$  qui sont tels que  $v$  est obtenu en supprimant dans  $u$  chaque 1 qui apparaît après un 0 :

$$|\mathcal{T}| = \{(u, v) \mid u, v \in \{0, 1\}^*, v \text{ est obtenu en supprimant dans } u \text{ chaque } 1 \text{ qui apparaît après un } 0\}.$$

5. Donner un transducteur  $\mathcal{T}$  qui reconnaît la relation de  $\{0, 1\}^*$  dans  $\{0, 1\}^*$  définie par les couples de mots  $(u, v)$  qui sont tels que  $v$  est obtenu en supprimant dans  $u$  tous les 1 :

$$|\mathcal{T}| = \{(u, v) \mid u, v \in \{0, 1\}^*, v \text{ est obtenu en supprimant dans } u \text{ les } 1\}.$$

6. L'opération suivante est-elle réalisable par transducteur : remplacer toute plage impaire de 0 de la forme  $0^{2n+1}$  par une plage paire de 0 de la forme  $0^{2n}$  sur l'ensemble des mots de  $\{0, 1\}^*$  qui ne contiennent pas 11? Si oui, le donner.

### **Exercice 7 Autour de la numération de Fibonacci**

1. Représenter les entiers 12, 17, 19 et 33 en base Fibonacci.
2. Quelle est la valeur de l'entier  $n$  dont la représentation en base de Fibonacci est 1010?
3. Donner les 10 premiers termes de la suite de Fibonacci modulo 2. Que peut-on en dire? le prouver. Donner un automate qui reconnaît l'ensemble des écritures en base Fibonacci des entiers pairs.
4. Calculer les valeurs de  $1000(10)^n + 1$  et de  $1000(10)^n 00 + 1$ . Donner un transducteur qui réalise la fonction successeur.