TD 3 : LTL et automates de Büchi

1 Traduction du français

On considère un circuit séquentiel doté d'une entrée x, d'une sortie y, et de deux registres r_1 et r_2. On définit AP $= \{x, y, r_1, r_2\}$ comme ensemble de propositions atomiques.

Traduire les énoncés suivants en LTL, en logique du premier ordre FO[<], et sous la forme d'automates de Büchi vérifiant le *complémentaire* de l'énoncé.

1. « il est impossible d'obtenir deux '1' successifs en sortie »
2. « chaque fois que l'entrée vaut '1', au plus deux étapes plus tard la sortie vaudra '1' »
3. « chaque fois que l'entrée vaut '1', la valeur des registres ne change pas à l'étape suivante »
4. « le registre r_1 vaut infiniment souvent '1' »

2 Automates de Büchi

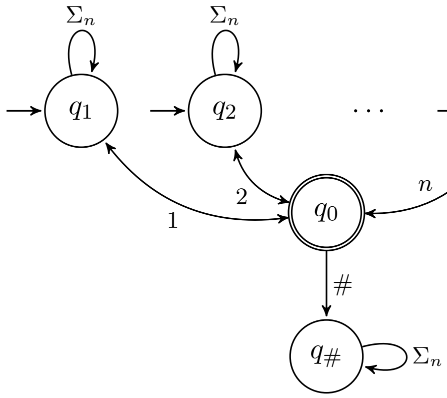
2.1 Déterminisme

Un automate de Büchi $\langle Q, \Sigma, \delta, I, F\rangle$ est *déterministe* si $|I| \leq 1$ et pour tout état q de Q et tout symbole a de Σ, $|\delta(q, a)| \leq 1$.

1. Donner un automate de Büchi non déterministe pour le langage de $\{a, b\}^\omega$ décrit par l'expression $(a + b)^*(ab + ba)^\omega$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'automate déterministe pour ce langage.
3. On considère un automate fini déterministe $\mathcal{A}$ qui reconnaît le langage rationnel $L \subseteq \Sigma^*$. Quel est le langage de mots infinis reconnu par l'automate de Büchi déterministe associé à $\mathcal{A}$?

2.2 Calcul du complément

Soit l'alphabet $\Sigma_n = \{1, 2, \ldots, n, \#\}$ et le langage L_n de Σ_n^ω défini par l'automate de Büchi suivant (notez les transitions bidirectionnelles) :



On cherche à prouver que le complément de L_n dans Σ_n^ω ne peut pas être reconnu par un automate de Büchi ayant moins de $n!$ états.

1. Soit $a_1 \ldots a_k$ un mot fini de $\{1, \ldots, n\}^*$. Montrer que tout mot infini du langage décrit par $(\Sigma_n^* a_1 a_2 \Sigma_n^* a_2 a_3 \Sigma_n^* \ldots \Sigma_n^* a_{k-1} a_k \Sigma_n^* a_k a_1)^\omega$ est aussi dans L_n.
2. Soit $(i_1, \ldots, i_n)$ une permutation des éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que le mot infini $(i_1 \ldots i_n \#)^\omega$ n'est pas dans L_n.
3. On considère $(i_1, \ldots, i_n)$ et $(j_1, \ldots, j_n)$ deux permutations différentes de $\{1, \ldots, n\}$. Les mots infinis $\rho = (i_1 \ldots i_n \#)^\omega$ et $\sigma = (j_1 \ldots j_n \#)^\omega$ sont reconnus par tout automate de Büchi $\mathcal{B}$ qui reconnaît le complémentaire de L_n. Montrer que si ρ boucle finalement dans un sous-ensemble R et σ dans un sous-ensemble S des états de $\mathcal{B}$, alors R et S sont disjoints.
4. Conclure.

3 De LTL aux automates de Büchi

On considère à nouveau l'énoncé « il est impossible d'obtenir deux '1' successifs en sortie » donné dans le premier exercice.

1. Donnez un automate de Büchi qui vérifie cet énoncé (et non son complément).
2. Utilisez l'algorithme vu en cours pour construire un automate de Büchi pour la formule LTL trouvée pour cet énoncé.
3. On considère l'opération G sur des langages finis ou infinis, qui vérifie que tout suffixe d'un mot de $\mathsf{G}L$ est un mot de L. Si L nous est fourni sous la forme d'un automate fini (resp. un automate de Büchi), comment construire un automate fini (resp. un automate de Büchi) qui reconnaît $\mathsf{G}L$?