Grammaires algébriques

Exercice 1 (Exemples de langages algébriques)
Construire des grammaires pour les langages suivants :
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
- $L_3 = \{a^n b^p \mid n \neq p\}$
- $L_4 = \{\text{mots bien parenthésés}\}$, le langage de Dyck
- $L_5 = \{wcw' \mid w,\ w' \in \{a,b\}^* \text{ et } |w| = |w'|\}$

Exercice 2 (Simplification de grammaires)
Soit $G = (V, \Sigma, S, R)$ une grammaire algébrique de langage associé non vide.
- G est dite *réduite* si aucune variable de V n'engendre un langage vide et si toutes les variables de V peuvent être atteintes à partir de S.
- G est dite *propre* si elle ne contient aucune règle de la forme $X \longrightarrow \varepsilon$ ou $X \longrightarrow Y$ (X et Y sont des non-terminaux).

1. Montrer que pour toute grammaire algébrique G, il existe une grammaire algébrique G' réduite engendrant le même langage que G.
2. Construire une grammaire réduite équivalente à la grammaire suivante :
$$\begin{array}{l} S \longrightarrow AB \mid a \\ A \longrightarrow a \end{array}$$
3. Montrer que pour toute grammaire algébrique G n'engendrant pas le mot vide, il existe une grammaire algébrique propre et réduite G' engendrant le même langage.
4. Donner une grammaire propre et réduite équivalente à la grammaire suivante :
$$\begin{array}{l} S \longrightarrow YY \mid bWTY \\ T \longrightarrow b \mid Wa \\ Y \longrightarrow WW \mid Tb \\ W \longrightarrow \varepsilon \mid aS \end{array}$$

Exercice 3 (Forme normale de Chomsky)
Une grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, S, R)$ de langage associé non vide est dite *sous forme normale de Chomsky* si toutes les productions de R sont de la forme $X \longrightarrow YZ$ ou $X \longrightarrow a$.

1. Soit G une grammaire algébrique propre. Montrer qu'il est possible de transformer G en une grammaire G_1 engendrant le même langage que G et telle que toutes les règles de G_1 sont de l'une des deux formes suivantes : $X \longrightarrow a$ et $X \longrightarrow X_1 \ldots X_n, n \geq 2$ où $X,\ X_1 \ldots X_n$ sont des non-terminaux et a est un terminal.

2. En déduire que toute grammaire algébrique n'engendrant pas le mot vide peut être transformée en une grammaire algébrique sous forme normale de Chomsky engendrant le même langage.
3. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$$\begin{array}{l} S \longrightarrow bA \mid aB \\ A \longrightarrow bAA \mid aS \mid a \\ B \longrightarrow aBB \mid bS \mid b \end{array}$$

Exercice 4 (Forme normale de Greibach)
Une grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, S, R)$ de langage associé non vide est dite *sous forme normale de Greibach* si toutes les productions de R sont de la forme $X \longrightarrow a\alpha$ avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$.

1. Soit G une grammaire algébrique, $X \longrightarrow Y\alpha$ une règle de R et soit

$$Y \longrightarrow \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_m$$

l'ensemble des règles de R ayant Y comme membre de gauche. Vérifier que la grammaire G' obtenue en remplaçant la règle $X \longrightarrow Y\alpha$ par les règles $X \longrightarrow \beta_i\alpha$ (pour $1 \leq i \leq m$) engendre le même langage que G.
2. Soit G une grammaire algébrique propre, $X \longrightarrow X\alpha_1 \mid \cdots \mid X\alpha_r$ l'ensemble des règles de R ayant X comme membre gauche et X comme symbole le plus à gauche dans les membres droits, $X \longrightarrow \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_s$ le reste des règles de R ayant X comme membre gauche. Montrer que la grammaire G' obtenue en ajoutant une variable Z et en remplaçant l'ensemble des règles ayant X comme membre gauche par les règles

$$\begin{array}{l} X \longrightarrow \beta_1 Z \mid \ldots \beta_s Z \mid \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_s \\ Z \longrightarrow \alpha_1 Z \mid \ldots \alpha_r Z \mid \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_r \end{array}$$

engendre le même langage que G.
3. On considère une grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, S, R)$, propre et réduite. On suppose que $V = \{X_1 \ldots X_n\}$ et $S = X_1$. Montrer que l'on peut construire une suite $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$ de grammaires engendrant le même langage que G telles que $G_0 = G$ et pour tout $0 \leq k \leq n$, G_k a pour ensemble de non-terminaux $V_k = V \cup \{Z_1 \ldots Z_k\}$ et vérifie : pour tout $1 \leq i \leq k$, $X_i \longrightarrow \gamma$ implique γ commence par un terminal ou par X_j avec $j > i$.
4. En déduire qu'on peut obtenir à partir de G_n une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach engendrant le même langage que G.
5. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach :

$$\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow A_2 A_3 \\ A_2 \longrightarrow A_3 A_1 \mid b \\ A_3 \longrightarrow A_1 A_2 \mid a \end{array}$$
