INTRODUCTION À LA LOGIQUE INFORMATIQUE

SYLVAIN SCHMITZ

Université de Paris, France

Contenu des notes

Ce cours résulte cette année d'une fusion entre les cours « outils logiques » et « logique » des années précédentes. Le cours de cette année 2019–2020 vise à donner une version allégée de ces deux cours, avec pour programme général :

- *Calcul propositionnel : syntaxe et sémantique. Tables de vérité, tautologies. Formes normales, forme clausale. Modélisation, solveurs SAT, recherche de modèles, algorithme DPLL. Recherche de preuve, calcul des séquents.*
- *Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique. Formes normales, skolémisation. Modélisation, solveurs SMT. Recherche de preuve, calcul des séquents.*

Les (sous-)sections dont le titre est précédé d'une astérisque « * » et grisées dans le texte apportent des compléments qui ne seront pas traités en cours.

Références 115

Ces notes de cours ne remplacent pas une lecture approfondie d'ouvrages. Je recommande particulièrement le livre de Jacques Duparc (2015) pour débuter. Le livre de John Harrisson (2009) se concentre plutôt sur le raisonnement automatique et illustre tous ses concepts par du code OCaml, ce qui correspond à l'approche quelque peu « utilitariste » que j'adopte dans ces notes. Pour aller plus loin, les livres de Jean Goubault-Larrecq et Ian Mackie (1997) et de René David, Karim Nour et Christophe Raffalli (2003) sont de bonnes références.

Une partie de ces notes est inspirée des notes de cours du « MOOC » *Introduction à la logique informatique* par David Baelde, Hubert Comon et Étienne Lozes [1], ainsi que des transparents du cours de *Logique* de Delia Kesner [2], des notes du cours *Outils logiques* de Ralf Treinen [3] et celles de Roberto Amadio [4].

1. Voir les pages https://www.fun-mooc.fr/courses/ENSCachan/20004S02/session02/about et https://www.fun-mooc.fr/courses/ENSCachan/20009/session01/about
2. https://www.irif.fr/~kesner/enseignement/licence/logique/
3. https://www.irif.fr/~kesner/enseignement/o13/poly.pdf
4. https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00163821

Partie 1. Introduction

> La logique, du grec λογική / logikê, est un terme dérivé de λόγος / lógos — signifiant à la fois « raison », « langage » et « raisonnement » — est, dans une première approche, l'étude des règles formelles que doit respecter toute argumentation correcte.
>
> Elle est depuis l'Antiquité l'une des grandes disciplines de la philosophie [...]. En outre, on a assisté depuis le XIXe siècle au développement fulgurant d'une approche mathématique de la logique. Sa convergence opérée avec l'informatique depuis la fin du XXe siècle lui a donné un regain de vitalité. [5]

1. Contexte et motivations

1.1. **Logique philosophique.** La motivation des philosophes antiques comme Aristote est de déterminer si un raisonnement est concluant. Par exemple, le raisonnement suivant est concluant : « Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel » ; en effet,

(1) d'une part les deux prémisses « Tous les humains sont mortels » et « Socrate est humain » sont vraies, et

(2) d'autre part, l'inférence de la conclusion « Socrate est mortel » à partir des prémisses est valide.

Les deux ingrédients (1) et (2) ci-dessus d'un raisonnement concluant sont indépendants. Ainsi,

— « Toutes les souris sont vertes, or Yoda est une souris, donc Yoda est vert » est un raisonnement valide mais non concluant car au moins une prémisse est fausse, tandis que

— « Tous les humains sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est humain » n'est pas concluant car l'inférence n'est pas valide – on parle alors de raisonnement fallacieux ou de *non sequitur*.

Remarquons en passant que les conclusions de ces deux raisonnements non concluants sont bien vraies : nous examinons ici le raisonnement, et non sa conclusion.

La logique s'intéresse à l'ingrédient (2) ci-dessus, c'est-à-dire à formaliser ce qui constitue un raisonnement valide. En termes modernes, on écrirait de nos jours une *formule* logique dans un langage formel, par exemple en logique du premier ordre :

$$\big((\forall x\,.\,H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)\big) \Rightarrow M(s) \tag{1}$$

où « $H(x)$ » et « $M(x)$ » dénotent respectivement que x est humain et que x est mortel, et « s » dénote Socrate ; cette formule est bien valide.

Ceci ne constitue qu'un minuscule aperçu de la logique en tant que discipline philosophique, qui est un sujet actif de recherche ; d'ailleurs, une excellente source d'information en logique est la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [6].

1.2. **Logique mathématique.** La nécessité d'employer un langage clair, à l'abri d'ambiguïtés, pour écrire et démontrer des énoncés mathématiques est reconnue depuis l'Antiquité et par exemple la géométrie d'Euclide. La logique en tant que discipline mathématique prend son essor au XIXe siècle grâce aux travaux de mathématiciens tels que Boole, de Morgan et Frege.

Cela amène à la « crise des fondements » de la fin du XIXe siècle, quand des paradoxes remettent en question l'utilisation naïve des ensembles. Une version vulgarisée d'un de ces paradoxes, due à Russell, est connue comme le *paradoxe du barbier* : imaginons une ville où un barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes (et seulement ceux-là) ; est-ce que ce barbier se rase lui-même ? Si l'on suppose que ce barbier soit un homme, que la réponse soit

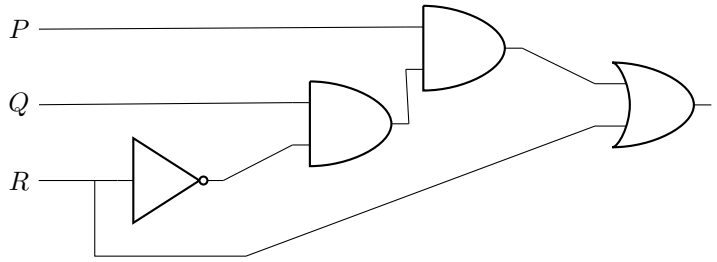
5. Article *Logique* de Wikipédia en français.
6. https://plato.stanford.edu/

oui ou non, on aboutit à une contradiction : ce barbier n'existe pas. La version ensembliste du paradoxe est la suivante : on définit $y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin x\}$ la classe des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes ; est-ce que $y \in y$? Si l'on suppose que y est un ensemble, on aboutit à la contradiction $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$. Le XXe siècle voit ainsi plusieurs tentatives pour formaliser la logique et les mathématiques, mais les limitations de ces approches apparaîtront bientôt grâce à Gödel, Turing et Church – vous en apprendrez plus en M1 en cours de « calculabilité et complexité ».

1.3. **Logique informatique.** Tout comme la logique permet de formaliser les énoncés mathématiques (en voyant ces énoncés comme des formules de la logique), on peut comprendre l'informatique via le prisme de la logique. Cette vision de l'informatique est incroyablement fructueuse. Un lien formel très fort existe en particulier entre programmes du côté informatique et preuves du côté logique – ceci est connu comme l'*isomorphisme de Curry-Howard* – qui se retrouve au cœur du fonctionnement d'assistants de preuve comme Coq ; vous pourrez en apprendre plus dans le cours de M1 de « preuves assistées par ordinateur » ou dans les cours sur la logique linéaire ou la théorie des types au MPRI.

Le point de vue de ce cours est cependant plutôt de voir la logique via le prisme de l'informatique. Les formules de la logique sont des objets très simples d'un point de vue informatique, à savoir des arbres. Les formules peuvent être manipulées par des programmes pour résoudre *automatiquement* quantité de problèmes.

1.3.1. *Circuits logiques.* Les circuits logiques qui composent les processeurs de nos ordinateurs sont des réalisations matérielles des formules de la logique propositionnelle. Par exemple, le circuit ci-dessous représente la formule propositionnelle $(P \wedge (Q \wedge \neg R)) \vee R$.



Raisonner sur les formules de la logique propositionnelle permet ainsi de raisonner sur les circuits : déterminer leur fonctionnalité, dire si deux circuits sont équivalents, minimiser la taille d'un circuit, etc. Ce sujet sera approfondi en M1 dans le cours de « circuits et architecture ».

1.3.2. *Complexité algorithmique.* En cours de M1 de « calculabilité et complexité », vous apprendrez que des problèmes logiques fournissent les exemples emblématiques de problèmes informatiques difficiles : SAT, la satisfiabilité des formules propositionnelles, est complet pour une classe de complexité appelée NP, et il en est de même pour d'autres classes de complexité (c.f. table 1).

Table 1. Complexité algorithmique de quelques problèmes de logique.

Problème	Complexité
QBF	PSPACE
SAT	NP
HornSAT	P
2SAT	NL

1.3.3. *Problèmes « combinatoires ».* Le point précédent signifie que quantité de problèmes informatiques peuvent être résolus en les *réduisant* à des problèmes logiques. L'intérêt est que nous disposons de logiciels extrêmement optimisés pour résoudre ces problèmes logiques, en particulier des *solveurs* SAT [7]. On parle même de « révolution SAT » les performances actuelles de ces solveurs permettent de résoudre des problèmes qui paraissaient hors de portée.

En guise d'illustration, nous verrons entre autres comment résoudre des grilles de sudoku comme celle ci-dessous en faisant appel à un solveur SAT. [8]

					3		8	5
		1		2				
			5		7			
		4				1		
	9							
5							7	3
		2		1				
				4				9

9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	4	6	1	7	3	9	8	5
3	5	1	9	2	8	7	4	6
1	2	8	5	3	7	6	9	4
6	3	4	8	9	2	1	5	7
7	9	5	4	6	1	8	3	2
5	1	9	2	8	6	4	7	3
4	7	2	3	1	9	5	6	8
8	6	3	7	4	5	2	1	9

1.3.4. *Programmation logique.* Dans la lignée du point précédent, le besoin en informatique de résoudre des problèmes qui peuvent s'exprimer sous la forme de contraintes (par exemple pour le sudoku, chaque ligne, colonne, et chacun des carrés 3×3 doit avoir exactement une occurrence de chaque nombre de 1 à 9) est tel que des langages de programmation spécialisés ont été développés. Dans un langage comme Prolog ou Mozart/Oz, le programmeur fournit les contraintes du problème, et laisse le système trouver les valeurs des inconnues qui répondent au problème. Ce paradigme de programmation, différent de la programmation impérative et de la programmation fonctionnelle, sera étudié dans le cours de M1 « programmation logique et par contraintes ».

1.3.5. *Bases de données.* Comme aperçu en cours de bases de données, le théorème de Codd relie les opérations que l'on peut effectuer sur une base de données relationnelle (l'algèbre relationnelle) aux requêtes que l'ont peut écrire (le calcul relationnel, c'est-à-dire la logique du premier ordre). Le langage SQL fournit une autre façon d'écrire des requêtes du calcul relationnel ; par exemple, la requête

```
SELECT Vols.depart
FROM Vols JOIN Aeroports ON Vols.arrivee = Aeroports.nom
WHERE Aeroports.pays = 'FR'
```

pourrait s'écrire comme une formule $\varphi(d)$ en logique du premier ordre, définie comme :

$$\varphi(d) \stackrel{\text{def}}{=} \exists a \exists n \exists p \,.\, V(d,a) \wedge A(n,p) \wedge a = n \wedge p = \text{'FR'} \tag{2}$$

Répondre à une telle requête SQL sur une base de données D revient à évaluer la formule sur la structure associée à D. De même, optimiser les requêtes SQL se traduit en des transformations de formules.

1.3.6. *Vérification de programmes.* Les programmes et systèmes informatiques sont sujets à quantité d'erreurs. Une façon de s'assurer qu'ils ont bien le fonctionnement voulu est d'écrire une *spécification* formelle du comportement attendu ; naturellement, ces spécifications sont écrites à l'aide de formules logiques. Par exemple, si on examine les événements successifs d'un système

7. Par exemple, MiniSat (http://minisat.se/), Glucose (https://www.labri.fr/perso/lsimon/glucose/) ou Sat4j (http://www.sat4j.org/) ; vous pouvez aussi tester logictools en ligne (http://logictools.org/).

8. Voir par exemple https://blag.cedeela.fr/sudoku-msat/ pour une démonstration en ligne.

composé d'un client et d'un serveur, on pourrait vérifier qu'à chaque instant t où le client fait une requête ($R(t)$), il y a un instant t' plus tard où le serveur accède à la demande ($A(t')$) ; en logique du premier ordre,

$$\forall t \,.\, R(t) \Rightarrow \exists t' \,.\, t \leq t' \wedge A(t') \tag{3}$$

Ce genre de spécifications sera étudié dans le cours « modélisation et spécification », où vous verrez aussi comment d'assurer automatiquement qu'un système satisfait sa spécification.

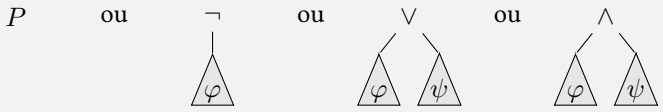
Partie 2. Logique classique propositionnelle

Il existe quantité de logiques employées en informatique, mathématiques et philosophie. La logique la plus simple, qui sert de base aux développement de la plupart des autres logiques, est la logique propositionnelle, aussi appelée « calcul des propositions ». Dans cette logique, une « proposition » dénote un énoncé qui peut être vrai ou faux, comme « il pleut aujourd'hui » ou « $1 + 1 = 2$ ». La logique propositionnelle permet de combiner de telles propositions, traitées comme des « variables propositionnelles », au moyen de connecteurs logiques pour construire des énoncés plus complexes appelés « formules ». Cette logique est aussi celle employée dans les solveurs SAT, qui permettent de résoudre en pratique des problèmes informatiques difficiles en les encodant comme des formules propositionnelles.

Commençons, afin de fixer les notations employées dans ces notes, par définir la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle.

2. Syntaxe

Résumé. Étant donné un ensemble dénombrable $\mathcal{P}_0$ de *propositions*, les formules propositionnelles sont des arbres dont les feuilles sont des propositions et les nœuds internes des connecteurs logiques. Ainsi, une *formule propositionnelle* est un arbre de la forme



où $P \in \mathcal{P}_0$ et φ et ψ sont des formules propositionnelles.

2.1. **Arbres de syntaxe abstraite.** Soit $\mathcal{P}_0$ un ensemble infini dénombrable de symboles de propositions (aussi appelés « variables propositionnelles »). La syntaxe de la logique propositionnelle est définie par la syntaxe abstraite

(Duparc, 2015, sec. 1.2), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 1.2.6), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 2.1), (Harrisson, 2009, sec. 2.1)

$$\varphi ::= P \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \qquad \text{(formules propositionnelles)}$$

où $P \in \mathcal{P}_0$.

Concrètement, cela signifie qu'une formule propositionnelle est un *arbre* fini, dont les feuilles sont étiquetées par des propositions tirées de $\mathcal{P}_0$, et dont les nœuds internes sont étiquetés soit par $\neg$ (pour « non ») et ont exactement un nœud enfant, soit par $\vee$ (pour « ou ») ou $\wedge$ (pour « et ») et ont exactement deux nœuds enfants. Par exemple, la figure 1 décrit une formule propositionnelle φ_{ex} où P et Q sont des propositions de $\mathcal{P}_0$.

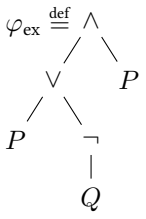


Figure 1. Une formule propositionnelle.

L'intérêt de travailler avec des arbres de syntaxe abstraite est que ceux-ci se prêtent très bien aux définitions et aux algorithmes par récurrence. Par exemple, on peut définir l'ensemble

$\mathcal{P}_0(\varphi) \subseteq \mathcal{P}_0$ des propositions qui apparaissent au moins une fois dans une formule propositionnelle φ :

$$\mathcal{P}_0(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{P\}\,, \qquad \mathcal{P}_0(\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0(\varphi)\,,$$
$$\mathcal{P}_0(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0(\varphi) \cup \mathcal{P}_0(\psi) \qquad \mathcal{P}_0(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}_0(\varphi) \cup \mathcal{P}_0(\psi).$$

Dans l'exemple de la figure 1, $\mathcal{P}_0(\varphi_{\text{ex}}) = \{P, Q\}$.

2.1.1. *Représentation en Java.* On peut représenter les formules propositionnelles en Java de manière naturelle à l'aide d'une classe abstraite et de sous-classes pour chacun des types de nœuds comme ci-dessous. À noter que l'on utilise ici l'ensemble des objets de type `String` en guise d'ensemble de propositions $\mathcal{P}_0$.

Formule
```
public abstract class Formule {
    // sous-classes
    public static class Et extends Formule {
        protected Formule phi1; // sous-formule gauche
        protected Formule phi2; // sous-formule droite
        public Et (Formule phi1, Formule phi2) {
            this.phi1 = phi1;
            this.phi2 = phi2;
        }
        // méthodes pour formules ∧
        // ⋮
    }
    public static class Ou extends Formule {
        protected Formule phi1; // sous-formule gauche
        protected Formule phi2; // sous-formule droite
        public Ou (Formule phi1, Formule phi2) {
            this.phi1 = phi1;
            this.phi2 = phi2;
        }
        // méthodes pour formules ∨
        // ⋮
    }
    public static class Non extends Formule {
        protected Formule phi1; // sous-formule
        public Non (Formule phi1) {
            this.phi1 = phi1;
        }
        // méthodes pour formules ¬
        // ⋮
    }
    public static class Proposition extends Formule {
        protected String nom; // nom de la proposition
        public Proposition (String nom) {
            this.nom = nom;
        }
        // méthodes pour propositions
        // ⋮
    }
    // méthodes de la classe abstraite
    // ⋮
}
```

Avec ce code, on peut construire la formule propositionnelle de la figure 1 par

```
Formule phi = new Et
    (new Ou
         (new Proposition("P"),
          new Non(new Proposition("Q"))),
     new Proposition("Q"));
```

Les choses se gâtent quelque peu quand on souhaite implémenter des méthodes sur les formules propositionnelles. Par exemple, pour calculer l'ensemble $\mathcal{P}_0(\varphi)$, l'idée naturelle est d'importer `java.util.*`, de déclarer une méthode abstraite de la classe `Formule`

Formule
```
public abstract Set<String> getPropositions();
```

et de l'implémenter dans chacune des sous-classes. Par exemple :

Formule.Et, Formule.Ou
```
public Set<String> getPropositions() {
    Set<String> propositions = phi1.getPropositions();
    propositions.addAll(phi2.getPropositions());
    return propositions;
}
```
Formule.Non
```
public Set<String> getPropositions() {
    return phi1.getPropositions();
}
```
Formule.Proposition
```
public Set<String> getPropositions() {
    Set<String> propositions = new TreeSet<String>();
    propositions.add(nom);
    return propositions;
}
```

On voit là un défaut de notre représentation Java, qui disperse le code des différents cas dans plusieurs locations des fichiers sources.

2.1.2. *Représentation en OCaml.* Un autre de langage de programmation que vous allez découvrir cette année dans le cours de « programmation fonctionnelle » est OCaml. Ce langage s'avère bien mieux adapté au style de programmes que l'ont souhaite écrire en logique. Par exemple, les formules propositionnelles peuvent utiliser le type abstrait ci-dessous (on utilise ici l'ensemble des chaînes de caractères comme ensemble de propositions $\mathcal{P}_0$).

```
type formule = Proposition of string
             | Non of formule
             | Et  of formule * formule
             | Ou  of formule * formule
```

La formule propositionnelle de la figure 1 se construit par

```
let phi = Et (Ou (Proposition "P", Non (Proposition "Q")),
              Proposition "P")
```

Écrire des programmes récursifs en OCaml sur une telle représentation est très aisé. Voici par exemple un programme qui calcule $\mathcal{P}_0(\varphi)$ (en utilisant une fonction auxiliaire `enleve_duplicats` de type `'a list -> 'a list` qui retourne une liste sans duplicats) :

```
let rec liste_propositions = function
  | Proposition p   -> [p]
  | Non phi         -> liste_propositions phi
  | Et (phi1, phi2) -> liste_propositions phi1 @ liste_propositions phi2
  | Ou (phi1, phi2) -> liste_propositions phi1 @ liste_propositions phi2
let propositions phi = enleve_duplicats (liste_propositions phi)
```

(Duparc, 2015, sec. 1.4)

2.2. **Syntaxe concrète.** Cependant, dessiner des arbres à chaque fois que l'on veut écrire une formule propositionnelle est plutôt laborieux. On utilise plutôt une écriture « linéaire » en introduisant des parenthèses de manière judicieuse. Par exemple, la formule propositionnelle de la figure 1 s'écrit $\varphi_{\text{ex}} \stackrel{\text{def}}{=} ((P \vee \neg Q) \wedge P)$. On se permet généralement des facilités d'écritures, comme $(P \vee \neg Q) \wedge P$ pour φ_{ex} – où l'on a enlevé les parenthèses extérieures –, ou $P \wedge Q \wedge R$ pour $((P \wedge Q) \wedge R)$ ou $(P \wedge (Q \wedge R))$ – car les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs (voir section 4).

La syntaxe concrète d'une formule propositionnelle s'implémente très aisément par un programme récursif ; par exemple, en OCaml :

```
let rec string_of_formule phi =
  match phi with
  | Proposition p   -> p
  | Non phi1        -> "¬" ^ string_of_formule phi1
  | Et (phi1, phi2) ->
    "(" ^ string_of_formule phi1 ^ " ⊠ " ^ string_of_formule phi2 ^ ")"
  | Ou (phi1, phi2) ->
    "(" ^ string_of_formule phi1 ^ " ⊠ " ^ string_of_formule phi2 ^ ")"
```

3. Sémantique

Résumé. Soit $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bot, \top\}$ l'ensemble des *valeurs de vérité*, où $\bot$ désigne « faux » et $\top$ désigne « vrai ». Étant donnée une *interprétation* $I : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{B}$, la *sémantique* $[\![\varphi]\!]^I$ d'une formule propositionnelle est une valeur de vérité, qui ne dépend en réalité que des propositions qui apparaissent dans φ (propriété 3.3). On note « $I \vDash \varphi$ » si $[\![\varphi]\!]^I = \top$.

Ainsi, on peut aussi voir $[\![\varphi]\!]$ comme une *fonction booléenne* qui prend en argument les valeurs de vérité de ses propositions et retourne une valeur de vérité, et pour laquelle on peut écrire une *tables de vérité*. Inversement, pour toute fonction booléenne f, il existe une formule propositionnelle φ telle que $f = [\![\varphi]\!]$ (théorème 3.8 de complétude fonctionnelle).

Une formule propositionnelle φ est *satisfiable* s'il existe une interprétation I telle que $[\![\varphi]\!]^I = \top$. Elle est *valide* (noté « $\vDash \varphi$ ») si pour toute interprétation I, on a $[\![\varphi]\!]^I = \top$.

3.1. **Valeurs de vérité.** On note $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bot, \top\}$ pour l'ensemble des *valeurs de vérité* : l'intuition est que $\top$ dénote la valeur « vrai » et $\bot$ la valeur « faux ». On définit aussi trois opérations $\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ et $\wedge, \vee : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ définies par $\neg\top = \bot \vee \bot = \bot \wedge \bot = \top \wedge \bot = \bot \wedge \top = \bot$ et $\neg\bot = \top \vee \top = \top \vee \bot = \bot \vee \top = \top \wedge \top = \top$ (voir la table 2). On appelle aussi $\mathbb{B}$ muni des trois opérations $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ « l'algèbre de Boole ».

⚠ *On réutilise ici les symboles $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ de la syntaxe des formules propositionnelles pour dénoter des* fonctions *sur les valeurs de vérité ; ces noms de fonctions sont bleutés afin de les distinguer.*

(Duparc, 2015, sec. 2.3)

Remarque 3.1. En français, le mot « ou » est ambigu, dans la mesure où il peut être compris de manière *inclusive* (A ou B ou les deux) ou *exclusive* (A ou B mais pas les deux). Dans l'usage courant, les deux cas A et B sont souvent implicitement exclusifs (« Je me lève à sept ou huit heures selon les jours »). Le « $\vee$ » logique est en revanche inclusif.

(Duparc, 2015, sec. 2.1)

3.1.1. *Interprétations.* Une *interprétation* est une fonction (aussi appelée une « valuation propositionnelle ») $I : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{B}$ qui associe une valeur de vérité $P^I \in \mathbb{B}$ pour chaque proposition $P \in \mathcal{P}_0$. Si I est une interprétation et P est une proposition, on écrit $I[\top/P]$ (resp. $I[\bot/P]$) pour l'interprétation qui associe $\top$ à P (resp. $\bot$) et Q^I à Q pour tout $Q \neq P$.

💬 *On peut aussi voir une interprétation comme un sous-ensemble $I \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{P}_0 \mid P^I = \top\}$ de propositions dans $2^{\mathcal{P}_0}$; les deux points de vue sont bien sûr équivalents.*

3.1.2. *Sémantique.* La sémantique $[\![\varphi]\!]^I \in \mathbb{B}$ d'une formule propositionnelle φ dans une interprétation I est définie inductivement par

(Duparc, 2015, sec. 2.2), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, def. 2.8), (Harrisson, 2009, sec. 2.2)

$$[\![P]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} P^I \ , \quad [\![\neg\varphi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} \neg[\![\varphi]\!]^I \ , \quad [\![\varphi \vee \psi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \vee [\![\psi]\!]^I \ , \quad [\![\varphi \wedge \psi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \wedge [\![\psi]\!]^I \ .$$

On dit que I *satisfait* φ (ou que I est un « modèle » de φ), noté $I \vDash \varphi$, si $[\![\varphi]\!]^I = \top$; cette écriture peut être définie de manière équivalente par

$$\begin{aligned}
&I \vDash P && \text{si } P \in I \ , \\
&I \vDash \neg\varphi && \text{si } I \nvDash \varphi \ , \\
&I \vDash \varphi \vee \psi && \text{si } I \vDash \varphi \text{ ou } I \vDash \psi \ , \\
&I \vDash \varphi \wedge \psi && \text{si } I \vDash \varphi \text{ et } I \vDash \psi \ .
\end{aligned}$$

On définit aussi $\mathrm{Sat}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{I \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}_0} \mid I \vDash \varphi\}$ l'ensemble des interprétations qui satisfont φ.

