

TD 11 : Logique sur les mots finis

Exercice 1 (Langages apériodiques). Pour chacun des langages suivants, déterminer s'il est apériodique ou non :

1. $(a(ab)^*b)^*$,
2. $(ab + ba)^*$,
3. $((a + cb^*a)c^*b)^*$.

Exercice 2 (Clôture transitive monadique). On étend la syntaxe de FO avec un opérateur de clôture transitive monadique " $x [\text{MTC}_{u,v}\psi(u,v)] y$ ", où x, y, u, v sont des variables du premier ordre et $\psi(u, v)$ est une formule FO avec deux variables libres. La sémantique d'une telle formule dépend de la relation définie par $\psi(u, v)$: pour $w \in \Sigma^+$ et σ une valuation, on définit $R_{\psi(u,v)} \subseteq \text{pos}(w) \times \text{pos}(w)$ comme la relation

$$R_{\psi(u,v)} = \{(i, j) \mid w, \sigma[u \mapsto i, v \mapsto j] \models \psi(u, v)\}.$$

On peut alors définir la sémantique de MTC :

$$w, \sigma \models x [\text{MTC}_{u,v}\psi(u,v)] y \text{ si } (x, y) \in R_{\psi(u,v)}^+.$$

Montrer que toute formule de la logique FO+MTC est exprimable en MSO.

Exercice 3 (*Model-checking* MSO). Montrer que le problème suivant, dit de *model-checking* pour MSO sur les mots finis, est PSPACE-complet :

entrée une formule $\varphi \in \text{MSO}(\Sigma, <)$ et un mot fini $w \in \Sigma^*$

question est-ce qu'il existe une valuation σ des variables libres de φ telle que $w, \sigma \models \varphi$?