Automates à pile

Exercice 1 (Exemples de langages reconnus par automate à pile)
Montrer que les langages suivants sont reconnus par automate à pile :

1. Le langage de Dyck.
2. $\{a^n b^p \mid 0 < n \leq p \leq 2n\}$.
3. $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$.

Exercice 2 (Variantes d'automate à pile)

1. Montrer que la reconnaissanece par pile vide est équivalente à la reconnaissance par états finaux.
2. Montrer que l'on peut supposer que les mouvements d'un automate à pile sont uniquement du type *push* ou *pop*.

Exercice 3 (Équivalence avec les grammaires)
Montrer que les langages reconnus par les automates à pile sont ceux reconnus par les grammaires hors-contexte.

Exercice 4 (Propriétés de clôture)
Montrer que les langages algébriques sont clos par les opérations suivantes : union, concaténation, étoile, projection, projection inverse, intersection rationnelle, morphisme et morphisme inverse.

Exercice 5 (Ensembles calculables)
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile, montrer que les ensembles suivants sont effectivement calculables :

1. $\{(p, x, q) \in Q \times \Gamma \times Q \mid (p, x) \to^* (q, \varepsilon)\}$
2. $\{(p, x, q, y) \in Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \mid \exists h \in \Sigma^*$ tel que $(p, x) \to^* (q, yh)\}$
3. $\{(p, x) \in Q \times \Gamma \mid$ il existe un exécution infinie à partir de $(p, x)\}$

Exercice 6 (Le langage de la pile est rationnel)
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile, montrer que pour tout $(p, x, q) \in Q \times \Gamma \times Q$ l'ensemble $\mathcal{L}(p, x, q) = \{h \in \Gamma^* \mid (p, x) \to^* (q, h)\}$ est rationnel.
On pourra écrire un système d'équations dont les $\mathcal{L}(p, x, q)$ sont les inconnues.

Exercice 7 (Automates à piles déterministes)
Un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0, F)$ est *déterministe* si :
– $\forall (p, x, a) \in Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), |T(p, x, a)| \leq 1$
– $\forall (p, x, a) \in Q \times \Gamma \times \Sigma, T(p, x, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow T(p, x, a) = \emptyset$.

Montrer que le langage $\{a^n b^n \mid n > 0\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ est reconnu par automate à pile mais pas par automate à pile déterministe.

Résultats sur les langages déterministes algébriques :
– pour les automates à pile déterministes la reconnaissance par états finaux est strictement plus expressive que la reconnaissance par pile vide,
– les langages déterministes algébriques sont clos par complémentaire,
– les langages déterministes algébriques sont clos par morphisme inverse,
– les langages déterministes algébriques ne sont pas clos par union, intersection, concaténation, morphisme.