On peut aussi définir la sémantique d'une formule propositionnelle via un jeu d'évaluation *; voir (Duparc, 2015, sec. 2.7).*

Exemple 3.2. Considérons à nouveau la formule propositionnelle $\varphi_{\text{ex}} = (P \vee \neg Q) \wedge P$ de la figure 1, et l'interprétation I qui associe $P^I = \bot$ à P, $Q^I = \bot$ à Q, et $R^I = \top$ à toutes les propositions $R \in \mathcal{P}_0$ différentes de P et Q. La sémantique $[\![\varphi_{\text{ex}}]\!]^I$ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
[\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]^I &= [\![P \vee \neg Q]\!]^I \wedge [\![P]\!]^I \\
&= ([\![P]\!]^I \vee [\![\neg Q]\!]^I) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (P^I \vee [\![\neg Q]\!]^I) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (\bot \vee [\![\neg Q]\!]^I) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (\bot \vee \neg[\![Q]\!]^I) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (\bot \vee \neg Q^I) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (\bot \vee \neg\bot) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= (\bot \vee \top) \wedge [\![P]\!]^I \\
&= \top \wedge [\![P]\!]^I \\
&= \top \wedge P^I \\
&= \top \wedge \bot \\
&= \bot \ .
\end{aligned}$$

À noter que l'on aurait pu atteindre ce résultat bien plus vite en écrivant

$$\begin{aligned}
[\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]^I &= [\![P \vee \neg Q]\!]^I \wedge [\![P]\!]^I \\
&= [\![P \vee \neg Q]\!]^I \wedge P^I \\
&= [\![P \vee \neg Q]\!]^I \wedge \bot \\
&= \bot \ ,
\end{aligned}$$

sans se préoccuper d'évaluer $[\![P \vee \neg Q]\!]^I$.

On peut observer que la valeur de vérité de φ ne dépend que de l'interprétation des propositions de $\mathcal{P}_0(\varphi)$: si $P \notin \mathcal{P}_0(\varphi)$, alors pour toute interprétation I, $[\![\varphi]\!]^{I[\top/P]} = [\![\varphi]\!]^{I[\bot/P]}$. Cela se démontre par induction structurelle sur φ comme suit.

Propriété 3.3. *Pour toute formule propositionnelle φ et interprétations I et I', si $P^I = P^{I'}$ pour toute proposition $P \in \mathcal{P}_0(\varphi)$, alors $[\![\varphi]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I'}$.*

(Harrisson, 2009, thm. 2.2)

Démonstration. Par induction structurelle sur φ.

Pour le cas de base $\varphi = P$, on a $P \in \mathcal{P}_0(\varphi)$ donc $P^I = P^{I'}$ par hypothèse sur I et I', et on a bien

$$[\![P]\!]^I = P^I = P^{I'} = [\![P]\!]^{I'} .$$

Pour l'étape d'induction, si $\varphi = \neg\psi$, on a $\mathcal{P}_0(\varphi) = \mathcal{P}_0(\psi)$, donc $P^I = P^{I'}$ pour toute proposition $P \in \mathcal{P}_0(\psi)$ et on peut appliquer l'hypothèse d'induction à la sous-formule ψ : on a bien

$$[\![\neg\psi]\!]^I = \neg[\![\psi]\!]^I \overset{\text{i.h.}}{=} \neg[\![\psi]\!]^{I'} = [\![\neg\psi]\!]^{I'} .$$

Si $\varphi = \psi \vee \psi'$, on a $\mathcal{P}_0(\varphi) = \mathcal{P}_0(\psi) \cup \mathcal{P}_0(\psi')$, donc $P^I = P^{I'}$ pour toute proposition $P \in \mathcal{P}_0(\psi)$ ou $P \in \mathcal{P}_0(\psi')$ et on peut appliquer l'hypothèse d'induction aux deux sous-formules ψ et ψ' : on a bien

$$[\![\psi \vee \psi']\!]^I = [\![\psi]\!]^I \vee [\![\psi']\!]^I \overset{\text{i.h.}}{=} [\![\psi]\!]^{I'} \vee [\![\psi']\!]^{I'} = [\![\psi \vee \psi']\!]^{I'} .$$

Enfin, le cas où $\varphi = \psi \wedge \psi'$ est similaire au précédent. □

La propriété 3.3 signifie que, pour une interprétation I et une formule propositionnelle φ, seules les valeurs de vérité P^I pour $P \in \mathcal{P}_0(\varphi)$ influencent la sémantique $[\![\varphi]\!]^I$. On pourrait donc aussi employer des interprétations *partielles* $I : \mathcal{P}_0 \nrightarrow \mathbb{B}$ pour peu que leur domaine $\mathrm{dom}(I)$ contienne les propositions de $\mathcal{P}_0(\varphi)$.

Introduisons quelques notations supplémentaires pour ces interprétations partielles. Pour des propositions distinctes $P_1, \ldots, P_n$ et des valeurs de vérité $b_1, \ldots, b_n$, on note $[b_1/P_1, \ldots, b_n/P_n]$ pour l'interprétation partielle de domaine fini $\{P_1, \ldots, P_n\}$ telle que $P_j^{[b_1/P_1,\ldots,b_n/P_n]} \overset{\text{def}}{=} b_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Pour deux interprétations partielles I et I', on dit que I' *étend* I ou que I est la *restriction* de I' à $\mathrm{dom}(I)$, et on écrit $I \sqsubseteq I'$, si $\mathrm{dom}(I) \subseteq \mathrm{dom}(I)'$ et pour toute proposition $P \in \mathrm{dom}(I)$, $P^I = P^{I'}$.

Exemple 3.4. Comme vu dans l'exemple 3.2, on a $[\![\varphi_{\text{ex}}]\!]^I = \bot$ pour toute interprétation I qui étend l'interprétation partielle $[\bot/P, \bot/Q]$.

3.1.3. *Implémentation de la sémantique en Java.* Revenons à notre implémentation des formules propositionnelles en Java commencée en section 2.1.1. Une interprétation I pourrait naturellement être représentée comme un objet de type `Function<String,Boolean>` (du package `java.util.function`). Mais au vu de ce qui précède, nous pouvons nous contenter d'interprétations partielles de domaine fini, qui peuvent être représentées comme des objets de type `Map<String,Boolean>`. L'objectif est donc d'implémenter la méthode abstraite suivante de la classe `Formule` :

```
Formule
public abstract boolean evalue(Map<String,Boolean> interpretation);
```

⚠ *Avec ce code, il faut vérifier que* $\mathcal{P}_0(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(I)$ *avant d'exécuter* `evalue`*, par exemple via une assertion* `interpretation.keySet().containsAll(getPropositions());`

Dans les différentes sous-classes, on pourrait écrire pour cela

```
Formule.Et
public boolean evalue(Map<String,Boolean> interpretation) {
    return phi1.evalue(interpretation)
        && phi2.evalue(interpretation);
}
Formule.Ou
public boolean evalue(Map<String,Boolean> interpretation) {
    return phi1.evalue(interpretation)
        || phi2.evalue(interpretation);
}
```

Formule.Non
```java
public boolean evalue(Map<String,Boolean> interpretation) {
    return !phi1.evalue(interpretation);
}
```
Formule.Proposition
```java
public boolean evalue(Map<String,Boolean> interpretation) {
    return interpretation.get(nom).booleanValue();
}
```

3.1.4. *Implémentation de la sémantique en OCaml.* Revenons maintenant à notre implémentation des formules propositionnelles en OCaml de la section 2.1.2. Dans ce cas, nous verrons une interprétation comme une fonction de type `string -> bool`. Une interprétation partielle de domaine fini peut s'implémenter en levant une exception ; voici un exemple de code pour $[\bot/P, \bot/Q]$:

```
let i = function
    "P" -> false
  | "Q" -> false
  | p -> failwith ("Proposition "^p^" non interpretee")
```

L'évaluation d'une formule propositionnelle se fait récursivement :

```
let rec evalue phi interpretation =
  match phi with
    Et(phi1, phi2) -> (evalue phi1 interpretation)
      && (evalue phi2 interpretation)
  | Ou(phi1, phi2) -> (evalue phi1 interpretation)
      || (evalue phi2 interpretation)
  | Non phi1       -> not (evalue phi1 interpretation)
  | Proposition p  -> interpretation(p)
```

3.1.5. *Tables de vérité.* Les opérateurs $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ sont des *fonctions booléennes*, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ pour un certain $n > 0$. Une façon de présenter de telles fonctions est sous la forme de *tables de vérité*, où chaque ligne indique les valeurs possibles des arguments $x_1, \ldots, x_n$ de la fonction ainsi que la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$; voir la table 2 pour les tables de vérité de $\neg$, $\vee$ et $\wedge$.

(Duparc, 2015, sec. 2.8)

Table 2. Les tables de vérité des fonctions $\neg$, $\vee$ et $\wedge$.

x_1	$\neg x_1$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Soit φ une formule propositionnelle. Par la propriété 3.3, la satisfaction de φ ne dépend que de l'interprétation des propositions de $\mathcal{P}_0(\varphi)$. On peut ainsi voir φ comme définissant une fonction des interprétations partielles $I \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}_0(\varphi)}$ dans $\mathbb{B}$: $[\![\varphi]\!](I) \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I$. C'est donc une fonction booléenne $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ à $n = |\mathcal{P}_0(\varphi)|$ variables, et on peut en donner la table de vérité. Cependant, plutôt que de seulement donner la table de vérité de $[\![\varphi]\!]$, il peut être pratique de donner par la même occasion la table de vérité de chacune de ses sous-formules.

Exemple 3.5. Pour la formule propositionnelle φ_{ex} de la figure 1, $[\![\varphi_{\text{ex}}]\!]$ est une fonction à deux variables qui représentent les valeurs de $[\![P]\!]^I$ et $[\![Q]\!]^I$. La formule propositionnelle φ_{ex} a pour

TABLE 3. La table de vérité de la formule propositionnelle φ_{ex} de la figure 1.

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$(P \vee \neg Q) \wedge P$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$

sous-formules P, Q, $\neg Q$, $P \vee \neg Q$, ainsi que $(P \vee \neg Q) \wedge P$. La table de vérité correspondante est donnée dans la table 3.
Les deux colonnes « $\neg Q$ » et « $P \vee \neg Q$ » contiennent des calculs intermédiaires. La colonne « $\neg Q$ » est obtenue en appliquant $\neg$ à la colonne Q ; la colonne « $P \vee \neg Q$ » l'est en appliquant $\vee$ aux colonnes P et $\neg Q$; enfin, la colonne « $(P \vee \neg Q) \wedge P$ » est obtenue en appliquant $\wedge$ aux colonnes $P \vee \neg Q$ et P. À noter que la sémantique $[\![\varphi_{\text{ex}}]\!]^I = \bot$ calculée dans l'exemple 3.2 pour I étendant $[\bot/P, \bot/Q]$ correspond à la dernière ligne de la table.
On peut remarquer dans cette table que les colonnes « P » et « $(P \vee \neg Q) \wedge P$ » contiennent les mêmes valeurs de vérité : ces deux formules propositionnelles sont dites *fonctionnellement équivalentes*, car elles définissent les mêmes fonctions $[\![P]\!] = [\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]$.

(DUPARC, 2015, sec. 2.11)

3.1.6. *Étendre la syntaxe.* D'autres opérations booléennes que $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ pourraient être utilisées dans la syntaxe des formules propositionnelles. Par exemple, il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à deux arguments, dont les fonctions indiquées dans la table 4.

TABLE 4. Les tables de vérité des fonctions booléennes $\oplus$ (« ou exclusif »), $\Rightarrow$ (« implique »), $\Leftrightarrow$ (« si et seulement si ») et $\uparrow$ (« non et »).

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$x_1 \uparrow x_2$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Pour chacune de ces fonctions, on pourrait étendre la syntaxe abstraite des formules propositionnelles pour s'autoriser à les utiliser :

$$\varphi ::= \ldots \mid \varphi \oplus \varphi \mid \varphi \Rightarrow \varphi \mid \varphi \Leftrightarrow \varphi \mid \varphi \uparrow \varphi \,,$$

en étendant de même la sémantique par

$$[\![\varphi \oplus \psi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \oplus [\![\psi]\!]^I \,, \qquad [\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \Rightarrow [\![\psi]\!]^I \,,$$
$$[\![\varphi \Leftrightarrow \psi]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \Leftrightarrow [\![\psi]\!]^I \,, \qquad [\![\varphi \uparrow \psi]\!] \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I \uparrow [\![\psi]\!]^I \,.$$

Remarque 3.6. Comme mentionné dans la remarque 3.1, le « ou exclusif » $\oplus$ (aussi appelé « xor ») correspond au sens souvent implicite du mot « ou » en français (A ou B mais pas les deux).

(DUPARC, 2015, sec. 2.3)

L'implication $\Rightarrow$ correspond approximativement à « si A alors B » ou « A implique B ». Mais en français usuel, ces locutions établissent souvent un lien de causalité implicite entre A et B, comme dans « S'il pleut, alors je prends mon parapluie. ». Cela rend aussi une phrase comme « S'il pleut et que je mets mon pull bleu, alors il pleut. » assez étrange, alors que $(P \wedge B) \Rightarrow P$ est une formule propositionnelle tout à fait raisonnable. L'implication en français courant peut aussi prendre un sens exclusif, comme dans « S'il reste ici, je m'en vais. », qu'on formaliserait en $R \oplus \neg V$ où R dénote « il reste ici » et V « je m'en vais ».

3.1.7. *Complétude fonctionnelle.* Pour les applications de la logique propositionnelle, par exemple pour les expressions booléennes dans les langages de programmation ou de circuits logiques, il serait pour le moins souhaitable que toutes les fonctions booléennes soient exprimables comme la sémantique $[\![\varphi]\!]$ d'une formule propositionnelle φ. Une solution serait, pour chaque fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, d'étendre la syntaxe abstraite des formules propositionnelles par

$$\varphi ::= \ldots \mid f(\varphi, \ldots, \varphi)$$

et leur sémantique par

$$[\![f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\!]^I \stackrel{\text{def}}{=} f([\![\varphi_1]\!]^I, \ldots, [\![\varphi_n]\!]^I) \ .$$

Fort heureusement, il n'est pas nécessaire d'enrichir la syntaxe et la sémantique des formules propositionnelles par une infinité de cas – ce qui serait un obstacle pour leur implémentation ! En effet, toutes les fonctions booléennes peuvent être exprimées à l'aide des seules $\neg$, $\vee$ et $\wedge$ (et des fonctions de projection) en les composant de manière appropriée.

(Duparc, 2015, sec. 2.12)

Exemple 3.7. Les fonctions de la table 4 s'expriment comme suit :

$$x_1 \oplus x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2) \ , \qquad x_1 \Rightarrow x_2 = \neg x_1 \vee x_2 \ ,$$
$$x_1 \Leftrightarrow x_2 = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1) \ , \qquad x_1 \uparrow x_2 = \neg(x_1 \wedge x_2) \ .$$

Intuitivement, les fonctions booléennes définissables comme des sémantiques $[\![\varphi]\!]$ de formules propositionnelles sont justement les fonctions exprimables à l'aide des seules $\neg$, $\vee$ et $\wedge$; par exemple, $\Rightarrow = [\![\neg P_1 \vee P_2]\!]$. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 3.8 (complétude fonctionnelle)**.** *Pour tout $n > 0$ et toute fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, il existe une formule propositionnelle φ sur n propositions $P_1, \ldots, P_n$ telle que $f = [\![\varphi]\!]$.*

Démonstration. Soit f une fonction booléenne $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ pour un certain $n > 0$. Si $n = 1$, alors il y a quatre fonctions booléennes de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$, qui sont toutes exprimables à l'aide de formules propositionnelles :

- la fonction identité est $[\![P_1]\!]$,
- la fonction négation $[\![\neg P_1]\!]$,
- la fonction constante $\top$ est $[\![P_1 \vee \neg P_1]\!]$ et
- la fonction constante $\bot$ est $[\![P_1 \wedge \neg P_1]\!]$.

Si $n > 1$, alors

$$f = [\![\bigvee_{(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{B}^n : f(b_1,\ldots,b_n) = \top} \varphi_{(b_1,\ldots,b_n)}]\!]$$

Cette expression pour f est appelée sa forme normale disjonctive complète. *C'est manifestement une forme canonique, mais assez peu utile puisque systématiquement de taille exponentielle en n.*

pourvu que chaque formule propositionnelle $\varphi_{(b_1,\ldots,b_n)}$ soit telle que $[\![\varphi_{(b_1,\ldots,b_n)}]\!]^I = \top$ si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$, $P_i^I = b_i$. De telles formules propositionnelles $\varphi_{(b_1,\ldots,b_n)}$ s'écrivent comme des conjonctions

$$\varphi_{(b_1,\ldots,b_n)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \ell_{(b_1,\ldots,b_n),i}$$

où les littéraux $\ell_{(b_1,\ldots,b_n),i}$ sont définis par

$$\ell_{(b_1,\ldots,b_n),i} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P_i & \text{si } b_i = \top \\ \neg P_i & \text{si } b_i = \bot. \end{cases}$$

□

Exemple 3.9. Appliquons la preuve du théorème 3.8 de complétude fonctionnelle à la fonction $\Leftrightarrow$ définie dans la table 4. Il y a deux valuations de (x_1, x_2) telles que $x_1 \Leftrightarrow x_2 = \top$, à savoir $(\top, \top)$ et $(\bot, \bot)$. Les deux formules propositionnelles associées sont $\varphi_{(\top,\top)} \stackrel{\text{def}}{=} P_1 \wedge P_2$ et $\varphi_{(\bot,\bot)} \stackrel{\text{def}}{=} \neg P_1 \wedge \neg P_2$, et on a bien $\Leftrightarrow = [\![(P_1 \wedge P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)]\!]$.

(Duparc, 2015, sec. 2.9), (Harrisson, 2009, sec. 2.3)

3.2. **Satisfiabilité et validité.** Une formule propositionnelle φ est *satisfiable* s'il existe un modèle de φ, c'est-à-dire s'il existe une interprétation I telle que $I \vDash \varphi$. Elle est *valide*, noté $\vDash \varphi$, si pour toute interprétation I, $I \vDash \varphi$. Clairement, une formule propositionnelle valide est en particulier satisfiable, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

En termes des tables de vérité de la section 3.1.5, une formule propositionnelle est donc satisfiable si et seulement s'il existe au moins une entrée $\top$ dans sa colonne, et elle est valide si et seulement si sa colonne est entièrement constituée de $\top$. On voit dans la table 3 que la formule propositionnelle φ_{ex} de la figure 1 est satisfiable mais pas valide.

En termes d'ensemble de modèles, rappelons que $\text{Sat}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{I \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}_0} \mid I \vDash \varphi\}$ dénote l'ensemble des interprétations qui satisfont φ. Alors φ est satisfiable si $\text{Sat}(\varphi) \neq \emptyset$, tandis qu'elle est valide si $\text{Sat}(\varphi) = \mathbb{B}^{\mathcal{P}_0}$ est l'ensemble de toutes les interprétations possibles.

Exemple 3.10 (loi de Peirce)**.** La formule propositionnelle $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ est une variante du tiers exclu, et est valide en logique classique propositionnelle. En effet, soit I une interprétation quelconque. Si $I \vDash P$, alors $I \vDash \varphi$. Sinon, $I \vDash P \Rightarrow Q$ donc $I \nvDash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ et donc $I \vDash \varphi$.

Propriété 3.11 (dualité entre satisfiabilité et validité)**.** *Une formule propositionnelle φ n'est pas satisfiable si et seulement si $\neg\varphi$ est valide ; elle n'est pas valide si et seulement si $\neg\varphi$ est satisfiable.*

Démonstration. Pour le premier énoncé, φ n'est pas satisfiable (aussi dite « contradictoire »)
- si et seulement si, pour toute interprétation I, $I \nvDash \varphi$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, $I \vDash \neg\varphi$,
- si et seulement si, $\neg\varphi$ est valide.

Pour le second énoncé, φ n'est pas valide (aussi dite « falsifiable »)
- si et seulement si, il existe une interprétation I telle que $I \nvDash \varphi$,
- si et seulement si, il existe une interprétation I telle que $I \vDash \neg\varphi$,
- si et seulement si, $\neg\varphi$ est satisfiable. □

Pour un ensemble de formules propositionnelles S et une interprétation I, on écrit $I \vDash S$ si $I \vDash \psi$ pour tout $\psi \in S$. Si S est un ensemble de formules propositionnelles et φ est une formule propositionnelle, on écrit $S \vDash \varphi$ si pour toute interprétation I telle que $I \vDash S$ on a $I \vDash \varphi$ – autrement dit, si pour toute interprétation I, $I \vDash S$ implique $I \vDash \varphi$.

Propriété 3.12. *Soit φ une formule propositionnelle. Alors φ est valide si et seulement si $\emptyset \vDash \varphi$, c'est-à-dire φ est une conséquence logique de l'ensemble vide.*

Démonstration. On a $\emptyset \vDash \varphi$
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si I satisfait toutes les formules de l'ensemble vide, alors $I \vDash \varphi$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, on a $I \vDash \varphi$,
- si et seulement si, φ est valide. □

Un ensemble S est *insatisfiable* s'il n'existe pas d'interprétation I telle que $I \vDash S$; cela est équivalent à $S \vDash \bot$.

Exemple 3.13 (ensemble insatisfiable)**.** Soit l'ensemble F de formules propositionnelles suivant :

$$\{P \vee Q \vee \neg R,\ \ Q \vee R,\ \ \neg P \vee \neg Q \vee R,\ \ \neg P \vee \neg R,\ \ P \vee \neg Q\}\ .$$

Soit I une interprétation. Supposons tout d'abord que $I \vDash P$. Si $I \vDash R$, alors $I \nvDash \neg P \vee \neg R$; sinon si $I \vDash Q$ alors $I \nvDash \neg P \vee \neg Q \vee R$ et sinon $I \nvDash Q \vee R$. Supposons maintenant $I \nvDash P$. Si $I \vDash Q$, alors $I \nvDash P \vee \neg Q$; sinon si $I \vDash R$ alors $I \nvDash P \vee Q \vee \neg R$ et sinon $I \nvDash Q \vee R$.

4. Conséquences et équivalences logiques

Résumé. Une formule propositionnelle φ est une *conséquence logique* d'une formule propositionnelle ψ (noté « $\psi \vDash \varphi$ ») si pour toute interprétation I, si $I \vDash \psi$ alors $I \vDash \varphi$. C'est le cas si et seulement si la formule propositionnelle $\psi \Rightarrow \varphi$ est valide, si et seulement si $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ (lemmes 4.1 et 4.2). Les formules propositionnelles φ et ψ sont *logiquement équivalentes* si $\psi \vDash \varphi$ et $\varphi \vDash \psi$; c'est le cas si et seulement si $\psi \Leftrightarrow \varphi$ est valide, si et seulement si $[\![\psi]\!] = [\![\varphi]\!]$.

Une *substitution propositionnelle* est une fonction τ de domaine fini qui associe à toute proposition $P \in \mathcal{P}_0$ une formule propositionnelle $\tau(P)$; par extension, $\varphi\tau$ est la formule propositionnelle dans laquelle toutes les occurrences de chaque proposition P ont été remplacées par $\tau(P)$.

On dénote par $I\tau$ l'interprétation qui associe pour toute proposition $P \in \mathcal{P}_0$ la valeur de vérité $P^{I\tau} \stackrel{\text{def}}{=} [\![\tau(P)]\!]^I$; alors le lemme 4.6 de substitution propositionnelle dit que $[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau}$. Cela implique en particulier que si φ est valide, alors $\varphi\tau$ l'est aussi, et permet de démontrer de nombreuses *équivalences usuelles*.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple 3.5, il peut y avoir plusieurs formules propositionnelles avec la même sémantique. Le but de cette section est de mieux comprendre ce phénomène.

4.1. **Conséquences logiques.** Revenons sur la notation $S \vDash \varphi$ introduite auparavant. Dans le cas d'un ensemble $S = \{\psi\}$ constitué d'une seule formule propositionnelle ψ, on notera plus simplement $\psi \vDash \varphi$ et on parlera d'une *conséquence logique*. Si on écrit $\mathrm{Sat}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{I \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}_0} \mid I \vDash \varphi\}$ pour l'ensemble des interprétations qui satisfont une formule propositionnelle φ, $\psi \vDash \varphi$ revient à $\mathrm{Sat}(\psi) \subseteq \mathrm{Sat}(\varphi)$. On peut relier cette notion à la validité d'une seule formule propositionnelle comme suit.

(Duparc, 2015, sec. 2.5)

Lemme 4.1 (déduction)**.** *Soit S un ensemble de formules propositionnelles, et φ et ψ deux formules propositionnelles. Alors $S \cup \{\psi\} \vDash \varphi$ si et seulement si $S \vDash \psi \Rightarrow \varphi$. En particulier quand $S = \emptyset$, $\psi \vDash \varphi$ si et seulement si $\psi \Rightarrow \varphi$ est valide.*

Démonstration. On a $S \cup \{\psi\} \vDash \varphi$
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si I satisfait toutes les formules propositionnelles de $S \cup \{\psi\}$, alors $I \vDash \varphi$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si I satisfait toutes les formules propositionnelles de S, et si de plus $I \vDash \psi$, alors $I \vDash \varphi$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si I satisfait toutes les formules propositionnelles de S, alors $I \vDash \psi \Rightarrow \varphi$,
- si et seulement si, $S \vDash \psi \Rightarrow \varphi$.

Par suite, le cas où $S = \emptyset$ découle de la propriété 3.12. □

Une autre façon de comprendre les conséquences logiques est de définir un *pré-ordre* à l'aide des sémantiques fonctionnelles $[\![\varphi]\!]$. On considère pour cela l'ordre $\bot < \top$ sur les valeurs de vérités, et on dit que ψ est *fonctionnellement plus petite* que φ, noté $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$, si pour toute interprétation I, $[\![\psi]\!]^I \leq [\![\varphi]\!]^I$. D'après cette définition, deux formules propositionnelles φ et ψ sont *fonctionnellement équivalentes*, c'est-à-dire telles que $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$, si et seulement si $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$ et $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$.

On peut visualiser le pré-ordre fonctionnel sous la forme d'un treillis comme celui de la figure 2. Dans cette figure, on donne pour chacun des 16 cas possibles sur deux propositions P et Q les valeurs de vérité des formules propositionnelles pour les interprétations partielles $[\top/P, \top/Q]$, $[\top/P, \bot/Q]$, $[\bot/P, \top/Q]$ et $[\bot/P, \bot/Q]$, dans cet ordre. Chaque élément du treillis est illustré

par un exemple de formule propositionnelle avec cette sémantique ; il y en a bien sûr d'autres, comme $P \wedge \neg Q$ pour $\bot\top\bot\bot$ ou $\neg P \vee \neg Q$ pour $\bot\top\top\top$, ou comme vu dans l'exemple 3.5, $(P \vee \neg Q) \wedge P$ pour $\top\top\bot\bot$. Dans ce treillis, $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ s'il existe un chemin pointillé qui monte de $[\![\psi]\!]$ à $[\![\varphi]\!]$.

