Correction de l'exercice 5 du Td2

On considère le langage $K = \{w_1dw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a,b,c\}^*$ and (soit $w_1 \neq w_2,$ soit w_1 ou w_2 contient un carré)$\}$.

Montrons que K satisfait la condition du lemme de l'étoile forte pour $n = 3$. Soit $f \in K$ tel que $f = uv_1v_2v_3w$. Comme $f \in K$, on a également $= w_1dw_2$ (suivant la définition de K).

On procède par une étude de cas selon où se termine le mot uv_1 dans f.

— $|uv_1v_2| \leq |w1|$ (le mot uv_1v_2 est de longueur inférieure ou ègale au mot w_1). On a donc $w_1 = uv_1v_2w_1'$. Notons tout d'abord que $uv_1^+v_2v_3w \subseteq K$ et $uv_1v_2^+v_3w \subseteq K$ et $u(v_1v_2)^+v_3w \subseteq K$ car pour chacune de ces expressions le mot répété est avant la lettre d et à chaque fois on a un mot avec carré à la gauche du d. Il nous reste à voir si une de ces séquences répetées peut être enlevée. Il y a alors plusieurs choix :

1. Si $uv_2w_1' \neq w_2$ alors on a $uv_1^*v_2v_3w \subseteq K$.
2. $uv_2w_1' = w_2$ alors $uw_1' \neq w_2$ et par conséquent $u(v_1v_2)^*v_3w \subseteq K$.

— $|uv_1| \geq |w1d|$ (le mot uv_1 est de longueur supérieure ou ègale au mot w_1d). Ce cas se traite de façon symétrique au cas précédent.

— $|uv_1| \leq |w1|$ et $|uv_1v_2| > |w1|$. Dans ce cas on a $w_1 = uv_1w_1'$ et $w_2 = w_2'v_3v$. Tout d'abord remarquons que $uv_1^+v_2v_3w \subseteq K$ et $uv_1v_2v_3^+w \subseteq K$ car dans le premier on a un mot avec carré à la gauche du d et dans l'autre cas à la droite du d. Il nous reste à voir si une de ces séquences répétées peut être enlevée. Il y a alors plusieurs choix :

1. Si $uw_1' \neq w_2$ alors on a $uv_1^*v_2v_3w \subseteq K$.
2. Si $uw_1' = w_2$. Alors on a nécessairement $w_1 \neq w_2'v$. Pourquoi ? Supposons que $uw_1' = w_2$ et $w_1 = w_2'v$, mais alors on a $|w1| > |w_2|$ et $|w_2| > |w_1|$ ce qui est une contradiction, Donc comme $w_1 \neq w_2'v$, on en déduite que $uv_1v_2v_3^*w \subseteq K$.

Donc K satisfait les conditions du lemme de l'étoile fort.

Montrons que K n'est pas régulier. On raisonne par l'absurde en supposant que K est régulier. Il existe donc un automate déterministe et complet $\mathcal{A}$ tel que $K = L(\mathcal{A})$.On suppose que $\mathcal{A}$ a n états. Utilisons l'hypothèse qui nous dit qu'il existe des mots sans carrés arbitrairement longs. Il existe donc un mot $f = wdw$ avec avec $|w| > n$ et w sans carré. Donc $f \notin L(\mathcal{A})$ et comme $\mathcal{A}$ est déterministe, l'unique chemin dans $\mathcal{A}$ en lisant f depuis l'état initial arrive dans un étant non final. En lisant le mot w, l'automate $\mathcal{A}$ passe deux fois par un même état donc $w = vuv$ avec $u \neq \epsilon$ et en lisant v depuis l'état initial on arrive dans le même état qu'en lisant vu. On arrive également dans le même état en lisant vuu. En lisant le mot $vuuvdw$, l'automate $\mathcal{A}$ arrive donc dans le même état qu'en lisant f, c'est-à-dire un état non final, mais $vuuvdw \in K = L(\mathcal{A})$ car on a un carré à droite du d dans ce mot. Ce qui constitue une contradiction donc K n'est pas régulier.