Contrôle continu – Automates Avancés et Applications
Master 1 Informatique

21 octobre 2020

Durée : 2h00.

Documents autorisés : Une feuille A4 manuscrite recto-verso.

Notation : On rappelle que pour un mot $w \in \Sigma^*$, sa longueur est notée $|w|$ et si $a \in \Sigma$ alors $|w|_a$ correspond au nombre de fois que la lettre a apparaît dans le mot w.

Exercice 1 : [5 points] *Langages rationnels*

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Dire en justifiant la réponse si les langages suivants sont rationnels ou non.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ est impair et } |w|_c \text{ est divisible par } 3\}$.
2. $L_2 = \{w = w_1 w_2 w_3 \mid w_1, w_3 \in \{a, b\}^* \text{ et } w_2 \in c^* \text{ et } w_1 = w_3\}$.
3. $L_3 = L_2 \cap a^*$.
4. $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_c\} \cap \{b, c\}^*$.

Exercice 2 : [3 points] *De l'expression rationnelle à l'automate et vice-versa*

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Donner l'automate fini normalisé reconnaissant le langage rationnel $((a \cdot (b + c)^* \cdot c) + (a \cdot b)^*)^*$.
2. Donner l'expression rationnelle correspondant au langage reconnu par l'automate A_1 représenté à la Figure 1.

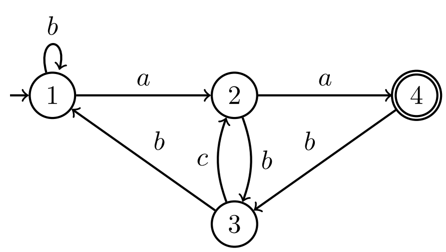

Figure 1 – Automate A_1

Exercice 3 : [3 points] *Grammaires algébriques*

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Donner une grammaire algébrique G reconnaissant le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, |w|\}. w(i) = w(|w| + 1 - i)\}$.
2. Donner une grammaire algébrique G reconnaissant le langage $L' = \Sigma^* \setminus L$.

Exercice 4 : [3 points] *Normalisation de grammaires*

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Réduire la grammaire suivante pour S :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aVa \ + \ cSd \\
T & \rightarrow & bbTUcc \ + \ BTc \\
U & \rightarrow & bUc + bTbTcTc \\
V & \rightarrow & VW \ + \ aWb \ + \ ac \\
W & \rightarrow & aWbV \ + \ bS
\end{array}
$$

2. Rendre la grammaire suivante propre :

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aT \ + \ T \ + \ aTbUb \\ T & \rightarrow & aTbTc \ + \ U \\ U & \rightarrow & aUb \ + \ aSb \ + \ \epsilon \end{array}$$

<u>Exercice</u> 5 : [6 points] *Les automates à un compteur*

Dans cet exercice, on introduit une nouvelle forme d'automates pour reconnaître des langages. Un automate à un compteur est un n-uplet $A = (Q, \Sigma, q_i, T, F)$ où :

— Q est un ensemble fini d'états,

— $q_i \in Q$ est l'état initial,

— Σ est l'alphabet de l'automate,

— $T \subseteq Q \times \Sigma \times \{\mathbf{inc}, \mathbf{dec}, \mathbf{zero}?\} \times Q$ est la relation de transitions où chaque transition est étiquetée par une lettre de Σ et par une action sur le compteur (**inc** augmente le compteur de 1, **dec** diminue le compteur de 1 et **zero**? teste si le compteur vaut 0),

— $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finaux.

Une configuration de l'automate à un compteur est une paire $(q, v) \in Q \times \mathbb{N}$ où v représente la valeur du compteur qui ne peut jamais être négative ($\mathbb{N}$ représente l'ensemble des entiers naturels). Une étape de calcul de l'automate à un compteur est un triplet $(q, v) \xrightarrow{a} (q', v')$ où (q, v) et (q', v') sont des configurations et tel qu'il existe $(q, a, u, q') \in T$ vérifiant un des trois cas suivants :

(a) $u = \mathbf{inc}$ et $v' = v + 1$, ou,

(b) $u = \mathbf{dec}$ et $v > 0$ et $v' = v - 1$, ou,

(c) $u = \mathbf{zero}?$ et $v = 0$ et $v' = v$.

Un calcul est une suite finie d'étapes de calcul $(q_0, v_0) \xrightarrow{a_1} (q_1, v_1) \xrightarrow{a_2} (q_2, v_2) \cdots (q_{n-1}, v_{n-1}) \xrightarrow{a_n} (q_n, v_n)$ avec $q_0 = q_i$ et $v_0 = 0$. Ainsi un calcul commence avec 0 dans le compteur. Un tel calcul reconnaît le mot $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ et on dit qu'il est acceptant si $q_n \in F$. Le langage reconnu par A est alors donné par $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid$ il existe un calcul acceptant qui reconnaît $w\}$.

1. Donner un automate à un compteur A sur $\Sigma = \{a, b\}$ tel que $L(A) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$.
2. Donner un automate à un compteur A sur $\Sigma = \{[,]\}$ tel que $L(A) = \{w \in \{[,]\} \mid |w|_{[} = |w|_{]}$ et pour tout préfixe w_1 de $W.|w|_{[} \geq |w|_{]}\}$.
3. Montrer que les langages reconnus par les automates à un compteur sont algébriques.
4. Donner un langage algébrique qui ne peut pas être reconnu par un automate à un compteur (il n'est pas demandé de justification).
5. Soit L un langage rationnel et L' un langage reconnu par un automate à un compteur, le langage $L \cap L'$ est-il reconnu par un automate à un compteur ? Justifier la réponse.