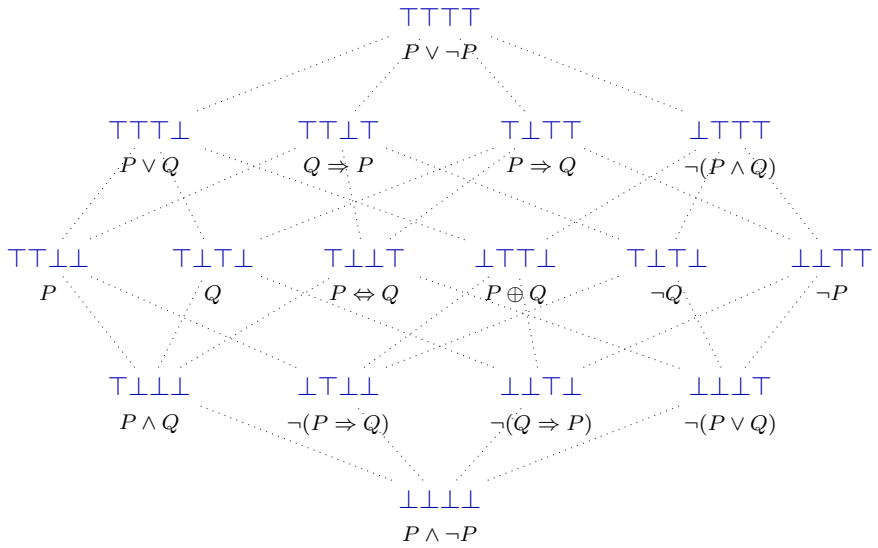


FIGURE 2. Le treillis du pré-ordre fonctionnel sur deux propositions P et Q.

Lemme 4.2 (pré-ordre fonctionnel)**.** *Soient φ et ψ deux formules propositionnelles. Alors $\psi \vDash \varphi$ si et seulement si $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$.*

Démonstration. On a $\psi \vDash \varphi$
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si $I \vDash \psi$ alors $I \vDash \varphi$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, si $[\![\psi]\!]^I = \top$ alors $[\![\varphi]\!]^I = \top$,
- si et seulement si, pour toute interprétation I, $[\![\psi]\!]^I \leq [\![\varphi]\!]^I$,
- si et seulement si, $[\![\psi]\!] \leq [\![\varphi]\!]$. □

(DUPARC, 2015, sec. 2.4)

4.2. **Équivalences logiques.** On dit que deux formules propositionnelles φ et ψ sont *logiquement équivalentes* si $\psi \vDash \varphi$ et $\varphi \vDash \psi$, c'est-à-dire si, pour toute interprétation I, $I \vDash \psi$ si et seulement si $I \vDash \varphi$. En terme d'ensemble de modèles, cela revient à demander $\mathrm{Sat}(\psi) = \mathrm{Sat}(\varphi)$. Par le lemme 4.1 de déduction, cela se produit si et seulement si $\psi \Leftrightarrow \varphi$ est une formule propositionnelle valide. Par le lemme 4.2 de pré-ordre fonctionnel, cela se produit si et seulement si φ et ψ sont fonctionnellement équivalentes, c'est-à-dire si et seulement si $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Comme nous allons le voir, l'équivalence logique permet de remplacer une formule propositionnelle, qui représente par exemple une expression booléenne d'un programme ou un circuit logique, par une autre formule propositionnelle équivalente potentiellement plus efficace à évaluer ; ainsi, dans l'exemple 3.5, la formule propositionnelle P est plus facile à évaluer que $(P \vee \neg Q) \wedge P$.

Il est donc très utile de savoir dire si deux formules propositionnelles φ et ψ sont logiquement équivalentes ou non. Cela peut se faire à l'aide de tables de vérité
- d'après le lemme 4.1 de déduction, en vérifiant si $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est valide, ou
- d'après le lemme 4.2 de pré-ordre fonctionnel, en vérifiant si $[\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

Exemple 4.3. Appliquons les lemmes 4.1 et 4.2 à l'équivalence entre $\neg(P \vee Q)$ et $\neg P \wedge \neg Q$. La table de vérité correspondante est donnée dans la table 5 ci-dessous.
On vérifie dans cette table que la troisième colonne ($\neg(P \vee Q)$) et la cinquième colonne ($\neg P \wedge \neg Q$) sont identiques, donc ces deux formules propositionnelles sont logiquement équivalentes par le lemme 4.2 de pré-ordre fonctionnel. La sixième colonne ($\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$) ne contient que des $\top$, donc cette formule propositionnelle est valide, ce qui montre aussi que les deux formules propositionnelles sont logiquement équivalentes par le lemme 4.1 de déduction.

TABLE 5. Table de vérité de $\neg(P \vee Q)$, $\neg P \wedge \neg Q$ et $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Cette approche via les tables de vérité a l'inconvénient de nécessiter de tester toutes les interprétations des propositions de $\mathcal{P}_0(\varphi) \cup \mathcal{P}_0(\psi)$, soit un nombre exponentiel de possibilités. Nous verrons des techniques qui permettent souvent de n'explorer qu'une toute petite partie de cet espace de recherche. En attendant, nous allons voir une approche qui s'applique bien à de petites formules propositionnelles et des raisonnements « à la main ».

4.3. **Substitutions propositionnelles.** Une *substitution propositionnelle* (aussi appelée une « transduction propositionnelle ») est une fonction τ qui associe à chaque proposition $P \in \mathcal{P}_0$ une formule propositionnelle $\tau(P)$, de tel sorte que son *domaine* $\mathrm{dom}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{P}_0 \mid \tau(P) \neq P\}$ soit fini. On écrit $[\varphi_1/P_1, \ldots, \varphi_n/P_n]$ pour la substitution propositionnelle de domaine $\{P_1, \ldots, P_n\}$ où les P_i sont distinctes et qui associe φ_i à P_i. Toute substitution propositionnelle se relève en une fonction des formules propositionnelles dans les formules propositionnelles :

(DUPARC, 2015, sec. 2.6), (GOUBAULT-LARRECQ et MACKIE, 1997, def. 2.4), (DAVID, NOUR et RAFFALLI, 2003, def. 4.6.4), (HARRISSON, 2009, p. 41)

$$P\tau \stackrel{\text{def}}{=} \tau(P)\ , \quad (\neg\varphi)\tau \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi\tau)\ , \quad (\varphi \vee \psi)\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\tau) \vee (\psi\tau)\ , \quad (\varphi \wedge \psi)\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\tau) \wedge (\psi\tau)\ .$$

Exemple 4.4. Considérons la formule propositionnelle $\psi = (P \wedge Q)$, ainsi que la substitution propositionnelle $\tau = [(P \vee \neg Q)/P, P/Q]$. Alors $\psi\tau = (P \vee \neg Q) \wedge P$.

4.3.1. *Implémentation des substitutions propositionnelles en Java.* En Java, une substitution propositionnelle peut être représentée comme un objet de type `Map<String,Formule>`. Par exemple, la substitution propositionnelle τ de l'exemple 4.4 se code par

```
Map<String,Formule> tau = new HashMap<String,Formule>();
tau.put("P", new Proposition("Q"));
tau.put("Q", new Ou(new Proposition("P"),
                    new Non(new Proposition("Q"))));
```

Pour implémenter l'application d'une substitution propositionnelle, on déclare tout d'abord que `Formule` est `Cloneable`. L'application d'une substitution propositionnelle se fera en appelant la méthode `substitue()` suivante :

Formule
```
public abstract Formule substitue(Map<String,Formule> tau);
```

Son implémentation dans les sous-classes est très simple :

Formule.Et
```
public Formule substitue(Map<String,Formule> tau) {
    return new Et(phi1.substitue(tau), phi2.substitue(tau));
}
```
Formule.Ou
```
public Formule substitue(Map<String,Formule> tau) {
    return new Ou(phi1.substitue(tau), phi2.substitue(tau));
}
```
Formule.Non
```
public Formule substitue(Map<String,Formule> tau) {
    return new Non(phi1.substitue(tau));
}
```

Si on ne faisait pas appel à `clone()` ici, on obtiendrait une formule propositionnelle qui n'est plus un arbre mais un graphe dirigé acyclique enraciné. Ça ne serait pas nécessairement un problème : pourquoi ?

Formule.Proposition
```
 public Formule
substitue(Map<String,Formule> tau) { return (tau.containsKey(nom))?
  tau.get(nom).clone(): new Proposition(nom); }
```

4.3.2. *Implémentation des substitutions propositionnelles en OCaml.* Une substitution propositionnelle se représente en OCaml comme une fonction de type `string -> formule`. Par exemple, la substitution propositionnelle τ de l'exemple 4.4 se code par

```
let tau = function
    "P" -> Proposition "Q"
  | "Q" -> Ou (Proposition "P", Non (Proposition "Q"))
  | p   -> Proposition p
```

Voici un code qui implémente l'application d'une substitution propositionnelle :

```
let rec substitue phi tau =
  match phi with
    Et(phi1, phi2) -> Et(substitue phi1 tau, substitue phi2 tau)
  | Ou(phi1, phi2) -> Ou(substitue phi1 tau, substitue phi2 tau)
  | Non phi1       -> Non(substitue phi1 tau)
  | Proposition p  -> tau p
```

4.3.3. *Lemme de substitution propositionnelle.* Pour une interprétation I et une substitution propositionnelle τ, on définit l'interprétation $I\tau$ comme associant $P^{I\tau} \stackrel{\text{def}}{=} [\![\tau(P)]\!]^I$ à chaque proposition P de $\mathcal{P}_0$.

Exemple 4.5. Soit I une interprétation qui étend $[\bot/P, \bot/Q]$ et $\tau = [(P \vee \neg Q)/P, P/Q]$. Alors $P^{I\tau} = [\![P \vee \neg Q]\!]^I = \top$ et $Q^{I\tau} = [\![P]\!]^I = \bot$.

(Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, thm. 2.10), (Harrisson, 2009, thm. 2.3)

Lemme 4.6 (substitution propositionnelle)**.** *Pour toute formule propositionnelle φ, toute substitution propositionnelle τ et toute interprétation I, $[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau}$.*

Démonstration. Par induction structurelle sur φ. Pour le cas de base où $\varphi = P \in \mathcal{P}_0$,

$$[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![P\tau]\!]^I = [\![\tau(P)]\!]^I = [\![P]\!]^{I\tau} = [\![\varphi]\!]^{I\tau} .$$

Pour l'étape d'induction où $\varphi = \neg\psi$,

$$[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![(\neg\psi)\tau]\!]^I = [\![\neg(\psi\tau)]\!]^I = \neg[\![\psi\tau]\!]^I \stackrel{\text{h.i.}}{=} \neg[\![\psi]\!]^{I\tau} = [\![\neg\psi]\!]^{I\tau} = [\![\varphi]\!]^{I\tau} .$$

Pour l'étape d'induction où $\varphi = \varphi' \vee \psi$,

$$[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![(\varphi' \vee \psi)\tau]\!]^I = [\![(\varphi'\tau) \vee (\psi\tau)]\!]^I = [\![\varphi'\tau]\!]^I \vee [\![\psi\tau]\!]^I \stackrel{\text{h.i.}}{=} [\![\varphi']\!]^{I\tau} \vee [\![\psi]\!]^{I\tau} = [\![\varphi' \vee \psi]\!]^{I\tau} = [\![\varphi]\!]^{I\tau}.$$

L'étape d'induction où $\varphi = \varphi' \wedge \psi$ est similaire. □

Exemple 4.7. Considérons comme dans les exemples 4.4 et 4.5 une interprétation I qui étend $[\bot/P, \bot/Q]$, la substitution propositionnelle $\tau = [(P \vee \neg Q)/P, P/Q]$, et la formule propositionnelle $\psi = (P \wedge Q)$. Alors d'un côté $[\![\psi\tau]\!]^I = [\![(P \vee \neg Q) \wedge P]\!]^{[\bot/P, \bot/Q]} = \bot$, et de l'autre $[\![\psi]\!]^{I\tau} = [\![P \wedge Q]\!]^{[\top/P, \bot/Q]} = \bot$.

Corollaire 4.8. *Soit φ une formule propositionnelle valide et τ une substitution propositionnelle. Alors $\varphi\tau$ est valide.* (HARRISSON, 2009, cor. 2.4)

Démonstration. Par le lemme 4.6 de substitution propositionnelle, pour toute interprétation I, $[\![\varphi\tau]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\tau}$. Or, comme φ est valide, $[\![\varphi]\!]^{I\tau} = \top$. □

Exemple 4.9. Voyons tout de suite une application de la corollaire 4.8. Nous avons vu dans l'exemple 4.3 que $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ est valide. Dès lors, pour toutes formules propositionnelles φ et ψ, on peut appliquer la substitution propositionnelle $[\varphi/P, \psi/Q]$ et déduire que $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ est valide – autrement dit, que $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ sont logiquement équivalentes.

4.4. **Équivalences usuelles.** En appliquant le même raisonnement que dans l'exemple 4.9, on a plus généralement les équivalences logiques suivantes. (HARRISSON, 2009, pp. 44–46)

Résumé. Pour toutes formules propositionnelles φ, ψ, et ψ',

$$
\begin{aligned}
(\varphi \vee \varphi) &\Leftrightarrow \varphi\ , && \text{(idempotence de } \vee\text{)}\\
(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)\ , && \text{(commutativité de } \vee\text{)}\\
((\varphi \vee \psi) \vee \psi') &\Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \psi'))\ && \text{(associativité de } \vee\text{)}\\
(\varphi \wedge \varphi) &\Leftrightarrow \varphi\ , && \text{(idempotence de } \wedge\text{)}\\
(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)\ , && \text{(commutativité de } \wedge\text{)}\\
((\varphi \wedge \psi) \wedge \psi') &\Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \psi'))\ && \text{(associativité de } \wedge\text{)}\\
\neg\neg\varphi &\Leftrightarrow \varphi\ , && \text{(double négation)}\\
(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) &\Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi'))\ , && \text{(distributivité de } \wedge \text{ sur } \vee\text{)}\\
(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) &\Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi'))\ , && \text{(distributivité de } \vee \text{ sur } \wedge\text{)}\\
\neg(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)\ , && \text{(dualité de DE MORGAN pour } \vee\text{)}\\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)\ , && \text{(dualité de DE MORGAN pour } \wedge\text{)}\\
(\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)\ , && \text{(définition de l'implication)}\\
(\varphi \Rightarrow \psi) &\Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)\ , && \text{(contraposition)}\\
((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi') &\Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \psi'))\ . && \text{(curryfication)}
\end{aligned}
$$

Ces équivalences logiques sont aussi très utiles pour simplifier des formules propositionnelles. On repose pour cela sur la propriété suivante.

Propriété 4.10. *Soit φ une formule propositionnelle, et τ et τ' deux substitutions propositionnelles telles que, pour toute proposition $P \in \mathcal{P}_0$, $\tau(P)$ soit logiquement équivalente à $\tau'(P)$. Alors $\varphi\tau$ est logiquement équivalente à $\varphi\tau'$.*

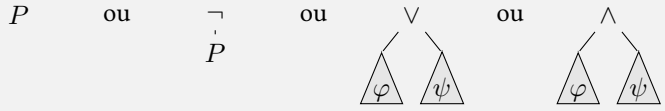
Démonstration. Par induction structurelle sur φ. □

Exemple 4.11. Voici une illustration : on souhaite montrer que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est logiquement équivalente à P. Les deux substitutions propositionnelles $[(P \Rightarrow Q)/P, P/Q]$ et

$[(\neg P \vee Q)/P, P/Q]$ sont bien telles que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ (par définition de l'implication) et $P \Leftrightarrow P$ est immédiat. En appliquant la propriété 4.10 à la formule propositionnelle $\varphi = (P \Rightarrow Q)$, on en déduit que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ est logiquement équivalente à $(\neg P \vee Q) \Rightarrow P$. Puis, par des raisonnements similaires, par définition de l'implication, elle est logiquement équivalente à $\neg(\neg P \vee Q) \vee P$, puis par dualité de DE MORGAN pour $\vee$, à $(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee P$, par double négation, à $(P \wedge \neg Q) \vee P$, par commutativité de $\vee$, à $P \vee (P \wedge \neg Q)$, par distributivité de $\vee$ sur $\wedge$, à $(P \vee P) \wedge (P \vee \neg Q)$, par idempotence de $\vee$, à $P \wedge (P \vee \neg Q)$, par commutativité de $\wedge$, à $(P \vee \neg Q) \wedge P$, qui comme nous l'avons vu dans l'exemple 3.5 est logiquement équivalente à P.

5. FORMES NORMALES

Résumé. On peut mettre n'importe quelle formule propositionnelle sous *forme normale négative* en « poussant » les négations vers les feuilles grâce aux dualités de DE MORGAN ; la formule propositionnelle obtenue est alors de la forme



où $P \in \mathcal{P}_0$ et φ et ψ sont des formules propositionnelles sous forme normale négative. Les formules propositionnelles de la forme « P » ou « $\neg P$ » sont appelées des *littéraux*. On note « $\bar{\varphi}$ » pour la forme normale négative de $\neg\varphi$.

Une formule propositionnelle est sous *forme normale conjonctive* si elle s'écrit comme

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq n} \ell_{i,j}$$

où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux. On peut mettre une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive à partir d'une formule propositionnelle sous forme normale négative par application de la distributivité de $\vee$ sur $\wedge$. Une formule propositionnelle est sous *forme normale disjonctive* si elle s'écrit comme

$$\bigvee_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \ell_{i,j}$$

où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux. On peut mettre une formule propositionnelle sous forme normale disjonctive à partir d'une formule propositionnelle sous forme normale négative par application de la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$. Les formules propositionnelles obtenues sont logiquement équivalentes à la formule d'origine mais potentiellement de taille exponentielle.

On préfère en pratique construire des formules propositionnelles sous forme normale conjonctive *équi-satisfiables* avec la formule d'origine (section 5.2.3) ; cette opération a un coût linéaire dans le pire des cas.

Il existe un format de fichier standard pour écrire des formules propositionnelles sous forme normale conjonctive : le *format DIMACS*.

Nous avons vu dans la section précédente qu'il existe de nombreuses manières d'écrire des formules propositionnelles logiquement équivalentes (c.f. section 4). Parmi toutes ces formules propositionnelles équivalentes, certaines seront plus faciles à traiter ; par exemple, la formule propositionnelle P est plus facile à évaluer que la formule propositionnelle $(P \vee \neg Q) \wedge P$. En particulier, les algorithmes de recherche de modèle ou de recherche de preuve que nous verrons

par la suite travaillent sur des formules propositionnelles avec une syntaxe restreinte – on parle alors de *forme normale*.

5.1. **Forme normale négative.** Une formule propositionnelle est sous *forme normale négative* si elle respecte la syntaxe abstraite

(David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 2.6), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, def. 2.38), (Harrisson, 2009, sec. 2.5)

$$\ell ::= P \mid \neg P \qquad \text{(littéraux)}$$
$$\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \qquad \text{(formules propositionnelles sous forme normale négative)}$$

où P est une proposition de $\mathcal{P}_0$. En d'autres termes, les négations ne peuvent apparaître que devant des formules atomiques. Par exemple, la formule propositionnelle $\varphi_{\text{ex}} = (P \vee \neg Q) \wedge P$ de la figure 1 est sous forme normale négative.

La mise sous forme normale négative procède en « poussant » les négations dans l'arbre de syntaxe abstraite de la formule propositionnelle vers les feuilles.

Définition 5.1 (forme normale négative)**.** Pour une formule propositionnelle φ, on notera $\text{nnf}(\varphi)$ sa forme normale négative obtenue inductivement par

$$\text{nnf}(P) \stackrel{\text{def}}{=} P \,, \qquad \text{nnf}(\neg P) \stackrel{\text{def}}{=} \neg P \,,$$
$$\text{nnf}(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \vee \text{nnf}(\psi) \,, \qquad \text{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \wedge \text{nnf}(\neg\psi) \,,$$
$$\text{nnf}(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \wedge \text{nnf}(\psi) \,, \qquad \text{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi) \vee \text{nnf}(\neg\psi) \,,$$
$$\text{nnf}(\neg\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\varphi) \,.$$

On notera aussi en général

$$\overline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \text{nnf}(\neg\varphi)$$

pour la forme normale négative de la négation de φ, appelée la *formule duale* de φ.

À noter que les définitions dans la colonne de gauche de la définition 5.1 sont celles pour des formules propositionnelles qui n'ont pas de symbole « $\neg$ » à leur racine, tandis que celles de la colonne de droite s'occupent des différents cas de formules propositionnelles enracinées par « $\neg$ ». En termes algorithmiques, cette mise sous forme normale négative se fait en temps linéaire. Par les deux lois de dualité de de Morgan pour $\vee$ et pour $\wedge$ et par la loi de double négation, la mise sous forme normale négative préserve la sémantique des formules propositionnelles : φ et $\text{nnf}(\varphi)$ sont équivalentes.

Exemple 5.2. La loi de Peirce $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ s'écrit $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P$ en syntaxe non étendue. Sa forme normale négative est

$$\begin{aligned}\text{nnf}(\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P) &= \text{nnf}(\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P)) \vee P \\ &= (\text{nnf}(\neg\neg(\neg P \vee Q)) \wedge \neg P) \vee P \\ &= ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P \,.\end{aligned}$$

Sa formule duale est

$$\begin{aligned}\overline{\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P)} &= \text{nnf}(\neg(\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P)) \\ &= \text{nnf}(\neg\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P)) \wedge \neg P \\ &= \text{nnf}(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \wedge \neg P \\ &= (\text{nnf}(\neg(\neg P \vee Q)) \vee P) \wedge \neg P \\ &= ((\text{nnf}(\neg\neg P) \wedge \neg Q) \vee P) \wedge \neg P \\ &= ((P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge \neg P \,.\end{aligned}$$

5.1.1. *Implémentation des formes normales négatives en Java.* Comme d'habitude, nous déclarons des méthodes abstraites dans `Formule` :

L'implémentation des formes normales négatives en OCaml sera faite en TP du cours de « programmation fonctionnelle ».

Formule
```
public abstract Formule2 getNNF();
public abstract Formule2 getDualNNF();
```

La première méthode implémente la colonne de gauche de la définition 5.1, tandis que la seconde implémente la colonne de droite. Plus précisément, voici leurs implémentations dans les sous-classes de `Formule` :

Formule.Et
```
public Formule2 getNNF() {
    return new Et(phi1.getNNF(), phi2.getNNF());
}
public Formule2 getDualNNF() {
    return new Ou(phi1.getDualNNF(), phi2.getDualNNF());
}
```
Formule.Ou
```
public Formule2 getNNF() {
    return new Ou(phi1.getNNF(), phi2.getNNF());
}
public Formule2 getDualNNF() {
    return new Et(phi1.getDualNNF(), phi2.getDualNNF());
}
```
Formule.Non
```
public Formule2 getNNF() {
    return phi1.getDualNNF();
}
public Formule2 getDualNNF() {
    return phi1.getNNF();
}
```
Formule.Proposition
```
public Formule2 getNNF() {
    return new Proposition(nom);
}
public Formule2 getDualNNF() {
    return new Non (new Proposition(nom));
}
```

5.2. **Forme clausale.** Une formule propositionnelle en forme normale négative n'a que des opérateurs $\vee$ et $\wedge$ en guise de nœuds internes, sauf potentiellement des $\neg$ juste au-dessus des propositions. En utilisant les lois de distributivité, on peut encore normaliser ces formules propositionnelles pour imposer que tous les $\wedge$ soient au-dessus des $\vee$ (forme normale conjonctive) ou vice-versa (forme normale disjonctive). La forme clausale est ensuite simplement une écriture « ensembliste » d'une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive, et est largement employée dans les algorithmes de recherche de modèle et de recherche de preuve.

Nous allons voir deux techniques pour mettre une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive. La première est très simple et s'appuie sur la loi de distributivité de $\vee$ sur $\wedge$ et construit une formule propositionnelle logiquement équivalente. Cependant, elle peut avoir un coût prohibitif en pratique, et nous verrons ensuite une technique qui construit une formule propositionnelle *équi-satisfiable*, au sens suivant :

Définition 5.3 (équi-satisfiable)**.** Soit φ et ψ deux formules propositionnelles. Elles sont *équi-satisfiables* si φ est satisfiable si et seulement si ψ est satisfiable – autrement dit, $\exists I \,.\, I \vDash \varphi$ si et seulement si $\exists I' \,.\, I' \vDash \psi$.

(Duparc, 2015, sec. 2.10.2), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 7.4.2)

5.2.1. *Forme clausale équivalente.* Soit φ une formule propositionnelle en forme normale négative. En utilisant de manière répétée la loi de distributivité de $\vee$ sur $\wedge$, on « pousse » les disjonctions vers le bas et on obtient une mise sous *forme normale conjonctive* $\mathrm{cnf}(\varphi)$ pour toute φ en forme normale négative :

$$\mathrm{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \mathrm{cnf}(\varphi \vee \psi') \ .$$

Une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive s'écrit donc sous la forme

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$$

où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux. Les sous-formules $C_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{1 \leq j \leq n_i} \ell_{i,j}$ sont appelées les *clauses* de $\mathrm{cnf}(\varphi)$. Quand les clauses sont des disjonctions d'au plus k littéraux, on dit que S est sous forme k-*clausale* (aussi appelée « k-CNF »). Par exemple, la formule propositionnelle $\varphi_{\text{ex}} = (P \vee \neg Q) \wedge P$ de la figure 1 est déjà sous forme normale conjonctive : $\mathrm{cnf}(\varphi_{\text{ex}}) = \varphi_{\text{ex}}$. Elle est composée de deux clauses : $P \vee \neg Q$ et P ; comme ces deux clauses contiennent chacune au plus deux littéraux, c'est une formule 2-clausale.

Par les lois d'idempotence de $\vee$, de commutativité de $\vee$ et d'associativité de $\vee$, chaque clause peut-être vue comme un ensemble de littéraux, pour lequel les notations ensemblistes $\in$ et $\subseteq$ s'appliquent ; par exemple, la clause $P \vee Q \vee \neg R$ peut être vue comme l'ensemble de littéraux $\{P, Q, \neg R\}$. De même, par les lois d'idempotence de $\wedge$, de commutativité de $\wedge$ et d'associativité de $\wedge$, on peut voir une formule propositionnelle en forme normale conjonctive comme un ensemble de clauses : φ donnée, on note $\mathrm{Cl}(\varphi)$ l'ensemble des clauses de $\mathrm{cnf}(\varphi)$ (où chaque clause est vue comme un ensemble) ; on appelle cela sa *forme clausale*. Pour la formule propositionnelle $\varphi_{\text{ex}} = (P \vee \neg Q) \wedge P$ de la figure 1, $\mathrm{Cl}(\varphi_{\text{ex}}) = \{\{P, \neg Q\}, \{P\}\}$. L'ensemble de formules de l'exemple 3.13 peut aussi être vu comme une forme clausale

$$\{\{P, Q, \neg R\},\ \{Q, R\},\ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \{\neg P, \neg R\},\ \{P, \neg Q\}\} \ .$$

Exemple 5.4. Comme vu dans l'exemple 5.2, la formule duale de la loi de Peirce $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \wedge \neg P$ s'écrit $((P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge \neg P$. La mise sous forme conjonctive produit $(P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge \neg P$ et donc la forme clausale $\{\{P, P\}, \{\neg Q, P\}, \{\neg P\}\}$.

