TD 12 : Automates alternants

Pour un ensemble d'éléments Q, on note $\mathbb{B}^+(Q)$ les formules booléennes positives non vides d'éléments de Q, par exemple une formule $p \wedge (q \vee r)$. On note $P \models \varphi$ si la valuation qui associe vrai aux éléments de P et faux aux éléments de $Q \backslash P$ satisfait φ.

Un *automate alternant* est un tuple $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F, R \rangle$ où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un alphabet fini,
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathbb{B}^+(Q)$ est une fonction partielle de transition alternante,
- $I \in \mathbb{B}^+(Q)$ est la condition initiale,
- $F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finals,
- $R \subseteq Q$ est un ensemble d'états répétés.

Une exécution de $\mathcal{A}$ sur un mot w est une forêt $t \subseteq \mathbb{N}^+$ étiquetée par des états de Q par $e : \mathbb{N}^+ \to Q$. L'ensemble $\mathbb{N} \cap t$ constitue l'ensemble des racines de la forêt. Pour un nœud $x \in \mathbb{N}^+$ d'une forêt t, l'ensemble de ses nœuds fils $x0$, $x1$, etc. est noté $\text{Fils}(x) = \{xi \in t \mid i \in \mathbb{N}\}$. Si $xi \in t$ pour $x \in \mathbb{N}^+$ et $i \in \mathbb{N}$, alors $x \in t$, et si de plus $i > 0$, alors $x(i-1) \in t$.

La forêt étiquetée (t, e) pour $w = s_0 s_1 \cdots \in \Sigma^\infty$ est alors telle que

- l'ensemble des racines $\mathbb{N} \cap t$ satisfait la condition initiale I,
- chaque nœud satisfait la relation de transition : pour tout nœud x à la profondeur $n \leq |w|$ (c'est-à-dire tel que $|x| = n + 1$), $e(\text{Fils}(x)) \models \delta(e(x), s_n)$.

Si w est fini, alors l'exécution accepte w ssi chaque feuille x de t vérifie $e(x) \in F$. Dans le cas d'un mot infini, on exige que chaque branche infinie visite R infiniment souvent.

1 Non déterminisme et alternation

1. Montrer que, pour tout automate $\mathcal{A}$ fini (resp. de Büchi), il existe un automate alternant $\mathcal{A}'$ équivalent de taille $O(|\mathcal{A}|)$.
2. Donner une caractérisation des exécutions finies sur $w = s_0 \dots s_n$ d'un automate alternant qui utilise une séquence $P_1 \dots P_{n+1}$ de sous-ensembles de Q.
3. Montrer que, pour tout automate alternant fini $\mathcal{A}$, il existe un automate fini $\mathcal{A}'$ équivalent. Quelle est la taille de l'automate obtenu ?
4. Montrer que, pour tout automate fini $\mathcal{A}$, il existe un automate alternant fini de taille $O(|\mathcal{A}|)$ pour le complémentaire de $L(\mathcal{A})$.
5. Montrer que le problème du vide des automates alternants finis est PSPACE-complet.

2 LTL vers automates alternants

1. Proposer une traduction d'une formule LTL(XU) φ en forme normale négative vers un automate alternant de Büchi ayant pour états $\perp$, $\top$, et les sous-formules de φ

de la forme a, $\neg a$, $\psi_1 \,\mathsf{XU}\, \psi_2$ et $\psi_1 \,\mathsf{XR}\, \psi_2$. Quelle est la taille de l'automate alternant obtenu ?

2. Montrer que l'automate obtenu est *très faible* : un automate alternant est très faible s'il existe un ordre $\leq$ sur Q tel que, pour tous p, q de Q et a de Σ, si q apparaît dans $\delta(p, a)$, alors $q \leq p$.
3. Montrer que, si $\mathcal{A}$ est un automate alternant très faible, alors l'automate de Büchi généralisé $\mathcal{A}' = \langle Q', \Sigma, \delta', I', \mathcal{T} \rangle$ avec
   – $Q' = 2^Q$ pour ensemble d'états,
   – $\delta' = \{(P, a, P') \mid \forall q \in P, P' \models \delta(q, a)\}$ comme relation de transition,
   – $I' = \{P \subseteq Q \mid P \models I\}$ comme ensemble initial, et
   – $\mathcal{T} = \{T_q \mid q \in Q \backslash R\}$ comme ensemble de conditions d'acceptation, avec $T_q = \{(P, a, P') \mid q \notin P \vee P' \backslash \{q\} \models \delta(q, a)\}$,
   est tel que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.