

Contrôle continu – Automates Avancés et Applications

Master 1 Informatique

28 octobre 2022

Durée : 2h00.

Documents autorisés : Deux feuilles A4 manuscrite recto-verso.

Notation : On rappelle que pour un mot $w \in \Sigma^*$, sa longueur est notée $|w|$ et si $a \in \Sigma$ alors $|w|_a$ correspond au nombre de fois que la lettre a apparaît dans le mot w .

Exercice 1 : [3 points]

Automates finis

Pour chacun des langages suivants, donner un automate fini reconnaissant ce langage.

- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \% 3 = 0 \text{ et } |w|_b \% 3 = 2\}$ (où % désigne l'opérateur modulo).
- $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{si on a deux } b \text{ à la suite dans } w \text{ alors on a juste avant un } a\}$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1 w_2 \text{ avec } w_1 \in \{a\}^* \text{ et } w_2 \in \{b\}^* \text{ et } |w_1| > 1 \text{ est divisible par } 2 \text{ mais pas par } 4 \text{ et } |w_2| > 1 \text{ n'est pas divisible par } 3\}$

Exercice 2 : [5 points]

Langages rationnels

Dire en justifiant la réponse si les langages suivants sont rationnels ou non.

- $L_1 = \{a^n b^p \mid |n| \% 3 = |p| \% 3\}$ (où % désigne l'opérateur modulo).
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ est impaire et la lettre du milieu de } w \text{ est un } a\}$.
- $L_3 = L_2 \cap ((ab)^* b)$.
- $L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n < 1024\}$.

Exercice 3 : [3 points]

De l'expression rationnelle à l'automate et vice-versa

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

- Donner l'automate fini normalisé reconnaissant le langage rationnel $((a \cdot b)^* \cdot (b + c)^* + a^*)^*$.
- Donner l'expression rationnelle correspondant au langage reconnu par l'automate A_1 représenté à la Figure 1.

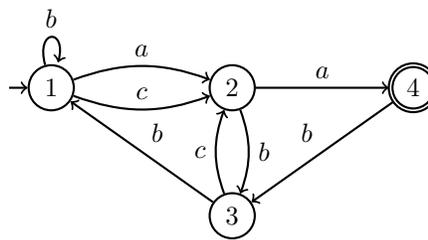


FIGURE 1 – Automate A_1

Exercice 4 : [3 points]

Grammaires algébriques

Pour chacun des langages suivants, donner une grammaire algébrique reconnaissant le langage.

- $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = a^{n_1} b^{n_1} c a^{n_2} b^{n_2} c \dots a^{n_k} b^{n_k} c \text{ avec } k > 0 \text{ et } n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$.
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \neq \tilde{w}\}$ (où \tilde{w} est le miroir de w).

Exercice 5 : [3 points]

Normalisation de grammaires

1. Réduire la grammaire suivante pour S (l'alphabet étant $\{a, b\}$) :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA + BD \\ A &\rightarrow aA + aAB + aD \\ B &\rightarrow aB + aC + BF \\ C &\rightarrow Bb + aAC + E \\ D &\rightarrow bSD + bC + b \\ E &\rightarrow aB + bC \\ F &\rightarrow aF + aG + a \\ G &\rightarrow a + b \end{aligned}$$

2. Rendre la grammaire suivante propre (l'alphabet étant $\{a, b, c, d\}$) :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A + CB \\ A &\rightarrow C + D \\ B &\rightarrow aB + b \\ C &\rightarrow cC + c + \varepsilon \\ D &\rightarrow dD + d \end{aligned}$$

Exercice 6 : [3 points]

Automates à pile

Pour chacun des langages suivants, donner un automate à pile reconnaissant ce langage en précisant à chaque fois le mode d'acceptation.

- $\{a^m b^n c^p \mid n, m, p \geq 0 \text{ et } n = m + p\}$.
- $\{w_1 c w_2 c \dots c w_k \in \{a, b, c\}^* \mid k \geq 1 \text{ et } w_1, \dots, w_k \in \{a, b\}^* \text{ et ils existent } i, j \text{ tels que } w_i = \widetilde{w}_j\}$ (où \widetilde{w}_j est le miroir de w_j).