Exemple 5.5. La mise sous forme normale conjonctive peut avoir un coût exponentiel du fait des duplications de formules. Par exemple, la formule propositionnelle en forme normale disjonctive $(P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2) \vee (P_3 \wedge Q_3)$ a pour forme normale conjonctive

$$\begin{aligned}&(P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee Q_3) \wedge (P_1 \vee Q_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee Q_2 \vee Q_3)\\ \wedge\ &(Q_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (Q_1 \vee P_2 \vee Q_3) \wedge (Q_1 \vee Q_2 \vee P_3) \wedge (Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3) \ .\end{aligned}$$

Cela correspond à la forme clausale

$$\begin{aligned}&\{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_2, Q_3\}, \{P_1, Q_2, P_3\}, \{P_1, Q_2, Q_3\},\\ &\{Q_1, P_2, P_3\}, \{Q_1, P_2, Q_3\}, \{Q_1, Q_2, P_3\}, \{Q_1, Q_2, Q_3\}\} \ .\end{aligned}$$

Sa généralisation $\bigvee_{1 \leq i \leq n} P_i \wedge Q_i$ a pour forme normale conjonctive $\bigwedge_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} \bigvee_{1 \leq i \leq n} \ell_{J,i}$ où $\ell_{J,i} = P_i$ si $i \in J$ et $\ell_{J,i} = Q_i$ sinon.

5.2.2. *Évaluation des formules sous forme clausale.* À noter que, dans le cas de formules propositionnelles sous forme clausale, il est très aisé de vérifier si une clause C est satisfaite ou non par une interprétation : $I \vDash C$ si et seulement s'il existe $\ell \in C$ tel que $I \vDash \ell$. Cela suggère le pseudo-code suivant pour évaluer la valeur de vérité d'une clause C sous une interprétation I :

Fonction `evalueclause`(C, I)
1 **pour tous les** $\ell \in C$ **faire**
2 **si** $I \vDash \ell$ **alors retourner** $\top$
3 **retourner** $\bot$

Par suite, pour une formule propositionnelle sous forme clausale, c'est-à-dire un ensemble de clauses F, $I \vDash F$ si et seulement si $\forall C \in F, I \vDash C$:

Fonction `evalueclausal`(F, I)
1 $v := \top$
2 **pour tous les** $C \in F$ **faire**
3 $v := (v \wedge$ `evalueclause`$(C, I))$
4 **retourner** v

(Perifel, 2014, prop. 3-Z), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, exo. 2.23), (David, Nour et Raffalli, 2003, def. 7.4.15), (Carton, 2008, p. 191), (Harrisson, 2009, sec. 2.8)

5.2.3. *Forme clausale équi-satisfiable.* En général, étant donné une formule propositionnelle φ en forme normale négative, on peut construire en temps linéaire une formule équi-satisfiable sous forme clausale.

Pour chaque sous-formule φ' de φ, on introduit pour cela une proposition fraîche $Q_{\varphi'} \notin \mathcal{P}_0(\varphi)$ et on définit la formule propositionnelle

$$\psi_{\varphi'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P & \text{si } \varphi' = P \ , \\ \neg P & \text{si } \varphi' = \neg P \ , \\ Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2 \ , \\ Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2} & \text{si } \varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \ . \end{cases}$$

Dans le cadre de la mise sous forme clausale, cette transformation est parfois appelée « transformation de Tseitin », qui historiquement ne suppose pas φ sous forme normale négative et utilise des équivalences $Q_{\varphi'} \Leftrightarrow \psi_{\varphi'}$ au lieu des implications $Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'}$.

La formule propositionnelle désirée est alors $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$. Cette formule propositionnelle a deux propriétés remarquables :

(1) elle est sous forme *3-clausale* : c'est en effet une conjonction où les implications comme $(\neg Q_{\varphi'} \vee Q_{\varphi_1}) \wedge (\neg Q_{\varphi'} \vee Q_{\varphi_2})$ si $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ et comme $(\neg Q_{\varphi'} \vee Q_{\varphi_1} \vee Q_{\varphi_2})$ si $\varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

(2) sa représentation arborescente est de *taille linéaire* en la taille de la formule φ : il y a une implication $Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'}$ par sous-formule de φ, et chacune de ces implications est de taille bornée par une constante.

Proposition 5.6. *Les formules propositionnelles φ et $\psi \stackrel{\text{def}}{=} Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule de } \varphi} (Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$ sont équi-satisfiables.*

Démonstration. Supposons φ satisfaite par une interprétation I. On étend cette interprétation en associant, pour chaque sous-formule φ', $[\![\varphi']\!]^I$ à la proposition $Q_{\varphi'}$: $I' \stackrel{\text{def}}{=} I[[\![\varphi']\!]^I / Q_{\varphi'}]_{\varphi'}$. Montrons que $I' \vDash \psi$ et donc que ψ est satisfiable. Il suffit de montrer que chacune des clauses de ψ est satisfaite par I'.

Tout d'abord, comme $I \vDash \varphi$, $I' \vDash Q_\varphi$. Puis on montre par analyse de cas que, pour toute sous-formule φ', on a $I' \vDash Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'}$.

- cas $\varphi' = P$: on veut montrer que $I' \vDash Q_P \Rightarrow P$. Supposons pour cela que $I' \vDash Q_P$. Alors par définition de I', $I \vDash P$. Toujours par définition de I', $I' \vDash P$ comme désiré.
- cas $\varphi' = \neg P$: on veut montrer que $I' \vDash Q_{\neg P} \Rightarrow \neg P$. Supposons pour cela que $I' \vDash Q_{\neg P}$. Alors par définition de I', $I \vDash \neg P$. Toujours par définition de I', $I' \vDash \neg P$ comme désiré.
- cas $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$: on veut montrer que $I' \vDash Q_{\varphi'} \Rightarrow Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2}$. Supposons pour cela que $I' \vDash Q_{\varphi'}$. Alors par définition de I', $I \vDash \varphi'$, donc $I \vDash \varphi_1$ et $I \vDash \varphi_2$. Toujours par définition de I', on a donc $I' \vDash Q_{\varphi_1}$ et $I' \vDash Q_{\varphi_2}$ comme désiré.
- cas $\varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2$: on fait une analyse similaire.

Inversement, supposons ψ satisfaite par une interprétation I'. On montre par induction sur les sous-formules φ' de φ que $I' \vDash Q_{\varphi'}$ implique $I' \vDash \varphi'$; comme $I' \vDash Q_\varphi$ on aura bien $I' \vDash \varphi$ et donc φ satisfiable.

Pour les cas de base $\varphi' = P$ (resp. $\varphi' = \neg P$), on a par hypothèse $I' \vDash Q_P \Rightarrow P$ (resp. $I' \vDash Q_{\neg P} \Rightarrow \neg P$) et donc $I' \vDash Q_P$ implique $I \vDash P$ (resp. $I' \vDash \neg P$). Pour l'étape d'induction,

- si $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, $I' \vDash Q_{\varphi'}$ implique $I' \vDash Q_{\varphi_1}$ et $I' \vDash Q_{\varphi_2}$ (car par hypothèse $I' \vDash Q_{\varphi'} \Rightarrow (Q_{\varphi_1} \wedge Q_{\varphi_2})$), qui implique $I' \vDash \varphi_1$ et $I' \vDash \varphi_2$ (par hypothèse d'induction), qui implique $I' \vDash \varphi'$;
- si $\varphi' = \varphi_1 \vee \varphi_2$, on fait une analyse similaire. □

💬 *La preuve de la proposition 5.6 montre en fait que si ψ est satisfiable, alors elle l'est par une extension d'un modèle de φ.*

Corollaire 5.7. *Pour toute formule propositionnelle, on peut construire en temps déterministe linéaire une formule équi-satisfiable sous forme 3-CNF.*

Exemple 5.8. Reprenons la formule propositionnelle de l'exemple 5.5 pour $n = 3$: la formule $\bigvee_{1 \leq i \leq 3} P_i \wedge Q_i$ est représentée dans la figure 3, où l'on a annoté chacune des sous-formules avec des noms de propositions en orange.

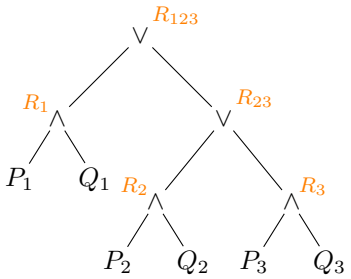


FIGURE 3. La formule propositionnelle $\bigvee_{1 \leq i \leq 3} P_i \wedge Q_i$ annotée.

Une formule propositionnelle en forme normale conjonctive équi-satisfiable (légèrement simplifiée par rapport à la transformation ci-dessus) est

$$R_{123} \wedge (\neg R_{123} \vee R_1 \vee R_{23}) \wedge (\neg R_{23} \vee R_2 \vee R_3) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (\neg R_i \vee P_i) \wedge (\neg R_i \vee Q_i) \,,$$

que l'on peut simplifier en

$$(R_1 \vee R_2 \vee R_3) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (\neg R_i \vee P_i) \wedge (\neg R_i \vee Q_i) \,.$$

La forme clausale correspondante est

$$\{\{R_1, R_2, R_3\}, \{\neg R_1, P_1\}, \{\neg R_1, Q_1\}, \{\neg R_2, P_2\}, \{\neg R_2, Q_2\}, \{\neg R_3, P_3\}, \{\neg R_3, Q_3\}\} \,.$$

5.2.4. *Format DIMACS.* Les solveurs SAT employent un format de fichier standard pour les formules propositionnelles en forme clausale, appelé « format DIMACS » du nom du *Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* qui avait organisé les premières compétitions internationales. Voici par exemple comment représenter la forme clausale de l'exemple 5.8 en format DIMACS :

example-5-8.cnf

```
c exemple 5.8 en format DIMACS
c   table des propositions
c   R₁  P₁  Q₁  R₂  P₂  Q₂  R₃  P₃  Q₃
c   1   2   3   4   5   6   7   8   9
c
```

```
p cnf 9 7
 1 4 7 0
-1 2 0
-1 3 0
-4 5 0
-4 6 0
-7 8 0
-7 9 0
```

Le fichier commence par cinq lignes de commentaires, qui débutent par le caractère « c ». En format DIMACS, les propositions sont représentées par des entiers strictement positifs, et on a ajouté en commentaire comment les noms des propositions de l'exemple 5.8 ont été numérotés pour faciliter la lecture de l'exemple (mais rien n'impose de le faire). La sixième ligne est le véritable début du fichier, qui commence par « p cnf » suivi de deux nombres :

— « 9 » correspond au nombre de propositions utilisées dans la forme clausale ;
— « 7 » correspond au nombre de clauses.

Les clauses occupent les lignes suivantes. Chaque clause se termine par le caractère « 0 », et consiste en une séquence de nombres entiers non nuls : un nombre positif n désigne la proposition numérotée par n, tandis qu'un nombre négatif $-n$ désigne la négation de cette proposition. Par exemple, à la huitième ligne, « -1 » correspond à $\neg R_1$, tandis que « 2 » correspond à P_1.

5.2.5. *Implémentation de la forme clausale en Java.* Voyons comment implémenter la mise sous forme clausale équi-satisfiable en Java. Dans l'esprit du format DIMACS, nous travaillons maintenant avec une représentation des littéraux comme des entiers. Nous allons représenter une clause comme un objet de la classe `Collection<Integer>`. Voici une classe pour les clauses.

Clause
```
import java.util.*;
public class Clause extends HashSet<Integer> {
    public Clause () {
        super();
    }
    // ⋮
}
```

Une forme clausale peut être représentée comme un objet de `Collection<Clause>`. Voici une implémentation possible.

DIMACS
```
import java.util.*;
public class DIMACS {
    protected int nprops;                    // nombre de propositions
    private Map<String,Integer> propnames; // nom de proposition ↦ entier
    private Collection<Clause> clauses;     // ensemble de clauses
    public DIMACS (int nprops, Map<String,Integer> propnames) {
        this.nprops = nprops;
        this.propnames = propnames;
        this.clauses = new HashSet<Clause>();
    }
    public boolean add(Clause c) {
        return clauses.add(c);
    }
    // ⋮
}
```

Pour construire un objet de la classe DIMACS depuis une formule propositionnelle, nous allons travailler sur une formule en forme normale négative. On suppose pour cela et que l'on dispose des deux méthodes suivantes.

Formule
```
protected abstract int setid(int n, Map<String,Integer> p);
protected int getid() { /* ... */ }
```

La première méthode attribue des entiers strictement positifs distincts à chaque nœud interne de la formule, ainsi qu'à chaque occurrence d'une même proposition ; de plus, la table p est mise à jour pour se souvenir de quel nom de proposition est associé à quel entier. La seconde retourne simplement l'entier associé au nœud courant.

L'étape suivante est de construire la formule propositionnelle $\psi = Q_\varphi \wedge \bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule de } \varphi}(Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$, ce qui est fait par la méthode `getDIMACS` ci-dessous.

Formule
```
protected abstract void addSousClauses(DIMACS clauses);
public DIMACS getDIMACS () {
    // passage sous forme normale négative
    Formule nnf = this.getNNF();
    // table qui associera un entier > 0 à chaque proposition
    Map<String,Integer> propnames = new HashMap<String,Integer>();
    // chaque nœud de `nnf' reçoit un entier non nul
    int nprops = nnf.setid(0, propnames);
    // ensemble initialement vide de clauses
    DIMACS dimacs = new DIMACS(nprops, propnames);
    // ajout de ⋀_{φ' sous-formule de φ}(Q_{φ'} ⇒ ψ_{φ'})
    nnf.addSousClauses(dimacs);
    // ajout de la clause Q_φ
    Set<Integer> c = new HashSet<Integer>();
    c.add(nnf.getid());
    dimacs.add(c);
    return dimacs;
}
```

L'idée ici est que `Formule.addSousClauses(clauses)` ajoute à `clauses` les clauses de la conjonction $\bigwedge_{\varphi' \text{ sous-formule de } \varphi}(Q_{\varphi'} \Rightarrow \psi_{\varphi'})$, et est implémentée différemment selon le type de formule.

Formule.Et
```
protected void addSousClauses(DIMACS clauses) {
    phi1.addSousClauses(clauses);
    phi2.addSousClauses(clauses);
    // clause ¬Q_{φ'} ∨ Q_{φ1}
    Set<Integer> c1 = new HashSet<Integer>();
    c1.add(new Integer(-this.getid()));
    c1.add(new Integer(phi1.getid()));
    // clause ¬Q_{φ'} ∨ Q_{φ2}
    Set<Integer> c2 = new HashSet<Integer>();
    c2.add(new Integer(-this.getid()));
    c2.add(new Integer(phi2.getid()));
    // ajout des nouvelles clauses
    clauses.add(c1);
    clauses.add(c2);
```

Formule.Ou
```
protected void addSousClauses(DIMACS clauses) {
    phi1.addSousClauses(clauses);
    phi2.addSousClauses(clauses);
    // clause ¬Q_φ' ∨ Q_φ1 ∨ Q_φ2
    Set<Integer> c = new HashSet<Integer>();
    c.add(new Integer(-this.getid()));
    c.add(new Integer(phi1.getid()));
    c.add(new Integer(phi2.getid()));
    // ajout de la nouvelle clause
    clauses.add(c);
}
```
Formule.Non
```
protected void addSousClauses(DIMACS clauses) {
    // vérifie que nous sommes en forme normale négative
    assert (phi1.getClass() == Formule.Proposition.class);
    phi1.addSousClauses(clauses);
    // clause ¬Q_φ' ∨ ¬P
    Set<Integer> c = new HashSet<Integer>();
    c.add(new Integer(-this.getid()));
    c.add(new Integer(-phi1.getid()));
    // ajout de la nouvelle clause
    clauses.add(c);
}
```
Formule.Proposition
```
protected void addSousClauses(DIMACS clauses) {
    // rien à faire
}
```

Enfin, voici une implémentation de `toString()` qui retourne une chaîne de caractères au format DIMACS.

Clause
```
public String toString() {
    String ret = "";
    for (Integer i : this)
        ret += i + " ";
    return ret + "0";
}
```
DIMACS
```
public String toString() {
    String out = "";
    // commentaires de début du fichier : table des numéros de propositions
    out += "c table des propositions\nc   ";
    for (Map.Entry<String,Integer> e : propnames.entrySet()) {
        String sid = e.getValue().toString();
        out += e.getKey();
        for (int i = 0; i < sid.length() - e.getKey().length(); i++)
            out += " ";
        out += " ";
    }
    out += "\nc   ";
    for (Map.Entry<String,Integer> e : propnames.entrySet()) {
        String sid = e.getValue().toString();
        out += sid;
```

```
        for (int i = 0; i < e.getKey().length() - sid.length(); i++)
            out += " ";
        out += " ";
    }
    // en-tête avec les nombres de propositions et de clauses
    out += "\np cnf "+ nprops +" "+ this.size() + "\n";
    // ajout des clauses au format DIMACS
    for (Clause c : clauses)
        ret += c + "\n";
    return out;
}
```

5.3. **Forme normale disjonctive.** Toujours en utilisant la distributivité, on obtient une mise sous *forme normale disjonctive* $\mathrm{dnf}(\varphi)$ pour toute φ en forme normale négative : *(Duparc, 2015, sec. 2.10.1)*

$$\mathrm{dnf}(\varphi \wedge (\psi \vee \psi')) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}((\psi \vee \psi') \wedge \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathrm{dnf}(\varphi \wedge \psi') \ .$$

Le résultat est une formule propositionnelle $\bigvee_{1\leq i\leq m} \bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ où les $\ell_{i,j}$ sont des littéraux.

Étant donnée une telle formule, déterminer si elle est satisfiable peut être effectué en temps linéaire (en supposant un hachage parfait des noms de propositions) : une conjonction $\bigwedge_{1\leq j\leq n_i} \ell_{i,j}$ de littéraux est en effet satisfiable si et seulement si elle ne contient pas à la fois une proposition P et sa négation $\neg P$.

Comme la mise sous forme normale conjonctive, cette transformation peut avoir un coût exponentiel. Cependant, et contrairement à ce que nous venons de voir pour la forme normale conjonctive en section 5.2.3, on ne peut pas espérer avoir un algorithme en temps polynomial pour calculer une formule propositionnelle sous forme normale disjonctive équi-satisfiable avec une formule donnée en entrée (sous réserve que P $\neq$ NP, une notion qui sera vue en cours de « calculabilité et complexité » en M1), puisque résoudre la satisfiabilité de cette forme normale disjonctive se fait ensuite en temps polynomial .

6. Modélisation

Résumé. De nombreux problèmes informatiques peuvent être exprimés comme la satisfiabilité d'une formule propositionnelle. Les *solveurs* SAT sont des logiciels dédiés à ce problème, qui prennent en entrée une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive (écrite au format DIMACS), et cherchent à répondre si la formule est satisfiable ou non.

6.1. **Utilisation de solveurs** SAT. Les solveurs SAT sont des programmes qui déterminent si une formule propositionnelle φ donnée est satisfiable ou non, et si oui, fournissent une interprétation I qui satisfait la formule, c'est-à-dire telle que $I \vDash \varphi$. Les solveurs SAT prennent en entrée une forme clausale $\mathrm{Cl}(\varphi)$ au format DIMACS (c.f. section 5.2.4).

6.1.1. *Utilisation de MiniSAT.* MiniSAT (`http://minisat.se/`) est un solveur SAT facile à installer puisqu'il existe des paquets pour distributions GNU/Linux. Une invocation sur le fichier DIMACS de la section 5.2.4 est « `minisat exemple-5-8.cnf exemple-5-8.modele` ». Dans le cas où l'ensemble de clauses fourni en entrée est satisfiable, une interprétation partielle est retournée :

example-5-8.modele

```
SAT
-1 2 3 -4 5 6 7 8 9 0
```

L'interprétation est retournée sous la forme d'une clause DIMACS, où les propositions associées à $\top$ apparaissent comme des entiers positifs et celles associées à $\bot$ comme des entiers négatifs.

En l'occurrence, l'interprétation en termes de l'exemple 5.8 est

$$[\bot/R_1, \top/P_1, \top/Q_1, \bot/R_2, \top/P_2, \top/Q_2, \top/R_3, \top/P_3, \top/Q_3] .$$

En terme de la formule originale de l'exemple 5.5, nous avons vu dans la preuve de la proposition 5.6 qu'il suffit d'ignorer les propositions fraîches ajoutées par la mise sous forme équisatisfiable ; l'interprétation partielle suivante est donc un modèle de $(P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2) \vee (P_3 \wedge Q_3)$:

$$[\top/P_1, \top/Q_1, \top/P_2, \top/Q_2, \top/P_3, \top/Q_3] .$$

6.1.2. *Utilisation de Sat4j dans un programme Java.* Sat4j (`http://www.sat4j.org/`) est un solveur SAT plus récent écrit en Java, qui intègre les heuristiques utilisées par de nombreux solveurs comme MiniSAT et Glucose. Il peut être appelé directement depuis un programme Java qui construit les clauses successives comme des objets de type `int[]`. Voici comment appeler Sat4j depuis notre classe `DIMACS` :

DIMACS

```
import org.sat4j.minisat.*;
import org.sat4j.specs.*;
import org.sat4j.core.*;
// ⋮
    private int[] interpretation;
    public int[] modele() {
        return interpretation;
    }
    public boolean satisfiable() {
        ISolver solver = SolverFactory.newDefault();
        // initialisation du solver
        solver.newVar(nprops);
        solver.setExpectedNumberOfClauses(clauses.size());
        try {
            for (Clause c : clauses) // ajout des clauses
                solver.addClause(new VecInt(c.stream()
                    .mapToInt(i->i).toArray()));
            IProblem problem = solver;
            boolean ret = problem.isSatisfiable();
            if (ret)
                interpretation = problem.model();
            return ret;
        } catch (ContradictionException e) {
            return false;
        } catch (TimeoutException e) {
            System.err.println("timeout!");
            return false;
        }
    }
```

6.2. **Exemple de modélisation : accessibilité dans un graphe orienté.** Commençons par un exemple très simple de modélisation d'un problème sous la forme d'une question de satisfiabilité d'une formule propositionnelle : celui de l'accessibilité dans un graphe fini orienté. De manière plus concrète, considérons le graphe de la figure 4, qui représente le graphe de circulation automobile autour du campus des Grands Moulins [9]. Le problème informatique que l'on souhaite résoudre est l'existence d'un chemin d'un sommet du graphe à un autre. Par exemple, on peut aller du sommet 14 au sommet 1, mais l'inverse n'est pas possible.

💬 *Comme vu dans le cours d'« éléments d'algorithmique », le problème d'accessibilité peut être résolu efficacement par des algorithmes de parcours de graphe.*

💬 *Le problème d'accessibilité dans un graphe orienté est un problème classique en complexité algorithmique, que vous verrez dans le cours « calculabilité et complexité » ; c.f. (Perifel, 2014, prop. 4AL) et (Arora et Barak, 2009, thm. 4.18).*

9. Données géographiques © 2019 Google.

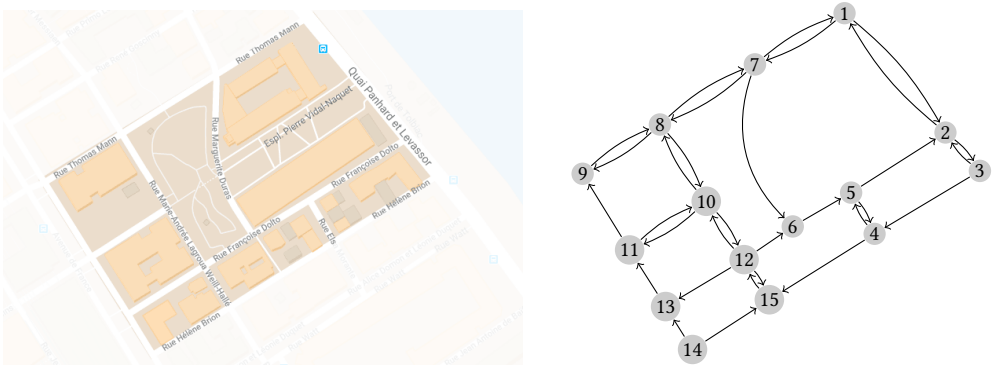


FIGURE 4. Plan du campus[9] et graphe de circulation automobile.

L'idée générale de la modélisation à l'aide de formules propositionnelles est d'utiliser une proposition par sommet du graphe et d'encoder la relation d'accessibilité à l'aide d'implications. Dans le cas de la figure 4 avec le sommet 1 en guise de source, cela signifie construire l'ensemble de propositions $\{P_1, P_2, \ldots, P_{15}\}$ et l'ensemble F suivant de formules propositionnelles, qui contient une implication $P_u \Rightarrow P_v$ si et seulement s'il existe un arc (u, v) dans le graphe.

$$
\begin{aligned}
F \stackrel{\text{def}}{=} \{ \quad & P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_1 \Rightarrow P_7, \quad P_2 \Rightarrow P_1, \quad P_2 \Rightarrow P_2, \quad P_3 \Rightarrow P_2, \quad P_3 \Rightarrow P_4, \\
& P_4 \Rightarrow P_5, \quad P_4 \Rightarrow P_{15}, \quad P_5 \Rightarrow P_2, \quad P_5 \Rightarrow P_4, \quad P_6 \Rightarrow P_5, \quad P_7 \Rightarrow P_1, \\
& P_7 \Rightarrow P_6, \quad P_7 \Rightarrow P_8, \quad P_8 \Rightarrow P_7, \quad P_8 \Rightarrow P_9, \quad P_8 \Rightarrow P_{10}, \quad P_9 \Rightarrow P_8, \\
& P_{10} \Rightarrow P_8, \quad P_{10} \Rightarrow P_{11}, \quad P_{10} \Rightarrow P_{12}, \quad P_{11} \Rightarrow P_9, \quad P_{11} \Rightarrow P_{10}, \quad P_{12} \Rightarrow P_{10}, \\
& P_{12} \Rightarrow P_{13}, \quad P_{12} \Rightarrow P_{15}, \quad P_{13} \Rightarrow P_{11}, \quad P_{14} \Rightarrow P_{13}, \quad P_{14} \Rightarrow P_{15}, \quad P_{15} \Rightarrow P_{12} \}
\end{aligned}
$$

Cet ensemble F pourrait aussi s'écrire comme un ensemble de clauses, puisque chaque formule propositionnelle $P_u \Rightarrow P_v$ est équivalente à $\neg P_u \vee P_v$. On peut observer que toutes les clauses de F utilisent au plus deux littéraux : la satisfiabilité de tels ensembles de clauses est connu sous le nom de « problèmes 2SAT » et peut être résolue efficacement.

