Frédéric Magniez
Miklos Santha

DEA Algorithmique

Calcul quantique

Feuille n° 1 : Transformations unitaires, mesures et sphère de Bloch

Exercice 1

Soit $|\psi\rangle$ l'état de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

1. Montrer que ψ n'est pas séparable.
2. Une même mesure de von Neumann est effectuée sur chacun des deux qubits de $|\psi\rangle$. Montrer que les résultats des deux mesures sont toujours opposés quelque soit la base utilisée pour la mesure.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas de porte quantique U à 2-qubit qui copie un qubit quelconque sur un autre, *i.e.*telle que $U|\psi\rangle|0\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$ pour tout qubit $|\psi\rangle$.

Exercice 3

Montrer que dans un espace de Hilbert de dimension finie, une transformation est unitaire si et seulement si elle est une isométrie. Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Exercice 4

Calculer les vecteurs propres des matrices de Pauli X,Y,Z et de la matrice de Hadamard H. Donner les rotations correspondantes dans la sphère de Bloch.

Exercice 5

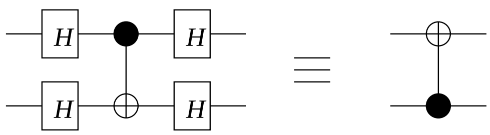
Soit $n = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur normé. Montrer que $R_n(\alpha) = \cos(\alpha/2)I - i\sin(\alpha/2)(n_xX + n_yY + n_zZ)$ correspond dans la sphère de Bloch à une rotation d'angle α autour de l'axe n.

Exercice 6

Montrer que $\sqrt{\text{NOT}}$ (rappel : $X = \text{NOT}$) et c-NOT sont universels pour le calcul réversible. Calculer $\sqrt{\text{NOT}}$.

Exercice 7

1. La porte c-NOT ne change pas le bit de contrôle des états de bases $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ et $|11\rangle$. Qu'en est-il pour des superpositions quelconques ?
2. Montrer que



Exercice 8

Donner un protocole quantique pour téléporter un état à 2-qubit.