TD 8

Exercice 1. Familles dirigées :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à valeurs dans un ensemble ordonné $(X, \leq)$. Montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille dirigée.
2. En déduire que pour toute fonction monotone $f : X \to X$, $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est dirigée

Exercice 2. Soit $(D, \leq)$ un DCPO. Une partie $O \subseteq D$ est appellée un *ouvert de Scott* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

— O est clos vers le haut : si $x \in O$ et $y \geq x$, alors $y \in O$;

— O est « inaccessible » par les sups : si E est une partie dirigée et si $\sup E \in O$, alors $E \cap O \neq \emptyset$.

1. Montrer que l'ensemble des ouverts est clos par unions quelconques et par intersections finies (et donc qu'on a bien défini une topologie, appelée *topologie de Scott*).
2. On note $\downarrow x$ l'ensemble des $y \leq x$. Montrer que $\downarrow x$ est un fermé (le complémentaire d'un ouvert). Montrer qu'un ensemble fermé F est clos vers le bas (si $y \in F$ et $x \leq y$ alors $x \in F$) et clos par suprema dirigés (si $E \subseteq F$ est dirigée alors $\sup E \in F$).
3. On rappelle la définition vue en cours : une fonction $f : D_1 \to D_2$ entre deux DCPO est *Scott continue* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
   — f est monotone,
   — pour toute partie dirigée $X \subseteq D_1$, $\sup f(X) = f(\sup X)$
   On rappelle aussi qu'une fonction $f : D_1 \to D_2$ entre deux espaces topologiques est *continue* si pour tout ouvert O de D_2, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de D_1 (ou de manière équivalente, l'image inverse d'un fermé est un fermé).
   Montrer qu'une fonction est Scott continue si et seulement si elle est continue pour la topologie de Scott.

Exercice 3. On considère $\mathbf{Bool}_\bot = \{0, 1, \bot\}$ ordonné comme précédement.

1. Montrez que $\mathbf{Bool}_\bot$ est un DCPO pointé. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbf{Bool}_\bot$? Les fermés ?
3. Exhibez toutes les fonctions monotones de $\mathbf{Bool}_\bot$ dans $\mathbf{Bool}_\bot$.
4. Soit D un DCPO, et f une fonction monotone de $\mathbf{Bool}_\bot$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.
5. Dessinez $\mathbf{Bool}_\bot \times \mathbf{Bool}_\bot$ (ordre produit).
6. Énumérez les fonctions Scott continues f telle que f restreinte à $\{0, 1\}$ définit la fonction booléenne « ou ».
7. En voyant $\bot$ comme « un calcul divergent », donnez une interprétation calculatoire de chacun des prolongements à $\mathbf{Bool}_\bot$ de la fonction booléenne « ou ».

Exercice 4. Soit $S = \{0, 1\}^\infty = \{0, 1\}^* \cup \{0, 1\}^\omega$, avec l'ordre préfixe.

1. Montrez que S est un DCPO. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les éléments maximaux de S ?
3. Soit f une fonction de S dans $\mathbf{Bool}_\bot$ telle que :

$$\forall s \in \{0,1\}^\omega \begin{cases} f(s) = 1 & \text{si } s \text{ contient le facteur } 0 \cdot 1 \\ f(s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrez que f n'est pas Scott-continue. Intuition ?

Exercice 5. On considère maintenant l'ensemble ordonné $\mathbb{N}_\perp$ muni de l'ordre $\perp \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que $\mathbb{N}_\perp$ est un DCPO pointé. Est-ce un treillis ?
2. Quels sont les ouverts de Scott de $\mathbb{N}_\perp$? Les fermés ?
3. Quelles sont les fonctions Scott-continues de $\mathbf{Bool}_\perp$ dans $\mathbb{N}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans $\mathbf{Bool}_\perp$? De $\mathbb{N}_\perp$ dans lui même ?
4. Soit D un DCPO, et f une fonction monotone de $\mathbb{N}_\perp$ dans D. Montrez que f est Scott-continue.

Exercice 6. Soit $(D, \leq)$ un DCPO. Un élément x de D est dit *fini* si, pour toute famille dirigée $E \subseteq D$ avec $\sup E \geq x$, il existe $y \in E$ tel que $y \geq x$.

1. Soit A un ensemble et $\mathbb{P}(A)$ l'ensemble de ses parties. Quels sont les éléments finis de $(\mathbb{P}(A), \subseteq)$?
2. Soit Σ un alphabet fini et Σ^∞ l'ensemble des mots finis ou infinis sur Σ. Quels sont les éléments finis de $(\Sigma^\infty, \leq_{\text{pref}})$ (où $\leq_{\text{pref}}$ dénote l'ordre préfixe) ?
3. Dans chacun des deux cas précédents, montrer que pour tout $y \in D$, il existe une famille dirigée E ne contenant que des éléments finis telle que $\sup E = y$.