Cet ensemble de clauses va nous permettre de répondre au problème d'accessibilité grâce à la propriété suivante.

💬 *Les liens entre accessibilité et* 2SAT *sont bien connus, voir (CARTON, 2008, thm. 4.47), (PAPADIMITRIOU, 1993, pp. 184–187) ou (KNUTH, 2008, sec. 7.1.1, thm. K).*

Propriété 6.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé et $s \in V$ un sommet source. Soit $\{P_v \mid v \in V\}$ l'ensemble des propositions associé à son ensemble de sommets et $F \stackrel{\text{def}}{=} \{\neg P_u \vee P_v \mid (u, v) \in E\}$ l'ensemble de clauses associé à son ensemble d'arcs. Alors, pour tout sommet $v \in V$, $F \cup \{P_s\} \vDash P_v$ si et seulement s'il existe un chemin dirigé de s à v dans G.*

Dès lors, il existe un chemin dirigé d'un sommet source $s \in V$ à un sommet cible $t \in V$ si et seulement si $F \cup \{P_s\} \vDash P_t$. Autrement dit, par le lemme 4.1 de déduction, un tel chemin existe si et seulement si $F \cup \{P_s\} \cup \{\neg P_t\}$ est insatisfiable.

Voici par exemple un fichier au format DIMACS qui vérifie que le sommet 14 n'est pas accessible depuis le sommet 1 dans le graphe de la figure 4.

accessibilite.cnf

```
p cnf 15 33
c  arcs du graphe
 -1  2 0
 -1  7 0
 -2  1 0
 -2  3 0
 -3  2 0
```

```
 -3   4 0
 -4   5 0
 -4  15 0
 -5   2 0
 -5   4 0
 -6   5 0
 -7   1 0
 -7   8 0
 -7   6 0
 -8   7 0
 -8   9 0
 -8  10 0
 -9   8 0
-10   8 0
-10  11 0
-10  12 0
-11   9 0
-11  10 0
-12   6 0
-12  10 0
-12  13 0
-12  15 0
-13  11 0
-14  13 0
-14  15 0
-15  12 0
c  sommet source
1 0
c  sommet destination
-14 0
```

En général, pour un graphe fini dirigé $G = (V, E)$, un sommet source $s \in V$ et un sommet cible $t \in V$, il existe un chemin dirigé de s à t si et seulement si la formule propositionnelle suivante n'est pas satisfiable :

$$P_s \wedge \neg P_t \wedge \bigwedge_{(u,v)\in E} (\neg P_u \vee P_v)\ . \tag{4}$$

6.3. **Exemple de modélisation : grammaires algébriques.** Comme vu dans le cours d'« analyse de données structurées » en L2, une grammaire algébrique est un formalisme pour décrire formellement la syntaxe concrète d'un langage. Une grammaire est définie par un ensemble N de symboles *non-terminaux* qui contient un symbole $S \in N$ dit *initial*, un ensemble Σ de symboles *terminaux* disjoint de N, et un ensemble P de règles de la forme $A \to \alpha$ où $A \in N$ et $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Exemple 6.2. Considérons la grammaire ayant pour ensemble de symboles non-terminaux $N \stackrel{\text{def}}{=} \{S, A, B, C, D\}$ où S est initial, pour ensemble de symboles terminaux $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a\}$, et pour ensemble de règles

$$\begin{aligned} S &\to ABC \mid AD \\ D &\to BD \\ A &\to B \\ B &\to C \\ C &\to a \end{aligned}$$

Pour rappel, on définit une relation de dérivation $\to$ entre séquences dans $(N \cup \Sigma)^*$ par $\beta A \gamma \to \beta \alpha \gamma$ s'il existe une règle $A \to \alpha \in P$ et pour tous $\beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*$. Un symbole $X \in N \cup \Sigma$ est *productif* s'il existe $w \in \Sigma^*$ tel que $X \to^* w$. Cette notion est centrale pour les grammaires algébriques puisque le langage de la grammaire est non vide si et seulement si S est productif.

Pour une grammaire donnée, on peut déterminer si un de ses non-terminaux est productif ou non à l'aide de formules propositionnelles. On définit pour cela l'ensemble de propositions $\{Q_X \mid X \in N \cup \Sigma\}$. On associe à la grammaire l'ensemble

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{(Q_{X_1} \wedge \cdots \wedge Q_{X_m}) \Rightarrow Q_A \mid A \to X_1 \cdots X_m \in P\} \cup \{Q_a \mid a \in \Sigma\}$$

qui encode ses règles et ses terminaux. Pour la grammaire de l'exemple 6.2, on aura

$$\begin{aligned} F = \{ \quad & Q_A \wedge Q_B \wedge Q_C \Rightarrow Q_S, \quad Q_A \wedge Q_D \Rightarrow Q_S, \quad Q_B \wedge Q_D \Rightarrow Q_D, \\ & Q_B \Rightarrow Q_A, \quad Q_C \Rightarrow Q_B, \quad Q_a \Rightarrow Q_C, \quad Q_a\} \end{aligned}$$

À noter que chacune des formules $(Q_{X_1} \wedge \cdots \wedge Q_{X_m}) \Rightarrow Q_A$ peut être vue comme une clause $\neg Q_{X_1} \vee \cdots \vee \neg Q_{X_m} \vee Q_A$. De surcroît, toutes les clauses de F ont la propriété de n'avoir au plus qu'un littéral non négatif. On appelle de telles clauses des *clauses de* HORN ; le problème de satisfiabilité associé est appelé HornSAT et peut être résolu en temps linéaire.

(KNUTH, 2008, sec. 7.1.1, algo. C)

Ici, le lien entre la productivité d'un symbole $X \in (N \cup \Sigma)$ et l'ensemble de clauses de HORN F est le suivant.

Propriété 6.3. *Soit $G = (N, \Sigma, P, S)$ une grammaire algébrique. Soit $\{Q_X \mid X \in N \cup \Sigma\}$ l'ensemble des propositions associées et $F \stackrel{\text{def}}{=} \{\neg Q_{X_1} \vee \cdots \vee \neg Q_{X_m} \vee Q_A \mid A \to X_1 \cdots X_m \in P\} \cup \{Q_a \mid a \in \Sigma\}$ l'ensemble de clauses de HORN associé. Alors, pour tout symbole $X \in N \cup \Sigma$, $F \vDash Q_X$ si et seulement si X est productif dans G.*

Autrement dit, X est productif si et seulement si $F \cup \{\neg Q_X\}$ est insatisfiable.

Voici par exemple un fichier au format DIMACS qui vérifie que le non-terminal D n'est pas productif dans la grammaire de exemple 6.2.

grammaire.cnf

```
c règles de grammaire :
c       S  →A B C  |  A D
c       D  →B D
c       A  →B
c       B  →C
c       C  →a
c table des propositions
c   S A B C D a
c   1 2 3 4 5 6
p cnf 6 8
6 0
1 -2 -3 -4 0
1 -2 -5 0
5 -3 -5 0
2 -3 0
3 -4 0
4 -6 0
c  symbole dont on teste la productivité
-5 0
```

En général, pour une grammaire algébrique $G = (N, \Sigma, P, S)$ et un symbole $X \in N \cup \Sigma$, X est productif si et seulement si la formule propositionnelle suivante n'est pas satisfiable :

$$\neg Q_X \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} Q_a \wedge \bigwedge_{A \to X_1 \cdots X_m \in P} (\neg Q_{X_1} \vee \cdots \vee \neg Q_{X_m} \vee Q_A) \,. \tag{5}$$

FIGURE 5. La carte des territoires de l'Australie[10] et le graphe associé.

6.4. **Exemple de modélisation : coloration de graphe.** Les exemples des sections 6.2 et 6.3 illustraient que des problèmes informatiques pouvaient être résolus de manière efficace en les encodant comme des problèmes de satisfiabilité *restreints* comme 2SAT ou HornSAT, pour lesquels il existe des algorithmes efficaces *dans le pire des cas*. L'exemple qui nous intéresse maintenant est d'une autre nature : on ne connaît pas d'algorithme efficace dans le pire des cas pour ce type de problèmes – et on soupçonne même qu'il n'en existe pas – *mais* les solveurs SAT permettent de résoudre ces problèmes dans les cas qui apparaissent en pratique.

Notre problème est le suivant : est-il possible de colorier la carte de l'Australie (voir la carte [10]) avec seulement trois couleurs, disons rouge, vert et bleu, de telle sorte que deux territoires adjacents aient des couleurs différentes ? Ce problème est en réalité un problème de coloriage d'un graphe non orienté comme illustré à droite de la figure 5 : peut-on associer une couleur à chaque sommet du graphe, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur ? La réponse est « oui » et un tel coloriage est donné dans la figure 6.

Notre objectif est cependant de trouver automatiquement une telle solution pour n'importe quel graphe fini non orienté. Voyons comment procéder pour notre exemple.

Contrairement aux encodages des problèmes des sections 6.2 et 6.3, ici nous allons avoir besoin de propositions qui représentent une information plus complexe, à savoir qu'un sommet donné du graphe est colorié d'une certaine couleur. Nous travaillons donc des propositions $P_{v,c}$ où v est un sommet du graphe, c'est-à-dire un territoire dans $\{$WA, NT, SA, QLD, NSW, VIC, TAS$\}$ et c est une couleur dans $\{R, V, B\}$. Voici le début d'un fichier au format DIMACS qui encode notre problème.

10. Auteur de la carte à gauche de la figure 5 : Lokal_Profil, licence [CC BY-SA 3.0], via *Wikimedia Commons*. Les territoires sont : *Western Australia* (WA), *Northern Territory* (NT), *South Australia* (SA), *Queensland* (QLD), *New South Wales* (NSW), *Victoria* (VIC) et *Tasmania* (TAS) ; on a ignoré le petit territoire de la capitale.

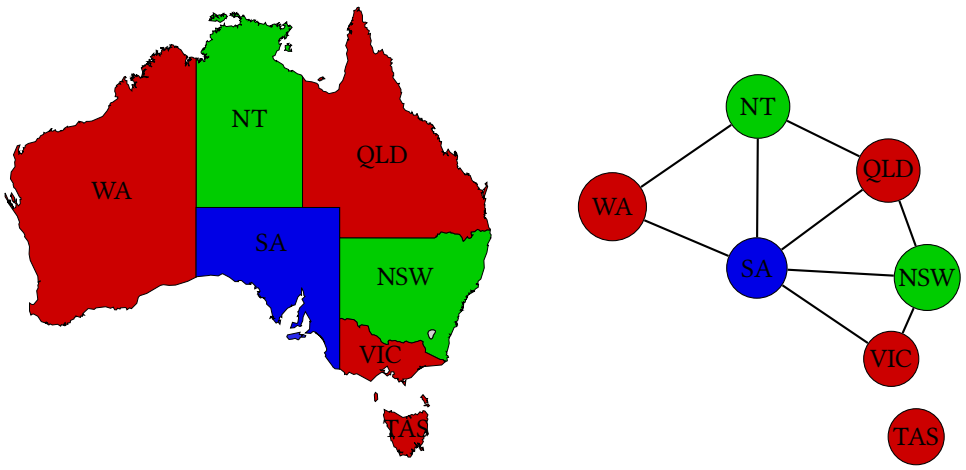


FIGURE 6. Un coloriage de la carte des territoires de l'Australie[10] et du graphe associé.

coloriage.cnf

```
c table des propositions
c  WA,R WA,V WA,B NT,R NT,V NT,V SA,R SA,V SA,B QLD,R QLD,V QLD,B
c  1    2    3    4    5    6    7    8    9    10    11    12
c  NSW,R NSW,V NSW,B VIC,R VIC,V VIC,B TAS,R TAS,V TAS,B
c  13    14    15    16    17    18    19    20    21
p cnf 21 55
```

Nous allons maintenant construire une formule propositionnelle qui sera satisfiable si et seulement s'il existe un coloriage du graphe. Toutes les interprétations I des propositions de la forme (e, c) pour $e \in \{\text{WA, NT, SA, QLD, NSW, VIC, TAS}\}$ et $c \in \{R, V, B\}$ ne sont pas des coloriages. Plusieurs conditions doivent en effet être remplies.

Au moins une couleur par sommet. Nous ne devons pas laisser un territoire de l'Australie non colorié. Cela correspond à vérifier que pour chaque territoire $v \in \{\text{WA, NT, SA, QLD, NSW, VIC, TAS}\}$, au moins l'une des propositions parmi $P_{v,R}$, $P_{v,V}$ et $P_{v,B}$ est vraie dans I, soit la formule propositionnelle $P_{v,R} \vee P_{v,V} \vee P_{v,B}$. Voici les clauses correspondantes au format DIMACS.

coloriage.cnf

```
c  au moins une couleur par sommet
 1  2  3 0
 4  5  6 0
 7  8  9 0
10 11 12 0
13 14 15 0
16 17 18 0
19 20 21 0
```

Au plus une couleur par sommet. En effet, par exemple, le territoire de *New South Wales* ne peut pas être colorié à la fois en rouge et en vert. Cela correspond à vérifier que, pour chaque territoire $v \in \{\text{WA, NT, SA, QLD, NSW, VIC, TAS}\}$ et pour chaque paire de couleurs distinctes $c \neq c'$ issues de $\{R, V, B\}$, on n'aie pas à la fois $P_{v,c}$ et $P_{v,c'}$ vraies dans I, soit la formule propositionnelle $\neg(P_{v,c} \wedge P_{v,c'})$, qui est équivalente à la clause $\neg P_{v,c} \vee \neg P_{v,c'}$. Voici les clauses correspondantes au format DIMACS pour WA, NT et SA.

coloriage.cnf
```
c  au plus une couleur par sommet
 -1  -2 0
 -1  -3 0
 -2  -3 0
 -4  -5 0
 -4  -6 0
 -5  -6 0
 -7  -8 0
 -7  -9 0
 -8  -9 0
```

Avec ces deux types de clauses combinées, on garantit qu'il existe une *injection* entre les sommets du graphe et les couleurs.

Couleurs distinctes pour sommets adjacents. Enfin, nous devons vérifier que pour toute paire (u, v) de territoires adjacents, leurs couleurs associées sont distinctes, c'est-à-dire que I vérifie $\neg(P_{u,c} \wedge P_{v,c})$ pour tout arête (u, v) et toute couleur c ; cela s'écrit sous forme clausale comme $\neg P_{u,c} \vee \neg P_{v,c}$. Par exemple, pour les arêtes (WA, NT), (WA, SA) et (NT, SA), on aura au format DIMACS :

coloriage.cnf
```
c  pas la même couleur sur deux sommets adjacents
c  arête (WA,NT)
 -1  -4 0
 -2  -5 0
 -3  -6 0
c  arête (WA,SA)
 -1  -7 0
 -2  -8 0
 -3  -9 0
c  arête (NT,SA)
 -4  -7 0
 -5  -8 0
 -6  -9 0
```

En général, pour un graphe fini non orienté $G = (V, E)$ et un ensemble de couleurs C, le graphe est coloriable si et seulement si la formule propositionnelle suivante est satisfiable :

$$\Big(\bigwedge_{v\in V}\bigvee_{c\in C} P_{v,c}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{v\in V}\bigwedge_{c\neq c'} (\neg P_{v,c} \vee \neg P_{v,c'})\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{(u,v)\in E}\bigwedge_{c\in C} (\neg P_{u,c} \vee \neg P_{v,c})\Big)\,. \tag{6}$$

7. Satisfiabilité et recherche de modèle

Résumé. Une manière d'implémenter un solveur SAT est d'utiliser l'*algorithme DPLL* dû à Davis, Putnam, Logemann et Loveland. Cet algorithme travaille par *simplification* d'ensembles de clauses : la simplification d'un ensemble de clauses par un littéral ℓ élimine les clauses qui contiennent ℓ et retire $\bar{\ell}$ des clauses restantes. L'algorithme DPLL simplifie en priorité par les littéraux *unitaires* (ℓ est unitaire s'il existe une clause qui ne contient que ce littéral) et les littéraux *purs* (ℓ est pur si le littéral $\bar{\ell}$ n'apparaît nulle part dans l'ensemble de clauses).

Le problème de *satisfiabilité* est le problème de décision suivant.

Problème (SAT).
entrée : une formule propositionnelle φ
question : φ est-elle satisfiable ?

Voir (Knuth, 2008, sec. 7.1.1), (Knuth, 2015, sec. 7.2.2.2) et (Kroening et Strichman, 2016, ch. 2) pour une présentation des aspects algorithmiques du problème de satisfiabilité, et (Perifel, 2014, thm. 3-V), (Arora et Barak, 2009, thm. 2.10), (Papadimitriou, 1993, thm. 8.2), (Carton, 2008, thm. 4.19) ou (Lassaigne et Rougemont, 2004, thm. 11.1) sur sa complexité.

Ce problème est résolu par les solveurs SAT ; de plus, si la réponse au problème est positive, ces solveurs fournissent une interprétation partielle I telle que $I \vDash \varphi$.

Dans de nombreuses utilisations de SAT, telles que les modélisations de la section 6, on suppose de plus que la formule φ est sous forme clausale, voire k-clausale pour un certain k fixé, auquel cas on parlera plutôt de « kSAT ». Comme vu dans le corollaire 5.7, SAT et 3SAT sont deux problèmes essentiellement équivalents.

7.1. **Recherche de modèle par énumération.** On peut résoudre automatiquement le problème SAT : puisque par la propriété 3.3, il suffit de trouver une interprétation partielle de domaine $\mathcal{P}_0(\varphi)$ qui satisfait φ, on peut simplement énumérer les $2^{|\mathcal{P}_0(\varphi)|}$ interprétations possibles. En termes de tables de vérité, cela revient à construire la table de φ et de tester si au moins une ligne met φ à $\top$.

On ne connaît pas d'algorithme pour SAT *qui travaille en temps polynomial dans le pire des cas – on soupçonne même qu'un tel algorithme en temps sous-exponentiel n'existe pas, ce qui est appelé l'«* exponential time hypothesis *».*

Exemple 7.1. Reprenons la forme clausale de l'exemple 3.13

$$F = \{\{P, Q, \neg R\},\ \{Q, R\},\ \{\neg P, \neg Q, R\},\ \{\neg P, \neg R\},\ \{P, \neg Q\}\}\ .$$

Sa table de vérité est donnée dans la table 6.

TABLE 6. La table de vérité de l'ensemble de clauses de l'exemple 3.13.

P	Q	R	$\{P, Q, \neg R\}$	$\{Q, R\}$	$\{\neg P, \neg Q, R\}$	$\{\neg P, \neg R\}$	$\{P, \neg Q\}$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

On voit dans cette table que chaque ligne, c'est-à-dire chaque interprétation partielle de domaine $\{P, Q, R\}$, contient au moins une entrée $\bot$ pour une des clauses de F. Par conséquent, la colonne pour F ne contient que des $\bot$: cette forme clausale est insatisfiable.

Plutôt que d'écrire explicitement la table de vérité, on peut aussi représenter les interprétations partielles de domaine $\mathcal{P}_0(\varphi)$ sous la forme d'un arbre : pour chaque proposition $P \in \mathcal{P}_0(\varphi)$, on branche sur les deux choix $I \vDash \neg P$ et $I \vDash P$. L'arbre correspondant pour l'exemple 7.1 est donné dans la figure 7.

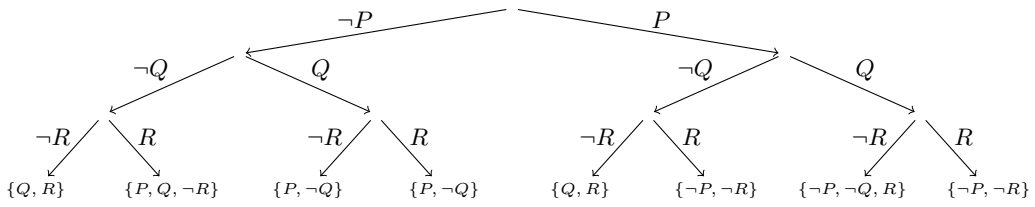


FIGURE 7. Un arbre de recherche de modèle pour l'exemple 7.1.

Chaque branche de l'arbre décrit une interprétation partielle sous la forme d'une liste de littéraux, et l'on a décoré chaque feuille de l'arbre par une clause non satisfaite par cette interprétation ; par exemple, la branche la plus à gauche étiquetée par $\neg P, \neg Q, \neg R$ correspond à l'interprétation partielle $[\bot/P, \bot/Q, \bot/R]$ (qui est la dernière ligne de la table 6), et cette interprétation ne satisfait pas la clause $\{Q, R\}$.

Cette représentation sous forme d'arbre de recherche a deux intérêts :
— d'une part, elle est moins longue à écrire à la main qu'une table de vérité,
— d'autre part, elle suggère un algorithme récursif qui explore l'arbre pour tester si une formule sous forme clausale est satisfiable ou non : chaque nœud interne de l'arbre correspond à un appel récursif d'une fonction pour tester la satisfiabilité, et aux feuilles on vérifie s'il existe au moins une clause satisfaite par l'interprétation partielle pour cette branche. Le pseudo-code ci-dessous décrit un tel algorithme, qui prend en entrée un ensemble de clauses F et une interprétation partielle I de domaine initialement vide.

Fonction `satisfiable`(F, I)
1 **si** $\mathrm{dom}(I) = \mathcal{P}_0(F)$ **alors**
2 **retourner** `evalueclausal`(F, I)
3 **sinon**
4 **choisir** $P \in \mathcal{P}_0(F) \setminus \mathrm{dom}(I)$
5 **retourner** `satisfiable`$(F, I[\top/P]) \vee$ `satisfiable`$(F, I[\bot/P])$

L'implémentation de la recherche de modèle par énumération en OCaml sera vue en TP du cours « programmation fonctionnelle ».

7.1.1. *Implémentation de la recherche par énumération en Java.*

Propositions et littéraux. Dans l'esprit du format DIMACS, chaque proposition P_i va être associée à un entier `i>0` ; le littéral P_i est alors représenté par l'entier `i` et le littéral $\neg P_i$ par l'entier `-i`.

Interprétations. Une interprétation est I maintenant représentée comme un tableau d'entiers ; si `nprops` est le nombre de propositions, alors `interpretation` sera un tableau de longueur `nprops`. L'index dans ce tableau d'un littéral ℓ représenté par un objet `l` de type `Integer` est fourni par la méthode suivante.

```
public static int index(Integer l) {
    int i = l.intValue();
    return (i > 0)? i-1: -i-1;
}
```

Pour un littéral ℓ représenté par un objet `l` de type `Integer`, $I \models \ell$ se vérifie en testant si `interpretation[index(l)] == l.intValue()`.

Clauses. Rappelons que nous représentons les clauses comme des objets de type `Clause`, lequel implémente `Collection<Integer>`. Une interprétation I est un modèle d'une clause C si et seulement si c'est un modèle d'au moins un littéral ℓ de C : $I \models C$ si et seulement si $\exists \ell \in C. I \models \ell$. Nous pouvons implémenter cela dans notre classe `Clause` par la méthode suivante.

`Clause`
```
public boolean evalue(int[] interpretation) {
    return this.stream().anyMatch(
        l -> interpretation[index(l)] == l.intValue());
}
```

Solveur SAT *naïf.* Voici enfin le code d'un solveur SAT naïf qui implémente la recherche de modèle par énumération. Ce solveur a accès aux trois champs suivants.

SolveurNaif
```
protected int nprops;
private Collection<Clause> clauses;
private int[] interpretation;
```

La méthode `satisfiable` construit successivement – via des appels récursifs – toutes les interprétations possibles des propositions, et retourne vrai dès qu'elle trouve un modèle.

SolveurNaif
```
private boolean satisfiable(int i) {
    // interprétation de toutes les propositions
    if (i == nprops)
        // est-ce que toutes les clauses sont satisfaites ?
        return clauses.stream().allMatch(c-> c.evalue(interpretation));
    else {
        // branchement :
        //  - tente de mettre la ième proposition à ⊤
        interpretation[i] = i+1;
        if (satisfiable(i+1))
            return true;
        // - restaure l'interprétation
        for (int j = i+1; j < nprops; j++)
            interpretation[j] = j+1;
        //  - tente de mettre la ième proposition à ⊥
        interpretation[i] = -i-1;
        return satisfiable(i+1);
    }
}
public boolean satisfiable() {
    return satisfiable(0);
}
```

Cette implémentation naïve d'un solveur SAT suffit pour des petits exemples, mais prend plus d'une seconde sur ma machine pour résoudre le problème de coloriage de la section 6.4.

7.2. **Recherche de modèle par simplification.** Un défaut de l'algorithme par énumération de la section précédente est qu'il attend d'avoir construit une interprétation partielle de domaine $\mathcal{P}_0(\varphi)$ avant de tester si les clauses sont satisfaites. Pourtant, il est parfois possible de répondre plus tôt : par exemple, dans l'arbre de la figure 7, le nœud atteint en suivant le chemin $\neg P, Q$ correspond à une interprétation partielle $[\bot/P, \top/Q]$ qui ne satisfait pas la clause $\{P, \neg Q\}$, quel que soit le choix de l'interprétation de la proposition R.

Cependant, évaluer toutes les clauses C d'une formule à chaque nœud interne de l'arbre d'interprétation partielle I telle que $\mathcal{P}_0(C) \subseteq \mathrm{dom}(I)$ serait coûteux. À la place, l'idée de la recherche de modèle par simplification est d'évaluer « partiellement » l'ensemble des clauses au fur et à mesure de l'exploration de l'arbre.

7.2.1. *Simplification de formes clausales.* La recherche de modèle par simplification simplifie un ensemble de clauses propositionnelles S jusqu'à obtenir une clause vide – auquel cas S n'était pas satisfiable – ou un ensemble vide de clauses – auquel cas S était satisfiable. Soit S un ensemble de clauses. On définit la *simplification* de S par un littéral ℓ comme l'ensemble de clauses

$$S[\top/\ell] \stackrel{\text{def}}{=} \{C \mid \big((C \cup \{\overline{\ell}\}) \in S \text{ ou } \overline{\ell} \notin C \in S\big) \text{ et } \ell \notin C\}$$

où l'on a éliminé les clauses de S contenant ℓ et simplifié les clauses de S de la forme $C \cup \{\overline{\ell}\}$ en leur enlevant $\overline{\ell}$. Par exemple,

$$\{\{P, Q\},\ \{\neg P, R\},\ \{P, \neg P\}\}[\top/P] = \{\{R\}\}\ ,$$
$$\{\{P, Q\},\ \{\neg P, R\},\ \{P, \neg P\}\}[\top/\neg P] = \{\{Q\}\}\ .$$

La simplification revient effectivement à substituer $\top$ à ℓ et $\bot$ à $\overline{\ell}$ dans toutes les clauses de S et à simplifier le résultat en utilisant les équivalences logiques $\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top$, $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$ et $\varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$. La simplification d'un ensemble F de clauses par un littéral ℓ s'écrit en pseudo-code comme suit.

Fonction `simplifie`(F, ℓ)
1 $F' := \emptyset$
2 **pour tous les** $C \in F$ **faire**
3 **si** $\ell \notin C$ **alors** $F' := F' \cup \{C \setminus \{\overline{\ell}\}\}$
4 **retourner** F'

Pour une interprétation I, on note $I[\top/\ell]$ pour l'interprétation qui associe $\top$ à P si $\ell = P$, $\bot$ à P si $\ell = \neg P$, et Q^I à toute proposition $Q \notin \mathcal{P}_0(\ell)$.

7.2.2. *Recherche par simplification.* Comme son nom l'indique, la *recherche par simplification* vise à trouver une interprétation qui satisfait toutes les clauses d'un ensemble F de clauses, en testant successivement si $F[\top/P]$ ou $F[\top/\neg P]$ est satisfiable ; voir la figure 8 (où les littéraux colorés en orange sont impactés par la prochaine simplification).

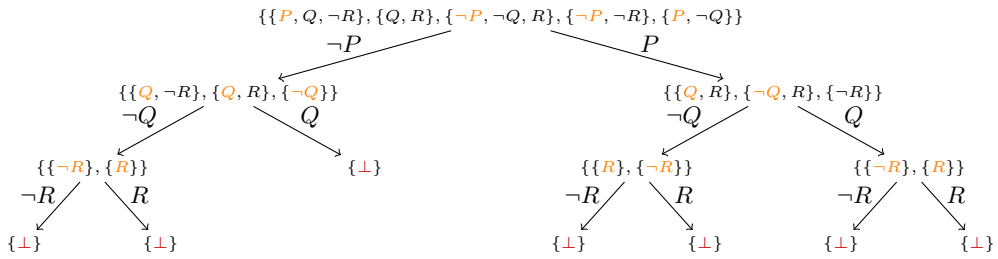


FIGURE 8. Un arbre de recherche par simplification pour l'exemple 7.1.

Cette recherche *réussit* s'il existe une branche qui termine sur l'ensemble vide $\emptyset$ de clauses, et *échoue* si toutes les branches aboutissent à un ensemble qui contient la clause vide (celle-ci est notée $\bot$). La recherche illustrée dans la figure 8 échoue : l'ensemble F de l'exemple 7.1 était bien insatisfiable.

Exemple 7.2. Voici un autre exemple de recherche par simplification. Soit l'ensemble de clauses $F \stackrel{\text{def}}{=} \{\{P, \neg R, \neg P\},\ \{\neg Q, R\},\ \{\neg Q\}\}$. Un exemple de recherche par simplification est donné dans la figure 9.

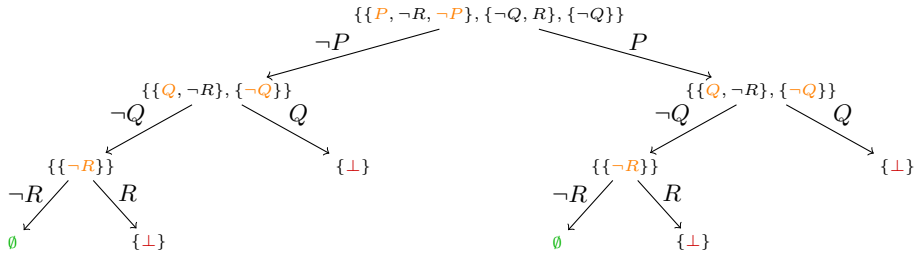


FIGURE 9. Un arbre de recherche par simplification pour l'exemple 7.2.

Cette recherche réussit, puisqu'il existe au moins une feuille étiquetée par l'ensemble vide de clauses, par exemple la feuille atteinte par le chemin $P, \neg Q, \neg R$; et en effet, toute interprétation qui étend $[\top/P, \bot/Q, \bot/R]$ est un modèle de F.

Voici un pseudo-code pour un algorithme récursif de recherche par simplification.

Fonction `satisfiable`(F)
1 **si** $F = \emptyset$ **alors retourner** $\top$
2 **si** $\bot \in F$ **alors retourner** $\bot$
3 **choisir** $P \in \mathcal{P}_0(F)$
4 **retourner**
`satisfiable`(`simplifie`(F, P)) $\vee$ `satisfiable`(`simplifie`$(F, \neg P)$)

Remarque 7.3. À noter dans ce pseudo-code que le choix de la proposition à utiliser pour simplifier à la ligne 3 n'a pas besoin d'être le même le long de toutes les branches. Par exemple, la figure 10 montre une recherche par simplification pour l'exemple 7.1 qui échoue plus rapidement que celle de la figure 8.

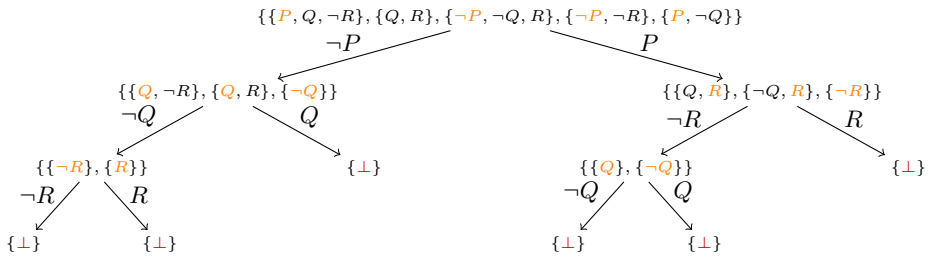


FIGURE 10. Un autre arbre de recherche par simplification pour l'exemple 7.1.

Exemple 7.4. Considérons la formule sous forme clausale

$$\{\{P, Q, R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg R\}\} .$$

Si on effectue les simplifications sur P puis Q puis R, l'arbre de recherche obtenu est celui de la figure 11, qui est aussi grand que celui d'une recherche par énumération exhaustive.

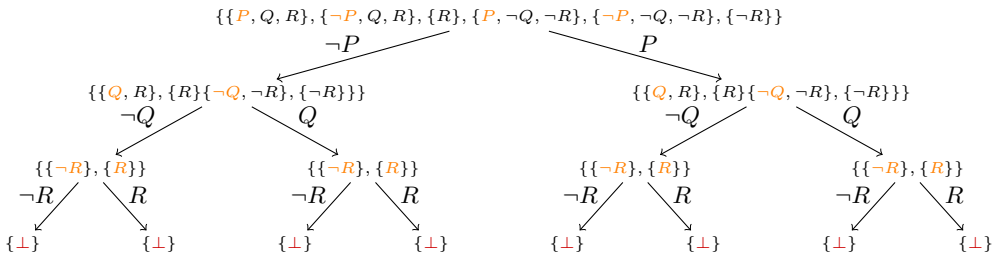


FIGURE 11. Un arbre de recherche par simplification pour l'exemple 7.4.

Il est pourtant possible de faire une recherche par simplification beaucoup plus efficace, en commençant par la proposition R, comme illustré dans la figure 12. En général, il peut être avantageux de simplifier en priorité sur des propositions qui apparaissent dans beaucoup de clauses.

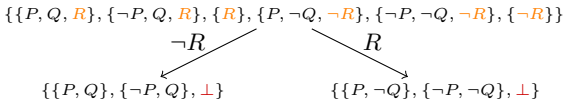


FIGURE 12. Un autre arbre de recherche par simplification pour l'exemple 7.4.

7.2.3. *Correction et complétude.* La recherche de modèle par simplification peut se comprendre par le biais de *règles de réécriture* qui agissent sur des ensembles de clauses. Les règles (split_P) et ($\text{split}_{\neg P}$) de la figure 13 cherchent à montrer qu'un ensemble fini F est satisfiable en le réduisant à l'ensemble vide de clauses. Les arbres des figures 8 à 12 recensent des réécritures possibles par ce système de règles.

$$F \to_{\text{spl}} F[\top/P] \qquad \text{où } P \in \mathcal{P}_0(F) \qquad (\text{split}_P)$$
$$F \to_{\text{spl}} F[\top/\neg P] \qquad \text{où } P \in \mathcal{P}_0(F) \qquad (\text{split}_{\neg P})$$

FIGURE 13. Règles de réécriture de la recherche par simplification.

Il est aisé de voir que F est satisfiable si et seulement si $F \to_{\text{spl}}^* \emptyset$ à l'aide des règles (split_P) et ($\text{split}_{\neg P}$) pour $P \in \mathcal{P}_0(F)$. En effet, notons $I[\top/\ell]$ pour l'interprétation qui associe $\top$ à P si $\ell = P$, $\bot$ à P si $\ell = \neg P$, et Q^I à toute proposition $Q \notin \mathcal{P}_0(\ell)$. On a alors la conséquence suivante du lemme 4.6 de substitution propositionnelle

Propriété 7.5. *Pour toute ensemble S de clauses, toute interprétation I et tout littéral ℓ, $I \vDash S[\top/\ell]$ si et seulement si $I[\top/\ell] \vDash S$.*

Une autre remarque importante est que la simplification par un littéral P ou $\neg P$ conduit à un ensemble de clauses où ni P ni $\neg P$ n'apparaît.

Propriété 7.6. *Soit S un ensemble de clauses et P une proposition. Alors $P \notin \mathcal{P}_0(S[\top/P])$ et $P \notin \mathcal{P}_0(S[\top/\neg P])$.*

Comme les règles de réécriture de la figure 13 n'appliquent la simplification qu'à une proposition $P \in \mathcal{P}_0(F)$, on a que $F \to_{\text{spl}} F'$ implique $\mathcal{P}_0(F) \supsetneq \mathcal{P}_0(F')$, donc on ne peut appliquer les règles qu'au plus $|\mathcal{P}_0(F)|$ fois à un ensemble F donné : on dit que ce système de règles de réécriture *termine*.

On en déduit le théorème suivant des propriétés 7.5 et 7.6.

Théorème 7.7. *Soit F un ensemble fini de clauses. Alors les règles de la figure 13 sont correctes et complètes : F est satisfiable si et seulement si $F \to_{\text{spl}}^* \emptyset$.*

Démonstration. Pour la correction, c'est-à-dire pour montrer que $F \to_{\text{spl}}^* \emptyset$ implique F satisfiable, il suffit d'observer d'une part que l'ensemble vide de clauses $\emptyset$ est satisfiable (il est même valide), et d'autre part que si F' est satisfiable – disons par une interprétation I telle que $I \vDash F'$ – et $F \to_{\text{spl}} F'$ par une des règles de la figure 13, alors F est satisfiable :

- pour (split_P) : alors $F' = F[\top/P]$ pour la proposition P : on a $I[\top/P] \vDash F$ par la propriété 7.5 ;
- pour ($\text{split}_{\neg P}$) : alors $F' = F[\top/\neg P]$ pour la proposition P : on a $I[\bot/P] \vDash F$ par la propriété 7.5.

Une simple récurrence sur le nombre de réécritures dans $F \to_{\text{spl}}^* \emptyset$ démontre alors la correction.

Pour la complétude, c'est-à-dire pour montrer que F satisfiable implique $F \to_{\text{spl}}^* \emptyset$, supposons que $I \vDash F$. On ordonne $\mathcal{P}_0(F)$ de manière arbitraire comme $P_1 < \cdots < P_n$. Soit $F_0 \stackrel{\text{def}}{=} F$; on applique pour chaque $1 \leq i \leq n$ à la proposition P_i sur l'ensemble F_{i-1}

- soit (split_{P_i}) si $I \vDash P_i$ et alors $F_i \stackrel{\text{def}}{=} F_{i-1}[\top/P_i]$ et comme $I = I[\top/P_i]$, $I \vDash F_i$ par la propriété 7.5 ;
- soit ($\text{split}_{\neg P_i}$) si $I \vDash \neg P_i$ et alors $F_i \stackrel{\text{def}}{=} F_{i-1}[\top/\neg P_i]$ et comme $I = I[\top/\neg P_i]$, $I \vDash F_i$ par la propriété 7.5.

Comme $\mathcal{P}_0(F_i) = \{P_{i+1}, \ldots, P_n\}$ pour tout $0 \leq i \leq n$ par la propriété 7.6, F_n est un ensemble de clauses sans propositions. De plus, il ne peut pas contenir la clause vide puisque $I \vDash F_n$. Donc $F_n = \emptyset$. □

7.2.4. *Implémentation de la recherche par simplification en Java.* Comme dans la section 7.1.1, nous utilisons des représentations proches de celles utilisées en pratique par les solveurs SAT, à savoir qu'un littéral est un entier non nul et une interprétation est un tableau d'entiers. Voici une implémentation possible de la simplification d'un ensemble de clauses, d'abord dans notre classe `Clause` et ensuite au niveau de notre solveur par simplification.

💬 *L'implémentation de la recherche par simplification en Ocaml sera faite en mini-projet.*

`Clause`

```
public boolean simplifie(int l) {
    if (this.contains(Integer.valueOf(l)))
        return true;
    this.remove(Integer.valueOf(-l));
    return false;
}
```

`SolveurSplit`

```
private SolveurSplit simplifie(int l) {
    SolveurSplit ret = new SolveurSplit(nprops, interpretation);
    interpretation[index(l)] = l;
    for (Clause c : clauses) {
        Clause d = c.clone();
        if (! d.simplifie(l))
            ret.add(d);
    }
    return ret;
}
```

Voici maintenant une implémentation de la recherche de modèle par simplification en Java.

SolveurSplit

```java
private boolean satisfiable(int i) {
    // l'ensemble vide de clauses est satisfiable
    if (clauses.size() == 0)
        return true;
    // un clause vide est insatisfiable
    if (clauses.stream().anyMatch(c -> c.size() == 0))
        return false;
    // branchement :
    //  - tente de mettre la ième proposition à ⊤
    if (simplifie(i+1).satisfiable(i+1))
        return true;
    // - restaure l'interprétation
    for (int j = i+1; j < nprops; j++)
        interpretation[j] = 0;
    //  - tente de mettre la ième proposition à ⊥
    return simplifie(-i-1).satisfiable(i+1);
}
public boolean satisfiable() {
    return satisfiable(0);
}
```

Bien qu'elle ne cherche pas à optimiser l'ordre des littéraux sur lesquels simplifier (voir la remarque 7.3 et l'exemple 7.4), cette implémentation résout les problèmes de la section 6 en moins d'une seconde sur ma machine. Elle n'est cependant pas capable de résoudre des problème de taille plus importante, de l'ordre de plusieurs dizaines de propositions et de clauses.

(Conchon et Simon, 2018, sec. 2.2.3), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 2.4.3), (Harrisson, 2009, sec. 2.9)

7.3. **Algorithme de Davis, Putnam, Logemann et Loveland.** Couramment appelé *DPLL* d'après ses inventeurs, cet algorithme sert d'inspiration aux solveurs SAT actuels. L'algorithme DPLL est un raffinement de la recherche de modèle par simplification de la section 7.2.

L'idée de départ de l'algorithme DPLL provient de la remarque 7.3 : comment choisir les littéraux par lesquels simplifier l'ensemble de clauses ? Comme vu dans l'exemple 7.4, un mauvais choix va résulter en un arbre de recherche très grand, potentiellement aussi grand que l'arbre de recherche par énumération naïve de la section 7.1 ; à l'inverse, un bon choix peut mener beaucoup plus rapidement à la réponse. L'algorithme DPLL fournit des heuristiques pratiques pour choisir ces littéraux. Voici deux telles heuristiques, qui identifient les littéraux *unitaires* et les littéraux *purs* de l'ensemble de clauses.

Littéraux unitaires. Dans un ensemble S de clauses, une clause C est *unitaire* si elle ne contient qu'un seul littéral, et on dit alors que ce littéral est *unitaire*. Formellement, ℓ est unitaire dans S si $S = S' \cup \{\{\ell\}\}$ pour un ensemble S'. Dans tout modèle I de S, c'est-à-dire si $I \vDash S$, un littéral unitaire ℓ sera nécessairement satisfait par I : $I \vDash \ell$. C'est donc un bon choix pour une simplification.

Par exemple, dans l'ensemble de clauses de l'exemple 7.4, les littéraux R et $\neg R$ sont unitaires.

Littéraux purs. On définit l'ensemble des littéraux *purs* d'un ensemble S de clauses comme l'ensemble des littéraux ℓ tels que $\overline{\ell}$ n'apparaît dans aucune clause de S :

$$\mathrm{Pur}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell \mid \forall C \in S \,.\, \overline{\ell} \notin C\} \,.$$

Dans tout modèle I de S, c'est-à-dire si $I \vDash S$, si ℓ est un littéral pur de S, alors $I[\top/\ell]$ est encore un modèle de S. C'est encore une fois un bon choix pour une simplification.

Exemple 7.8. Soit l'ensemble de clauses

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{\{P, \neg Q, R\}, \{P, \neg R\}, \{Q, R\}, \{P, \neg Q\}\} \,.$$

| Alors $\mathrm{Pur}(F) = \{P\}$.

7.3.1. *Correction et complétude.* L'algorithme DPLL peut être vu comme une extension du système de règles de la figure 13, qui introduit deux nouvelles règles (unit) et (pure). Tout comme lors de la recherche de modèle par simplification, les règles de la figure 14 cherchent à montrer qu'un ensemble fini F de clauses est satisfiable en le réduisant à l'ensemble vide.

$$
\begin{aligned}
F \cup \{\{\ell\}\} &\to_{\text{dpll}} F[\top/\ell] && && \text{(unit)}\\
F &\to_{\text{dpll}} F[\top/\ell] && \text{où } \ell \in \mathrm{Pur}(F) && \text{(pure)}\\
F &\to_{\text{dpll}} F[\top/P] && \text{où } P \in \mathcal{P}_0(F) && (\text{split}_P)\\
F &\to_{\text{dpll}} F[\top/\neg P] && \text{où } P \in \mathcal{P}_0(F) && (\text{split}_{\neg P})
\end{aligned}
$$

FIGURE 14. Règles de réécriture de DPLL.

On montre que ce système de règles reste correct ; la complétude découle directement de celle du système de recherche de modèle par simplification.

Théorème 7.9. *Soit F un ensemble fini de clauses. Alors les règles de la figure 14 sont correctes et complètes : F est satisfiable si et seulement si $F \to^*_{\text{dpll}} \emptyset$.*

Démonstration. Pour la correction, puisque la recherche de modèle par simplification était correcte (voir le théorème 7.7), il suffit de montrer que, si F' est satisfiable – disons par une interprétation I telle que $I \vDash F'$ – et $F \to_{\text{dpll}} F'$ par (unit) et (pure), alors F est satisfiable :

- pour (unit) : alors $F' = F''[\top/\ell]$ et $F = F'' \cup \{\{\ell\}\}$ pour un littéral unitaire ℓ de F'' : on a $I[\top/\ell] \vDash F''$ par la propriété 7.5 et donc $I[\top/\ell] \vDash F$;
- pour (pure) : alors $F' = F[\top/\ell]$ pour un littéral pur ℓ : on a $I[\top/\ell] \vDash F$ par la propriété 7.5.

Pour la complétude, c'est-à-dire pour montrer que F satisfiable implique $F \to^*_{\text{dpll}} \emptyset$, cela découle du théorème 7.7. En effet, si F est satisfiable, alors $F \to^*_{\text{spl}} \emptyset$, c'est-à-dire $F \to^*_{\text{dpll}} \emptyset$ en n'utilisant que les règles (split_P) et $(\text{split}_{\neg P})$. □

7.3.2. *Algorithme DPLL.* L'intérêt des règles (unit) et (pure) est qu'elles sont *inversibles*, au sens suivant.

Proposition 7.10 (inversibilité)**.** *Soit F un ensemble de clauses. Si $F \xrightarrow{\text{(unit)}}_{\text{dpll}} F'$ ou $F \xrightarrow{\text{(pure)}}_{\text{dpll}} F'$ pour un ensemble de clauses F satisfiable, alors F' est aussi satisfiable.*

Démonstration. Supposons que I soit une interprétation telle que $I \vDash F$.

- Pour (unit) : alors $F = F \cup \{\{\ell\}\}$ et en particulier $I \vDash \ell$. Donc $I[\top/\ell] = I \vDash F$ et par la propriété 7.5, $I \vDash F[\top/\ell] = F'$.
- Pour (pure) : alors $F' = F[\top/\ell]$ où ℓ est un littéral dans $\mathrm{Pur}(F)$. Si $I \vDash \ell$, alors $I[\top/\ell] = I \vDash F$ et par la propriété 7.5 $I \vDash F[\top/\ell] = F'$. Inversement, si $I \nvDash \ell$, alors comme $I \vDash F$, dans toutes les clauses $C \in F$, il existe un littéral $\ell_C \in C$ tel que $I \vDash \ell_C$ et forcément $\ell_C \neq \ell$ pour toutes les clauses $C \in F$. Mais alors $I[\top/\ell] \vDash \ell_C$ pour toutes les clauses $C \in F$, et donc $I[\top/\ell] \vDash F$. Par la propriété 7.5, $I \vDash F[\top/\ell] = F'$. □

L'inversibilité et la correction des règles (unit) et (pure) signifie que, si $F \xrightarrow{\text{(unit)}}_{\text{dpll}} F'$ ou $F \xrightarrow{\text{(pure)}}_{\text{dpll}} F'$, alors F est satisfiable si et seulement si F' l'est. Autrement dit, il n'est pas utile d'introduire des *points de choix* comme lors de l'utilisation des règles (split_P) et $(\text{split}_{\neg P})$, pour revenir en arrière s'il s'avérait que F' était insatisfiable. Les règles (unit) et (pure) peuvent donc être appliquées arbitrairement. La stratégie usuelle de l'algorithme DPLL est de les appliquer en priorité (et dans cet ordre) avant d'essayer (split_P) ou $(\text{split}_{\neg P})$, de manière à accélérer la

💬 *L'algorithme DPLL est implémenté sous forme itérative en utilisant du* backtracking. *Les performances des solveurs* SAT *actuels tiennent à une gestion fine des retours aux points de choix, et lors de ces retours à l'ajout de nouvelles clauses inférées à partir de la branche d'échec, ceci afin de guider la recherche vers une branche de succès ; cette technique est appelée* « conflict-driven clause learning ».
🔖 *Voir (*CONCHON *et* SIMON*, 2018, sec. 2.2).*

recherche de preuve en éliminant des points de choix. Voici le pseudo-code de l'algorithme écrit en style récursif.

Fonction `satisfiable`(F)
1 **si** $F = \emptyset$ **alors retourner** $\top$
2 **si** $\bot \in F$ **alors retourner** $\bot$
3 **si** $\exists \ell \,.\, F = F \cup \{\{\ell\}\}$ **alors retourner** `satisfiable`$(\texttt{simplifie}(F, \ell))$
4 **si** $\exists \ell \in \mathrm{Pur}(F)$ **alors retourner** `satisfiable`$(\texttt{simplifie}(F, \ell))$
5 **choisir** $P \in \mathcal{P}_0(F)$
6 **retourner**
`satisfiable`$(\texttt{simplifie}(F, P)) \vee$ `satisfiable`$(\texttt{simplifie}(F, \neg P))$

Comme dans le cas de la recherche par simplification, les réécritures du système de la figure 14 sont de longueur au plus $|\mathcal{P}_0(F)|$.

Reprenons les différents exemples de cette section. Pour l'exemple de la figure 10, l'algorithme DPLL construit (entre autres) l'arbre de recherche de la figure 15. Pour l'exemple 7.2, l'arbre de recherche DPLL est celui de la figure 16. Pour l'exemple des figures 11 et 12, l'algorithme DPLL construit (entre autres) l'arbre de recherche de la figure 17. Pour l'exemple 7.8, l'algorithme DPLL construit l'arbre de recherche de la figure 18.

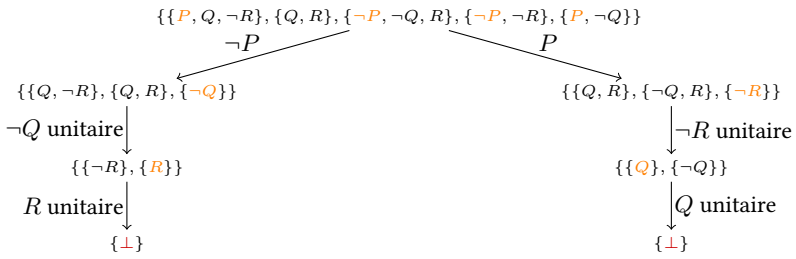


FIGURE 15. Un arbre de recherche DPLL pour l'exemple 7.1.

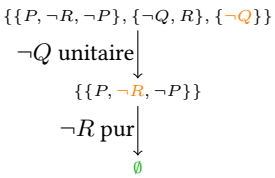


FIGURE 16. L'arbre de recherche DPLL pour l'exemple 7.2.

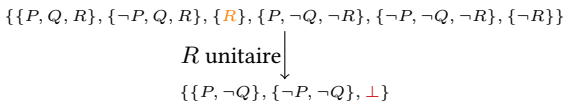


FIGURE 17. Un arbre de recherche DPLL pour l'exemple 7.4.

💬 *L'implémentation d'un algorithme DPLL récursif en Ocaml sera faite en mini-projet.*

7.3.3. *Implémentation d'un DPLL récursif en Java.* Voici enfin une implémentation assez naïve de l'algorithme DPLL en Java sous la forme d'une méthode récursive.

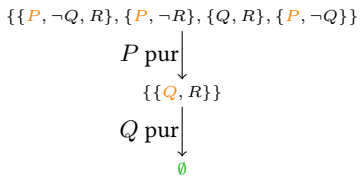


FIGURE 18. L'arbre de recherche DPLL pour l'exemple 7.8.

DPLLRec

```
private DPLLRec simplifie(int l) {
    interpretation[index(l)] = l;
    clauses.removeIf(c -> c.simplifie(l));
    return this;
}
public boolean satisfiable() {
    // l'ensemble vide de clauses est satisfiable
    if (clauses.size() == 0)
        return true;
    // un clause vide est insatisfiable
    if (clauses.stream().anyMatch(c -> c.size() == 0))
        return false;
    // clause unitaire
    Optional<Clause> unitaire
        = clauses.stream().filter(c -> c.size() == 1).findAny();
    if (unitaire.isPresent()) {
        int l = unitaire.get().stream().findAny().get().intValue();
        return simplifie(l).satisfiable();
    }
    // littéral pur
    for (int i = 0; i < nprops; i++)
        if (interpretation[i] == 0) {
            final Integer l = Integer.valueOf(i+1);
            final Integer notl = Integer.valueOf(-i-1);
            if (clauses.stream().noneMatch(c ->
                    c.stream().anyMatch(j -> j.equals(notl))))
                return simplifie(l.intValue()).satisfiable();
            if (clauses.stream().noneMatch(c ->
                    c.stream().anyMatch(j -> j.equals(l))))
            return simplifie(notl.intValue()).satisfiable();
        }
    // branchement
    for (int i = 0; i <nprops; i++)
        if (interpretation[i] == 0) {
            DPLLRec clone = this.clone();
            //  - tente de mettre la ième proposition à ⊤
            if (this.simplifie(i+1).satisfiable())
                return true;
            // - restaure l'état du solveur
            this.interpretation = clone.interpretation;
            this.clauses = clone.clauses;
            //  - tente de mettre la ième proposition à ⊥
            return this.simplifie(-i-1).satisfiable();
        }
```

```
    assert false;
    return false;
}
```

Comme précédemment, cette implémentation ne cherche pas à optimiser le choix des littéraux lors des branchements. Cette implémentation arrive à résoudre des problèmes de taille modeste, autour de quelques centaines de propositions et de clauses, qui sont hors de portée des implémentations à base de recherche par énumération ou par simplification.

8. Validité et recherche de preuve

Résumé. Le *calcul des séquents propositionnel* est un système de déduction qui manipule des séquents $\vdash \Gamma$, où Γ est un multi-ensemble fini de formules propositionnelles sous forme normale négative. Un séquent $\vdash \Gamma$ pour lequel il existe une dérivation dans le système de preuve est dit *prouvable*, ce qui est noté « $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma$ ».

On peut implémenter la *recherche de preuve* dans le calcul des séquents propositionnel : cela tient à la propriété 8.5 de branches linéaires, et de plus on peut faire une implémentation sans retours sur erreurs grâce au lemme 8.7 d'inversibilité syntaxique.

Un séquent $\vdash \Gamma$ est *valide*, si pour toute interprétation I, il existe une formule propositionnelle $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ du séquent telle que $I \vDash \vartheta$. Par le théorème 8.9 de *correction*, si $\vdash \Gamma$ est prouvable, alors il est valide. Inversement, par le théorème 8.12 de *complétude*, si $\vdash \Gamma$ est valide, alors il est prouvable.

Le problème de *validité* est le problème de décision suivant.

Problème (VALIDITÉ).
instance : une formule propositionnelle φ
question : φ est-elle valide ?

Une façon de résoudre ce problème nous est offerte par la dualité entre satisfiabilité et validité (voir la propriété 3.11) : φ est valide si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfiable. On peut donc résoudre VALIDITÉ à l'aide d'un solveur SAT.

Dans le cas de SAT*, un certificat de satisfiabilité était simplement un modèle I de la formule, qui est de taille $|\mathcal{P}_0(\varphi)|$ et $I \vDash \varphi$ peut être vérifié en temps polynomial.*

Cependant, on souhaiterait aussi, dans le cas où φ est valide, avoir un *certificat* de validité, qui « explique » pourquoi la formule propositionnelle est valide ; on voudrait de plus pouvoir aisément vérifier, quand on dispose d'un tel certificat, que la formule propositionnelle était bien valide.

Certificats d'insatisfiabilité. Or, dans les algorithmes que nous avons vus dans la section 7.3, dans le cas d'une formule propositionnelle insatisfiable, aucune information n'est retournée ; par exemple, MiniSat retourne seulement « UNSAT ». Retourner l'arbre de recherche entier du solveur SAT fournirait un certificat facile à vérifier, mais potentiellement beaucoup trop gros et de plus dépendant des heuristiques utilisées par chaque solveur.

Voir par exemple Goldberg et Novikov (2003) et Wetzler, Heule et Hunt (2014) pour les certificats de solveurs SAT.

Les solveurs SAT plus récents comme Glucose [11] peuvent fournir des certificats sous des formats standard. Le principe de base est le suivant : soit F un ensemble de clauses insatisfiable. Un certificat est alors un ensemble F' de clauses tel que

(1) toutes les clauses $C' \in F'$ sont des conséquences logiques de F, c'est-à-dire $F \cup \{\{\overline{\ell}\}\} \vDash \bot$ pour tout littéral $\ell \in C'$, et
(2) $F \cup F' \vDash \bot$.

L'espoir ici est que d'une part cet ensemble F' soit de petite taille et d'autre part que les tests d'insatisfiabilité $F \cup \{\{\overline{\ell}\}\} \vDash \bot$ et $F \cup F' \vDash \bot$ soient aisés, par exemple en n'utilisant que des règles unitaires (unit).

11. https://www.labri.fr/perso/lsimon/glucose/

Systèmes de preuve. L'approche alternative que nous allons explorer dans cette section est plutôt de résoudre le problème de validité directement, à l'aide d'un *système de preuve*, c'est-à-dire de règles de déduction qui garantissent la validité. L'intérêt ici est que la preuve elle-même, c'est-à-dire l'arbre de dérivation dans le système de preuve, fait office de certificat. Un tel certificat est très facile à vérifier ; en revanche, il peut être de taille exponentielle en la taille de φ.

On soupçonne en fait que des certificats de taille polynomiale et vérifiables en temps polynomial n'existent pas pour VALIDITÉ, *car cela impliquerait* NP = coNP, *comme vous le verrez en cours de « calculabilité et complexité » en M1.*

8.1. **Calcul des séquents propositionnel.** Le système de preuve que nous allons étudier dans ce cours est un système de calcul des séquents. Il y a quantité de variantes du calcul des séquents pour la logique classique propositionnelle. Le système que nous étudions ici est un calcul monolatère inversible sans coupure, qui a l'avantage de ne comporter que peu de règles et de se prêter particulièrement bien à la *recherche de preuve*.

Voir (Duparc, 2015, sec. 3.5) ou (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 2.3.3) pour un calcul des séquents bilatère avec coupure ; d'autres familles de systèmes de preuve pour la logique classique propositionnelle sont les systèmes à la Hilbert *(ibid., sec. 2.3.1), la* déduction naturelle *(ibid., sec. 2.3.2), la* résolution propositionnelle *(ibid., sec. 2.4.2) et les* systèmes de tableaux *(ibid., sec. 2.4.1).*

Un *multi-ensemble* fini sur un ensemble S est formellement une fonction $m : S \to \mathbb{N}$ de domaine $\mathrm{dom}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{e \in S \mid m(e) > 0\}$ fini ; on peut aussi voir m comme une séquence finie de S^* modulo permutation.

Dans le calcul de la figure 19, un *séquent* est un multi-ensemble fini Γ de formules en forme normale négative, et est noté $\vdash \Gamma$. La virgule dénote l'union de multi-ensembles : par exemple, Γ, Δ, φ dénote le multi-ensemble avec $\Gamma(\varphi) + \Delta(\varphi) + 1$ occurrences de la formule propositionnelle φ, et $\Gamma(\psi) + \Delta(\psi)$ occurrences de $\psi \neq \varphi$. On note le séquent vide $\vdash \bot$, où $\bot(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ pour toute formule φ.

$$\frac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P}\ (\mathrm{ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee)$$

Figure 19. Calcul des séquents propositionnel monolatère.

*Ce calcul ne contient pas ni la règle structurelle d'*échange, *qui est implicite parce que nous travaillons avec des multi-ensembles, ni la règle structurelle d'*affaiblissement, *qui est implicite dans la règle d'axiome* (ax), *ni la règle structurelle de* contraction *ni la règle de* coupure, *mais toutes celles-ci sont admissibles.*

Une règle du calcul des séquents permet de déduire un séquent *conclusion* d'un nombre fini de séquents *prémisses*. Chaque règle comprend une *formule principale* dans sa conclusion, indiquée en orange dans les règles de la figure 19. Un séquent $\vdash \Gamma$ est *prouvable*, noté $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma$, s'il en existe une dérivation dans le système de la figure 19.

Exemple 8.1. La loi de Peirce de l'exemple 5.2 est prouvable. La dérivation correspondante (avec la formule principale indiquée en orange à chaque étape) est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, Q, P}\,(\mathrm{ax})}{\vdash \neg P \vee Q, P}\,(\vee) \quad \dfrac{}{\vdash \neg P, P}\,(\mathrm{ax})}{\vdash (\neg P \vee Q) \wedge \neg P, P}\,(\wedge)}{\vdash ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P}\,(\vee)$$

Exemple 8.2. Considérons la formule propositionnelle $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$. Sa forme normale négative est $(\neg P \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (P \wedge P))$. Cette formule est prouvable ; une dérivation est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, \neg P, P}\,(\mathrm{ax})}{\vdash \neg P, \neg P \vee P}\,(\vee)}{\vdash \neg P \vee \neg P \vee P}\,(\vee) \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, P}\,(\mathrm{ax}) \quad \dfrac{}{\vdash \neg P, P}\,(\mathrm{ax})}{\vdash \neg P, P \wedge P}\,(\wedge)}{\vdash \neg P \vee (P \wedge P)}\,(\vee)}{\vdash (\neg P \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (P \wedge P))}\,(\wedge)$$

Exemple 8.3. Considérons la formule propositionnelle $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$. Sa forme normale négative est $\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Cette formule est prouvable ; une dérivation est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, P, P \wedge R}\,(\text{ax})}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, P \wedge Q, P \wedge R}\,(\vee)}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}\,(\vee)}{\vdash \neg P, (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}\,(\vee)}{\vdash \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}\,(\vee)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, Q, P}\,(\text{ax})}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, Q, P \wedge R}\,(\wedge)}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, P \wedge Q, P \wedge R}\,(\wedge)$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, \neg Q, Q, R}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{}{\vdash \neg P, \neg R, Q, R}\,(\text{ax})}{\vdash \neg P, \neg Q \wedge \neg R, Q, R}\,(\wedge)$$

Exemple 8.4. Reprenons la modélisation de la productivité d'un non-terminal dans une grammaire algébrique de la section 6.3. Nous allons prendre une grammaire un peu plus petite :

$$S \to a \mid A$$
$$A \to AS$$

Cela fournit un ensemble de formules

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{Q_a \Rightarrow Q_S,\ Q_A \Rightarrow Q_S,\ Q_A \wedge Q_S \Rightarrow Q_A,\ Q_a\}$$

tel que $F \cup \{\neg Q_X\}$ est insatisfiable si et seulement si le symbole X est productif. Par la dualité entre satisfiabilité et validité, on a donc que $Q_X \vee \varphi$ est valide si et seulement si X est productif, où φ est la formule propositionnelle suivante :

$$\varphi = (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_S) \vee \neg Q_a\ .$$

La dérivation ci-dessous montre que $\vdash_{\mathbf{LK}_0} Q_S \vee \varphi$, ce qui implique par le théorème 8.9 de correction que $Q_S \vee \varphi$ est valide et donc que S est productif.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash Q_S, Q_a, (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A), \neg Q_a}\,(\text{ax})}{\vdash Q_S, Q_a, (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee) \qquad \dfrac{}{\vdash Q_S, \neg Q_S, (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\text{ax})}{\vdash Q_S, (Q_a \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\wedge)}{\vdash Q_S, (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee)}{\vdash Q_S \vee (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee)$$

8.2. **Recherche de preuve.** La recherche de preuve en calcul des séquents propositionnel vise à répondre au problème de décision suivant.

Problème (PROUVABILITÉ).
instance : un séquent propositionnel $\vdash \Gamma$
question : $\vdash \Gamma$ est-il prouvable dans le calcul des séquents propositionnel ?

Comme pour le problème de satisfiabilité, on peut aussi retourner une preuve de $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \varphi$ quand la réponse est positive. Comme nous le verrons dans la section 8.3, le calcul des séquents est correct et complet : en particulier, pour une formule propositionnelle φ en forme normale négative, $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \varphi$ si et seulement si φ est valide. Résoudre PROUVABILITÉ revient donc à résoudre VALIDITÉ.

Recherche de preuve. La recherche de preuve tente de développer un arbre de dérivation avec $\vdash \Gamma$ pour conclusion, de la racine vers les feuilles. Une *branche* de recherche de preuve est une séquence potentiellement infinie de séquents $\vdash \Gamma = \vdash \Gamma_0, \vdash \Gamma_1, \ldots$ calculée par la recherche de preuve : pour tout $i > 0$, $\vdash \Gamma_i$ est une prémisse d'une règle dont $\vdash \Gamma_{i-1}$ est la conclusion. Une *branche d'échec* est une branche de recherche de preuve finie $\vdash \Gamma_0, \vdash \Gamma_1, \ldots, \vdash \Gamma_n$ où aucune règle ne s'applique à $\vdash \Gamma_n$, c'est-à-dire qu'il n'est le séquent conclusion d'aucune règle.

Propriété de branches finies. On peut montrer que les branches de recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel de la figure 19 sont toutes finies, et même linéaires en la taille du séquent $\vdash \Gamma$ que l'on cherche à prouver.

On définit pour cela la *taille* d'un multi-ensemble Γ comme la somme des tailles de ses occurrences de formules $|\Gamma| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)} |\varphi| \cdot \Gamma(\varphi)$, où la taille $|\varphi|$ d'une formule propositionnelle φ

en forme normale négative est définie inductivement par

$$|\ell| \stackrel{\text{def}}{=} 0\,, \qquad\qquad |\varphi \vee \psi| = |\varphi \wedge \psi| \stackrel{\text{def}}{=} 1 + |\varphi| + |\psi|\,.$$

Intuitivement, la taille d'une formule propositionnelle est le nombre de nœuds étiquetés par « $\vee$ » ou « $\wedge$ » de son arbre de syntaxe abstraite, et la taille d'un séquent est la somme des tailles de ses formules.

Propriété 8.5 (branches linéaires)**.** *Soit $\vdash \Gamma$ un séquent propositionnel. Alors toutes les branches d'une recherche de preuve pour $\vdash \Gamma$ sont de longueur au plus $|\Gamma|$.*

Démonstration. On peut vérifier que pour chacune des règles (ax), ($\vee$) et ($\wedge$), la taille de chaque séquent prémisse est strictement inférieure à celle du séquent conclusion. □

Points de choix. La recherche de preuve n'est pas déterministe : il peut y avoir plusieurs règles applicables pour un même séquent $\vdash \Gamma$. Par exemple, pour $\vdash \neg P \vee Q, R \vee P$, on peut commencer par sélectionner $\neg P \vee Q$ comme formule principale et appliquer ($\vee$) :

$$\frac{\vdash \neg P, Q, R \vee P}{\vdash \neg P \vee Q, R \vee P}\ (\vee)$$

Mais on aurait aussi pu sélectionner $R \vee P$ comme formule principale et appliquer ($\vee$) :

$$\frac{\vdash \neg P \vee Q, R, P}{\vdash \neg P \vee Q, R \vee P}\ (\vee)$$

En général – mais comme nous allons le voir, pas dans le calcul des séquents de la figure 19 – il est nécessaire pour dans un algorithme déterministe de recherche de preuve de mémoriser de tels *points de choix* pour pouvoir y revenir par *backtracking* en cas d'échec. Voici comment une telle recherche de preuve pourrait s'écrire en pseudo-code, qui pour un séquent courant $\vdash \Gamma$ essaye tour à tour d'utiliser chaque formule $\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ en guise de formule principale.

Fonction `prouvable`$(\vdash \Gamma)$
- $v := \bot$
- **pour tous les** $\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ **faire**
  - **si** $\varphi = \ell$ **et** $\overline{\ell} \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ **alors**
    - **retourner** $\top$
  - **si** $\varphi = \varphi' \vee \psi$ **alors**
    - $\Delta := \Gamma \setminus \varphi$
    - $v := v \vee$ `prouvable`$(\vdash \Delta, \varphi', \psi)$
  - **si** $\varphi = \varphi' \wedge \psi$ **alors**
    - $\Delta := \Gamma \setminus \varphi$
    - $v := v \vee$ (`prouvable`$(\vdash \Delta, \varphi') \wedge$ `prouvable`$(\vdash \Delta, \psi)$)
- **retourner** v

Par la propriété 8.5 de branches linéaires, cet algorithme termine bien : la profondeur des appels récursifs est bornée par $|\Gamma|$.

Exemple 8.6. La formule propositionnelle $\varphi_{\text{ex}} = (P \vee \neg Q) \wedge P$ de la figure 1 n'est pas prouvable : il n'y a aucun point de choix de la recherche de preuve qui échoue ci-dessous :

$$\dfrac{\dfrac{\textbf{échec}}{\dfrac{\vdash P, \neg Q}{\vdash P \vee \neg Q}\ (\vee)} \qquad \dfrac{\textbf{échec}}{\vdash P}}{\vdash (P \vee \neg Q) \wedge P}\ (\wedge)$$

Inversibilité. Nous allons maintenant voir que le choix d'une formule principale n'est pas important dans notre calcul des séquents, et que l'on peut donc considérablement simplifier le pseudo-code de `prouvable`. On peut commencer par observer que, dans nos deux exemples précédents, la recherche de preuve réussit pour nos deux choix de formule principale :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, Q, R, P}\,(\text{ax})}{\vdash \neg P, Q, R \vee P}\,(\vee)}{\vdash \neg P \vee Q, R \vee P}\,(\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, Q, R, P}\,(\text{ax})}{\vdash \neg P \vee Q, R, P}\,(\vee)}{\vdash \neg P \vee Q, R \vee P}\,(\vee)$$

Une règle de déduction est *syntaxiquement inversible* si, quand il existe une dérivation de son séquent conclusion, alors il existe une dérivation de chacun de ses séquents prémisses. La règle (ax) est bien sûr syntaxiquement inversible puisqu'elle n'a aucune prémisse. Mais ce qui est plus intéressant, c'est que toutes les autres règles de la figure 19 sont elles aussi syntaxiquement inversibles. Cela signifie que dans une recherche de preuve, on peut appliquer ces règles de manière gloutonne sans faire de *backtracking* – donc sans avoir à mémoriser de points de choix – et que si l'on arrive à un séquent pour lequel aucune règle ne s'applique, alors c'est qu'il n'y avait *pas* de preuve.

Lemme 8.7 (inversibilité syntaxique)**.** *Les règles du calcul des séquents propositionnel sont syntaxiquement inversibles.*

Démonstration. Comme déjà mentionné, la règle (ax) est syntaxiquement inversible par définition puisqu'elle n'a pas de prémisses.

Pour la règle $(\vee)$ **:** supposons qu'il existe une dérivation π du séquent $\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi$. On montre par récurrence sur la profondeur de π que $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma, \varphi, \psi$.

- Si π se termine par $(\vee)$ où $\varphi \vee \psi$ est principale, alors évidemment il existe une sous-dérivation de π pour sa prémisse $\vdash \Gamma, \varphi, \psi$.
- Sinon π se termine par une règle (R) où $\varphi \vee \psi$ n'est pas principale. Par inspection des règles, on est nécessairement dans une situation

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi \vee \psi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi \vee \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\,(\text{R})$$

où $0 \leq k \leq 2$ ($k = 0$ correspondant au cas de la règle (ax)). Pour tout $1 \leq i \leq k$, par hypothèse de récurrence sur π_i, il existe des dérivations π'_i de $\vdash \Gamma_i, \varphi, \psi$. On a donc la dérivation

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi'_1 & & \pi'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi, \psi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi, \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}\,(\text{R})$$

Pour la règle $(\wedge)$ **:** supposons qu'il existe une dérivation π du séquent $\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi$. On montre par récurrence sur la profondeur de π que $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma, \varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma, \psi$.

- Si π se termine par $(\wedge)$ où $\varphi \wedge \psi$ est principale, alors évidemment il existe des sous-dérivations de π pour chacune de ses prémisses $\vdash \Gamma, \varphi$ et $\vdash \Gamma, \psi$.
- Sinon π se termine par une règle (R) où $\varphi \wedge \psi$ n'est pas principale. Par inspection des règles, on est nécessairement dans une situation

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi \wedge \psi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi \wedge \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\,(\text{R})$$

où $0 \leq k \leq 2$ ($k = 0$ correspondant au cas de la règle (ax)). Pour tout $1 \leq i \leq k$, par hypothèse de récurrence sur π_i, il existe des dérivations π'_i et π''_i de $\vdash \Gamma_i, \varphi$ et de

$\vdash \Gamma_i, \psi$. On a donc les dérivations

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi'_1 & & \pi'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\begin{array}{ccc}\pi''_1 & & \pi''_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \psi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \psi}\ (\mathrm{R})$$

□

Exemple 8.8. Reprenons l'exemple 8.4 et montrons que $\vdash Q_A \vee \varphi$ n'est pas prouvable, ce qui implique par le théorème de complétude que $Q_A \vee \varphi$ n'est pas valide et donc que le symbole A n'est pas productif : il suffit pour cela d'exhiber une branche d'échec, comme celle qui suit.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textbf{échec}}}{\vdash Q_A, \neg Q_S, \neg Q_S, Q_A, \neg Q_a \quad \vdash \ldots}\,(\wedge)}}{\vdash \ldots \quad \vdash Q_A, \neg Q_S, \neg Q_S, (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A), \neg Q_a}\,(\wedge)}}{\vdash \ldots \quad \vdash Q_A, \neg Q_S, (Q_A \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A), \neg Q_a}\,(\wedge)}}{\vdash Q_A, (Q_a \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A), \neg Q_a}\,(\vee)}}{\vdash Q_A, (Q_a \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee)}}{\vdash Q_A, (Q_a \wedge \neg Q_S), (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee)}}{\vdash Q_A, (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}\,(\vee)}}{\vdash Q_A \vee (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a}$$

8.2.1. *Algorithme de recherche de preuve.* Grâce au lemme 8.7 d'inversibilité syntaxique, la recherche de preuve peut s'implémenter très aisément par un programme récursif dont voici le pseudo-code.

Fonction `prouvable`$(\vdash \Gamma)$
si $\vdash \Gamma = \vdash \Delta, P, \neg P$ **alors**
  retourner $\top$
si $\vdash \Gamma = \vdash \Delta, \varphi \vee \psi$ **alors**
  retourner `prouvable`$(\vdash \Delta, \varphi, \psi)$
si $\vdash \Gamma = \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi$ **alors**
  retourner `prouvable`$(\vdash \Delta, \varphi)$ $\wedge$ `prouvable`$(\vdash \Delta, \psi)$
retourner $\bot$

8.2.2. *Implémentation de la recherche de preuve en Java.* Pour notre implémentation en Java du calcul des séquents, nous allons représenter un séquent par une structure de données plus riche qu'une simple `Collection<Formule>`, en distinguant les littéraux, les formules $\wedge$ et les formules $\vee$. Notre classe `Sequent` est définie comme suit.

💬 *L'implémentation de la recherche de preuve en OCaml sera faite en mini-projet.*

Sequent

```
import java.util.*;
public class Sequent {
    protected HashMap<String,Boolean> litteraux;
    protected LinkedList<Formule.Et> ets;
    protected LinkedList<Formule.Ou> ous;
    // ⋮
```

L'idée est qu'un littéral positif P du séquent soit associé par `litteraux` à `Boolean.TRUE`, tandis qu'un littéral négatif $\neg P$ le soit à `Boolean.FALSE`.

Cette structure permet de détecter immédiatement au moment où on ajoute un littéral au séquent s'il devient une instance de la règle d'axiome (ax) : cela se produit si on ajoute P et

que $\neg P$ était déjà présent, ou si on ajoute $\neg P$ et que P était déjà présent. Voici le code Java correspondant.

Sequent
```java
// retourne faux si le séquent devient une instance de la règle d'axiome
public boolean add(Formule phi) {
    return phi.addToSequent(this);
}
```
Formule
```java
protected abstract boolean addToSequent(Sequent seq);
```
Formule.Et
```java
protected boolean addToSequent(Sequent seq) {
    seq.ets.add(this);
    return true;
}
```
Formule.Ou
```java
protected boolean addToSequent(Sequent seq) {
    seq.ous.add(this);
    return true;
}
```
Formule.Non
```java
protected boolean addToSequent(Sequent seq) {
    // vérifie que nous sommes bien en forme normale négative
    assert (phi1.getClass() == Formule.Proposition.class);
    Formule.Proposition p = (Formule.Proposition) phi1;
    Boolean existe = seq.litteraux.put(p.nom,Boolean.FALSE);
    return existe == null || !existe.booleanValue();
}
```
Formule.Proposition
```java
public boolean addToSequent(Sequent seq) {
    Boolean existe = seq.litteraux.put(nom,Boolean.TRUE);
    return existe == null || existe.booleanValue();
}
```

Plutôt que l'algorithme récursif de la section 8.2.1, nous implémentons un algorithme itératif avec une file d'attente.

Sequent
```java
public boolean prouvable() {
    Queue<Sequent> file = new LinkedList<Sequent>(); // file d'attente
    file.add(this);
    // recherche de preuve
    while (!file.isEmpty()) {
        // le séquent à prouver
        Sequent seq = file.poll();
        // cas d'une branche d'échec
        if (seq.ous.isEmpty() && seq.ets.isEmpty())
            return false;
        // choix d'une formule principale
        Formule.Ou phi = seq.ous.poll();
        if (phi != null) {
            // si la règle d'axiome ne s'applique pas, ajout à la file
            if (seq.add(phi.phi1) && seq.add(phi.phi2))
                file.add(seq);
        }
```

```
        else {
            Formule.Et psi = seq.ets.poll();
            Sequent clone = (Sequent) seq.clone();
            // si la règle d'axiome ne s'applique pas, ajout à la file
            if (seq.add(psi.phi1))
                file.add(seq);
            // si la règle d'axiome ne s'applique pas, ajout à la file
            if (clone.add(psi.phi2))
                file.add(clone);
        }
    }
    return true;
}
```

Par le théorème 8.9 de correction et le théorème 8.12 de complétude qui seront démontrés ci-après, pour vérifier qu'une formule propositionnelle φ est valide, il suffit de vérifier que le séquent $\vdash \varphi$ est prouvable.

Formule
```
public boolean valide() {
    Sequent seq = new Sequent();
    seq.add(this.getNNF());
    return seq.prouvable();
}
```

8.3. **Correction et complétude.** Un séquent $\vdash \Gamma$ est *satisfait* par une interprétation I, ce qu'on écrit $I \vDash \Gamma$, s'il existe une formule témoin $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ telle que $I \vDash \vartheta$. On dit qu'un séquent $\vdash \Gamma$ est *valide* et on écrit $\vDash \Gamma$ si pour toute interprétation I, $I \vDash \Gamma$.

Notons que ces définitions généralisent bien les notions de satisfiabilité et de validité des formules propositionnelles. En effet, si $\Gamma = \varphi$ une formule propositionnelle en forme normale négative, par la définition ci-dessus, $\vdash \varphi$ est satisfait par une interprétation I si et seulement s'il existe une formule témoin $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ telle que $I \vDash \vartheta$; comme $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{\varphi\}$, le seul choix possible pour ϑ est $\vartheta = \varphi$, et donc I satisfait $\vdash \varphi$ si et seulement si $I \vDash \varphi$.

La correction et la complétude du calcul des séquents montrent qu'un séquent est prouvable si et seulement s'il est valide. La correction se montre par une simple induction sur les dérivations en calcul des séquents.

Théorème 8.9 (correction). *Si* $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma$, *alors* $\vDash \Gamma$.

Démonstration. On procède par induction structurelle sur une dérivation de $\vdash \Gamma$, en montrant pour chaque règle du calcul des séquents que si les prémisses sont valides, alors la conclusion l'est aussi.

- **Pour (ax) :** alors $\Gamma = \Gamma', P, \neg P$ pour une formule φ. Pour toute interprétation I, soit $I \vDash P$, soit $I \vDash \neg P$; dans tous les cas $I \vDash \Gamma$.
- **Pour ($\vee$) :** alors $\Gamma = \Gamma', \varphi \vee \psi$ où $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma', \varphi, \psi$. Soit I une interprétation quelconque ; alors par hypothèse d'induction $I \vDash \Gamma', \varphi, \psi$. Il existe donc une formule témoin $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma') \cup \{\varphi, \psi\}$ telle que $I \vDash \vartheta$. Si $\vartheta \in \{\varphi, \psi\}$, alors $I \vDash \varphi \vee \psi$, sinon $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma')$ et alors $I \vDash \Gamma'$; dans tous les cas $I \vDash \Gamma$.
- **Pour ($\wedge$) :** alors $\Gamma = \Gamma', \varphi \wedge \psi$ où $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma', \varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma', \psi$. Soit I une interprétation quelconque ; alors par hypothèse d'induction $I \vDash \Gamma', \varphi$ et $I \vDash \Gamma', \psi$. Il existe donc une formule témoin $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma') \cup \{\varphi\}$ telle que $I \vDash \vartheta$ et une formule témoin $\vartheta' \in \mathrm{dom}(\Gamma') \cup \{\psi\}$ telle que $I \vDash \vartheta'$. Si $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma')$ ou $\vartheta' \in \mathrm{dom}(\Gamma')$, alors $I \vDash \Gamma'$. Sinon, $\vartheta = \varphi$ et $\vartheta' = \psi$ et donc $I \vDash \varphi \wedge \psi$. Dans tous les cas $I \vDash \Gamma$. □

Pour la complétude du calcul des séquents, c'est-à-dire montrer que si un séquent est valide, alors il est prouvable, rappelons qu'une *branche d'échec* est une branche de recherche de preuve finie $\vdash \Gamma_0, \vdash \Gamma_1, \ldots, \vdash \Gamma_n$ où aucune règle ne s'applique au séquent $\vdash \Gamma_n$; appelons un tel séquent un *séquent d'échec*.

Propriété 8.10 (contre-modèle des séquents d'échec)**.** *Soit $\vdash \Gamma$ un séquent d'échec. Alors il en existe un* contre-modèle*, c'est-à-dire une interprétation I telle que $I \not\models \Gamma$.*

Démonstration. Par définition d'un séquent d'échec, aucune règle ne s'applique à $\vdash \Gamma$. Par suite,
- comme ni ($\vee$) ni ($\wedge$) ne s'applique, $\mathrm{dom}(\Gamma)$ ne contient que des littéraux : $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$;
- comme (ax) ne s'applique pas non plus, $\mathrm{dom}(\Gamma)$ ne contient pas à la fois un littéral et sa négation.

On peut donc trouver une interprétation I telle que $I \not\models \ell_j$ pour tout $1 \leq j \leq k$, c'est-à-dire telle que $I \not\models \ell_1, \ldots, \ell_k$ et donc $I \not\models \Gamma$. □

La branche d'échec de l'exemple 8.8 se termine sur le séquent $\vdash Q_A, \neg Q_S, \neg Q_S, Q_A, \neg Q_a$ qui est un séquent d'échec, et toute interprétation qui étend $[\bot/Q_A, \top/Q_S, \top/Q_a]$ en est un contre-modèle.

L'idée de la preuve de complétude qui va suivre est que l'existence d'un contre-modèle pour le séquent d'échec $\vdash \Gamma_n$ d'une branche d'échec $\vdash \Gamma_0, \vdash \Gamma_1, \ldots, \vdash \Gamma_n$ implique l'existence d'un contre-modèle pour le séquent $\vdash \Gamma_0$. Nous nous appuyons pour cela sur une version « sémantique » de l'inversibilité de notre calcul des séquents. On dit pour cela qu'une règle est *sémantiquement inversible* si, quand sa conclusion est valide, alors chacune de ses prémisses est aussi valide.

Lemme 8.11 (inversibilité sémantique)**.** *Les règles du calcul des séquents sont sémantiquement inversibles. Plus précisément, si une interprétation I est un contre-modèle d'une prémisse, alors c'est aussi un contre-modèle de la conclusion.*

Démonstration.

Pour la règle (ax) : comme elle n'a pas de prémisse, elle est bien sémantiquement inversible.

Pour la règle ($\vee$) : supposons $I \not\models \Gamma, \varphi, \psi$, donc $I \not\models \Gamma$, $I \not\models \varphi$ et $I \not\models \psi$. On en déduit que $I \not\models \varphi \vee \psi$, et comme $I \not\models \Gamma$, que $I \not\models \Gamma, \varphi \vee \psi$.

Pour la règle ($\wedge$) : supposons que $I \not\models \Gamma, \varphi$ (le cas où $I \not\models \Gamma, \psi$ est similaire). Donc $I \not\models \Gamma$ et $I \not\models \varphi$. On en déduit que $I \not\models \varphi \wedge \psi$ et donc, puisque $I \not\models \Gamma$, que $I \not\models \Gamma$. □

Dans l'exemple 8.8, toute interprétation I qui étend $[\bot/Q_A, \top/Q_S, \top/Q_a]$ est un contre-modèle du séquent $\vdash Q_A, \neg Q_S, \neg Q_S, Q_A, \neg Q_a$, et par applications successives du lemme 8.11 d'inversibilité sémantique, on en déduit que I est un contre-modèle du séquent $\vdash Q_A \vee (Q_a \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge \neg Q_S) \vee (Q_A \wedge Q_S \wedge \neg Q_A) \vee \neg Q_a$, qui n'est donc pas valide. C'est ce raisonnement que nous généralisons pour démontrer le théorème de complétude.

Théorème 8.12 (complétude)**.** *Si $\models \Gamma$, alors $\vdash_{\mathbf{LK}_0} \Gamma$.*

Démonstration. On procède par contraposition : on suppose $\vdash \Gamma$ non prouvable, et on montre que $\vdash \Gamma$ n'est pas valide, en exhibant un contre-modèle du séquent $\vdash \Gamma$, c'est-à-dire une interprétation I telle que $I \not\models \Gamma$.

On commence par observer que si $\vdash \Gamma$ n'est pas prouvable, alors il existe une branche d'échec. En effet, par la propriété 8.5, les branches de recherche de preuve sont finies, donc elles terminent toutes soit par un séquent d'échec, soit par une instance de la règle d'axiome. Mais si $\vdash \Gamma$ avait une recherche de preuve où toutes les branches se terminaient par une instance de la règle d'axiome, alors cette recherche aurait construit une dérivation et donc $\vdash \Gamma$ serait prouvable.

Soit donc $\vdash \Gamma_0, \ldots, \vdash \Gamma_n$ une branche d'échec où $\vdash \Gamma_0 = \vdash \Gamma$ et où $\vdash \Gamma_n$ est un séquent d'échec. Par la propriété 8.10 de contre-modèle des séquents d'échec, il existe un contre-modèle I de $\vdash \Gamma_n$, tel que $I \not\models \Gamma_n$.

On montre par récurrence décroissante sur $n \geq i \geq 0$ que $I \not\models \Gamma_i$. Pour le cas de base au rang $i = n$, on avait bien choisi I tel que $I \not\models \Gamma_n$. Pour l'étape de récurrence au rang $i - 1$, on sait par hypothèse de récurrence que $I \not\models \Gamma_i$, et par le lemme 8.11 d'inversibilité sémantique, $I \not\models \Gamma_{i-1}$. Pour conclure, on a montré qu'il existait un contre-modèle I de $\vdash \Gamma_0$, c'est-à-dire de $\vdash \Gamma$, qui n'est donc pas valide. □

💬 *On peut remarquer que, puisque le calcul des séquents est correct et complet, l'inversibilité syntaxique et l'inversibilité sémantique sont deux propriétés équivalentes : la première parle de* prouvabilité, *tandis que la seconde parle de* validité.

Partie 3. Logique classique du premier ordre

La logique propositionnelle de la partie 2 est limitée à l'expression de propriétés de propositions booléennes (interprétées comme vraies ou fausses). Nous allons l'étendre et étudier la logique du premier ordre (aussi appelée « calcul des prédicats »). Outre les connecteurs booléens déjà rencontrés ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, ...), la logique du premier ordre permet de quantifier ($\forall$, $\exists$) sur des éléments et dispose d'un vocabulaire enrichi par des symboles auxiliaires de fonction et de relation. Par exemple, les formules (1), (2) et (3) de l'introduction étaient des formules de la logique du premier ordre, où les symboles H, M, V, A et R étaient des symboles de relation.

9. Structures

Résumé. Une *signature* du premier ordre $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ est constituée de symboles de fonction $f \in \mathcal{F}$ et de symboles de relation $R \in \mathcal{P}$. On associe une *arité* dans $\mathbb{N}$ à chaque symbole et on note « $\mathcal{F}_n$ » l'ensemble des symboles de fonction d'arité n et « $\mathcal{P}_m$ » l'ensemble des symboles de relation d'arité m ; une fonction d'arité zéro est une *constante* et une relation d'arité zéro est une *proposition*.

Une *interprétation* I d'une signature $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ est définie par un domaine D_I non vide, d'une fonction $f^I : D_I^n \to D_I$ pour tout $f \in \mathcal{F}_n$ et tout n et d'une relation $R^I : D_I^m \to \mathbb{B}$ pour tout $R \in \mathcal{P}_m$ et tout m.

Les formules du premier ordre sont interprétées sur des structures très générales, utilisables pour modéliser des structures mathématiques (ordres, groupes, corps, etc.) ou des structures relationnelles comme utilisées en bases de données.

9.1. **Signatures.** On définit tout d'abord une *signature* du premier ordre (aussi appelée un « langage du premier ordre ») comme une paire $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ formée de deux ensembles dénombrables $\mathcal{F}$ de symboles de fonction et $\mathcal{P} \neq \emptyset$ de symboles de relation (aussi appelés « symboles de prédicat »), avec $\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, et tous deux munis d'une fonction d'*arité* $r : \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \to \mathbb{N}$. On note $\mathcal{F}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{F} \mid r(f) = n\}$ et $\mathcal{P}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{R \in \mathcal{P} \mid r(R) = n\}$ leurs restrictions aux symboles d'arité n. Une fonction d'arité zéro est appelée une *constante* ; une relation d'arité zéro est appelée une *proposition*.

On peut aussi travailler avec des signatures non dénombrables, mais les preuves nécessitent alors d'utiliser des notions de théorie des ensembles comme le lemme de Zorn.

(Duparc, 2015, sec. 11.1)

L'ensemble des formules valides change si l'on permet un domaine vide.

9.2. **Interprétations.** Une *interprétation* I d'une signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ (aussi appelée une « L-structure ») est constituée d'un ensemble $D_I \neq \emptyset$, appelé son domaine ou son support, d'une fonction $f^I : D_I^{r(f)} \to D_I$ pour chaque $f \in \mathcal{F}$, et d'une relation $R^I : D_I^{r(R)} \to \mathbb{B}$ pour chaque $R \in \mathcal{P}$. Une telle interprétation est notée $I = (D_I, (f^I)_{f \in \mathcal{F}}, (R^I)_{R \in \mathcal{P}})$; dans le cas où $=^I$ est l'égalité sur D_I, on l'omet dans cette notation.

Exemple 9.1 (ordres)**.** Posons $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$ où l'exposant « $^{(2)}$ » indique un symbole d'arité 2. Dans cette signature, il n'y a pas de symboles de fonction, et il y a deux symboles de relation d'arité 2. Une interprétation $I = (\mathbb{Q}, <)$ pour cette signature est définie par $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}$, $<^I \stackrel{\text{def}}{=} <$ l'ordre habituel sur les rationnels et $=^I$ l'égalité sur les rationnels.

Exemple 9.2 (arithmétique)**.** Posons $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{+^{(2)}, \times^{(2)}\}$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{=^{(2)}\}$. Cette signature comprend deux fonctions binaires $+$ et $\times$, et une relation binaire $=$. Une interprétation $I = (\mathbb{N}, +, \times)$ pour cette signature est définie par $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$, $+^I : (n, m) \mapsto n + m$, $\times^I : (n, m) \mapsto nm$ et $=^I$ l'égalité sur $\mathbb{N}$.

Exemple 9.3 (base de donnée relationnelle)**.** Posons

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathit{shining}^{(0)}, \mathit{player}^{(0)}, \mathit{chinatown}^{(0)}, \mathit{repulsion}^{(0)}, \mathit{kubrick}^{(0)}, \mathit{altman}^{(0)}, \mathit{polanski}^{(0)}, \mathit{nicholson}^{(0)}, \mathit{robbins}^{(0)}, \mathit{deneuve}^{(0)}, \mathit{champo}^{(0)}, \mathit{odeon}^{(0)}\}$$

et

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathit{Film}^{(3)}, \mathit{Seance}^{(2)}, =^{(2)}\} .$$

Une interprétation I possible pour cette signature a pour domaine

$$D_I \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathit{Shining}, \mathit{The\ Player}, \mathit{Chinatown}, \mathit{Repulsion}, \textsc{Kubrick}, \textsc{Altman}, \textsc{Polanski}, \textsc{Nicholson}, \textsc{Robbins}, \textsc{Deneuve}, \text{Le Champo}, \text{Odéon}\}$$

où les constantes sont interprétées de manière évidente, et

$$\mathit{Film}^I \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathit{Shining}, \textsc{Kubrick}, \textsc{Nicholson}),\ (\mathit{The\ Player}, \textsc{Altman}, \textsc{Robbins}),\ (\mathit{Chinatown}, \textsc{Polanski}, \textsc{Nicholson}),\ (\mathit{Chinatown}, \textsc{Polanski}, \textsc{Polanski}),\ (\mathit{Repulsion}, \textsc{Polanski}, \textsc{Deneuve})\} ,$$

$$\mathit{Seance}^I \stackrel{\text{def}}{=} \{(\text{Le Champo}, \mathit{Shining}),\ (\text{Le Champo}, \mathit{Chinatown}),\ (\text{Le Champo}, \mathit{The\ Player}),\ (\text{Odéon}, \mathit{Chinatown})\}$$

et $=^I$ est l'égalité sur D_I. Cette interprétation correspond aux tables « Films » et « Séances » de la base de donnée ci-après.

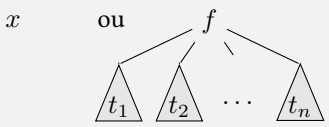
Films		
titre	réalisation	interprète
Shining	Kubrick	Nicholson
The Player	Altman	Robbins
Chinatown	Polanski	Nicholson
Chinatown	Polanski	Polanski
Repulsion	Polanski	Deneuve

Séances	
cinéma	titre
Le Champo	*Shining*
Le Champo	*Chinatown*
Le Champo	*The Player*
Odéon	*Chinatown*

💬 *Vous vous souvenez peut-être de cet exemple vu lors du cours de « bases de données » en L2. En général, une base de donnée peut-être vue comme une interprétation sur une signature dotée des symboles de constantes adéquats, d'un symbole de relation par table, et du symbole d'égalité.*

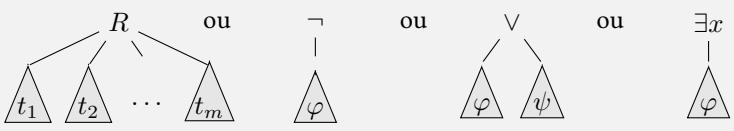
10. Syntaxe

Résumé. Fixons une signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ et un ensemble infini dénombrable de *variables* X. L'ensemble $T(\mathcal{F}, X)$ des *termes* sur $\mathcal{F}$ et X est l'ensemble des arbres de la forme



où $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}_n$ et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes.

Une *formule* est un arbre de la forme



où $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F}, X)$, $x \in X$ et φ et ψ sont des formules. Une formule de la forme « $R(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ » est dite *atomique*.

Un terme sans variable est un *terme clos* et on note « $T(\mathcal{F})$ » pour l'ensemble des termes clos sur $\mathcal{F}$. Une variable x qui apparaît dans une formule mais pas sous un quantificateur $\exists x$ est dite *libre* ; sinon elle est *liée*. On note « $\mathrm{fv}(\varphi)$ » pour l'ensemble des variables libres de φ et « $\mathrm{bv}(\varphi)$ » pour son ensemble de variables liées. Une formule sans variable libre est dite *close*.

(Duparc, 2015, sec. 10.3), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 1.2), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 6.1), (Harrisson, 2009, sec. 3.1).

💬 *La* logique propositionnelle *(aussi appelée « calcul des propositions ») de la partie 2 est obtenue en posant $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$, et en interdisant la quantification dans la syntaxe des formules.*

10.1. **Formules.** Soit X un ensemble infini dénombrable de symboles de variables. Les formules de la logique du premier ordre sur une signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ (aussi appelées « L-formules ») sont définies par la syntaxe abstraite

$$\begin{aligned} t &::= x \mid f(t_1, \ldots, t_m) && \text{(termes)} \\ \alpha &::= R(t_1, \ldots, t_m) && \text{(formules atomiques)} \\ \varphi &::= \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\varphi && \text{(formules)} \end{aligned}$$

où $x \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}_m$ et $R \in \mathcal{P}_m$. L'ensemble des termes sur X et $\mathcal{F}$ est aussi dénoté $T(\mathcal{F}, X)$. Un *littéral* est une formule atomique α ou sa négation $\neg\alpha$.

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on peut ajouter d'autres opérateurs booléens à cette syntaxe minimale. Alternativement, ces symboles peuvent être définis dans la logique :

$$\varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \qquad \forall x.\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\exists x.\neg\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\varphi \vee \psi$$
$$\top \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.R(x, \ldots, x) \vee \neg R(x, \ldots, x) \qquad \bot \stackrel{\text{def}}{=} \neg\top$$

où R est un symbole arbitraire de $\mathcal{P}$ (qui est supposé non vide).

Comme pour les formules propositionnelles, les formules de la logique du premier ordre sont donc des arbres de syntaxe abstraite. Par exemple, la figure 20 décrit la formule du buveur $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$. On a matérialisé dans cette figure les liens (en pointillés rouges) entre quantification et occurrences de chaque variable.

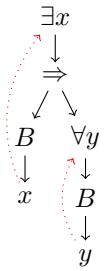


FIGURE 20. L'arbre de syntaxe abstraite de la formule du buveur $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$.

(Duparc, 2015, sec. 10.6), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, def. 6.3)

10.2. **Variables libres et variables liées.** L'ensemble $\mathrm{fv}(t)$ des *variables libres* (« *free variables* » en anglais) d'un terme t est défini inductivement par

$$\mathrm{fv}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}\,, \qquad \mathrm{fv}(f(t_1, \ldots, t_m)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{1 \le i \le m} \mathrm{fv}(t_i)\,.$$

Un terme t sans variable libre (*i.e.* $\mathrm{fv}(t) = \emptyset$) est dit *clos* ; l'ensemble des termes clos est noté $T(\mathcal{F})$.

Les ensembles $\mathrm{fv}(\varphi)$ des *variables libres* et $\mathrm{bv}(\varphi)$ des *variables liées* (« *bound variables* » en anglais) d'une formule φ sont définis inductivement par

$$\mathrm{fv}(R(t_1,\dots,t_m)) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{1\le i\le m} \mathrm{fv}(t_i)\ , \qquad \mathrm{bv}(R(t_1,\dots,t_m)) \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset\ ,$$
$$\mathrm{fv}(\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(\varphi)\ , \qquad \mathrm{bv}(\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(\varphi)$$
$$\mathrm{fv}(\varphi\vee\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(\varphi)\cup\mathrm{fv}(\psi)\ , \qquad \mathrm{bv}(\varphi\vee\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{bv}(\varphi)\cup\mathrm{bv}(\psi)\ ,$$
$$\mathrm{fv}(\exists x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{fv}(\varphi)\setminus\{x\} \qquad \mathrm{bv}(\exists x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{x\}\cup\mathrm{bv}(\varphi)\ .$$

Une formule φ sans variable libre (*i.e.* $\mathrm{fv}(\varphi)=\emptyset$) est dite *close*.

11. Sémantique

Résumé. Soit $L=(\mathcal{F},\mathcal{P})$ une signature du premier ordre et $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\bot,\top\}$ l'ensemble des *valeurs de vérité*, où $\bot$ désigne « faux » et $\top$ désigne « vrai ». Étant donnée une *interprétation* I de L et une *valuation* $\rho\colon X\to D_I$ des variables,
- la *sémantique* d'un terme t est un élément $[\![t]\!]^I_\rho \in D_I$ et
- la *sémantique* d'une formule φ est une valeur de vérité $[\![\varphi]\!]^I_\rho\in\mathbb{B}$.

Dans les deux cas, ces sémantiques ne dépendent que de la valuation des variables libres de t et φ (propriété 11.1). On note « $I,\rho\vDash\varphi$ » si $[\![\varphi]\!]^I_\rho=\top$.

Une formule est *satisfiable* s'il existe une interprétation I et une valuation ρ telles que $I,\rho\vDash\varphi$. Une interprétation I est un *modèle* d'une formule φ (noté « $I\vDash\varphi$ ») si pour toute valuation ρ, on a $I,\rho\vDash\varphi$. Une formule φ est une *conséquence logique* d'un ensemble de formules S (noté « $S\vDash\varphi$ ») si, pour toute interprétation I et pour toute valuation ρ telles que $I,\rho\vDash\psi$ pour toute formule $\psi\in S$, on a $I,\rho\vDash\varphi$. Enfin, une formule φ est *valide* (noté « $\vDash\varphi$ ») si pour toute interprétation I et toute valuation ρ, on a $I,\rho\vDash\varphi$.

Fixons $L=(\mathcal{F},\mathcal{P})$ une signature du premier ordre. On note $\mathbb{B}\stackrel{\text{def}}{=}\{\bot,\top\}$ pour l'ensemble des *valeurs de vérité* (aussi appelé « algèbre de Boole »), muni des opérations $\neg\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ et $\vee\colon\mathbb{B}^2\to\mathbb{B}$, définies par $\neg\top=\bot\vee\bot=\bot$ et $\neg\bot=\top\vee\top=\top\vee\bot=\bot\vee\top=\top$. Pour une famille $(v_j)_{j\in J}$ de valeurs de vérité $v_j\in\mathbb{B}$ indexée par un ensemble J, on définit aussi la disjonction distribuée par $\bigvee_{j\in J} v_j=\top$ si et seulement s'il existe $j\in J$ tel que $v_j=\top$.

(David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 2.2), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 6.2), (Harrisson, 2009, sec. 3.3).

11.1. **Satisfiabilité.** Une *valuation* dans I est une fonction $\rho\colon X\to D_I$. On notera $\rho[e/x]$ pour la valuation qui associe e à x et $\rho(y)$ à $y\neq x$. Pour un terme t, sa sémantique $[\![t]\!]^I_\rho$ dans une interprétation I pour une valuation ρ est un élément de D_I défini inductivement par

$$[\![x]\!]^I_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x)\ , \qquad [\![f(t_1,\dots,t_m)]\!] \stackrel{\text{def}}{=} f^I([\![t_1]\!]^I_\rho,\dots,[\![t_m]\!]^I_\rho)$$

pour tout m et tout $f\in\mathcal{F}_m$.

La sémantique $[\![\varphi]\!]^I_\rho$ d'une formule dans une interprétation I pour une valuation ρ est une valeur de vérité dans $\mathbb{B}$ définie inductivement par

$$[\![R(t_1,\dots,t_m)]\!]^I_\rho \stackrel{\text{def}}{=} R^I([\![t_1]\!]^I_\rho,\dots,[\![t_m]\!]^I_\rho)\ , \qquad [\![\neg\varphi]\!]^I_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \neg[\![\varphi]\!]^I_\rho\ ,$$
$$[\![\varphi\vee\psi]\!]^I_\rho \stackrel{\text{def}}{=} [\![\varphi]\!]^I_\rho\vee[\![\psi]\!]^I_\rho\ , \qquad [\![\exists x.\varphi]\!]_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{e\in D_I} [\![\varphi]\!]^I_{\rho[e/x]}\ .$$

voir aussi (Duparc, 2015, sec. 11.3) pour une définition de la sémantique en termes de jeux

On dit que (I, ρ) *satisfait* φ, noté $I, \rho \vDash \varphi$, si $[\![\varphi]\!]^I_\rho = \top$; cette écriture peut être définie de manière équivalente par

$$\begin{aligned}
&I, \rho \vDash R(t_1, \dots, t_m) && \text{si } ([\![t_1]\!]^I_\rho, \dots, [\![t_m]\!]^I_\rho) \in R^I \ , \\
&I, \rho \vDash \neg\varphi && \text{si } I, \rho \nvDash \varphi \ , \\
&I, \rho \vDash \varphi \vee \psi && \text{si } I, \rho \vDash \varphi \text{ ou } I, \rho \vDash \psi \ , \\
&I, \rho \vDash \exists x.\varphi && \text{si } \exists e \in D_I . I, \rho[e/x] \vDash \varphi \ .
\end{aligned}$$

On dit que I est un *modèle* de φ, noté $I \vDash \varphi$, si pour toute valuation ρ, $I, \rho \vDash \varphi$. Une formule φ est *satisfiable* s'il existe une interprétation I et une valuation ρ telle que $I, \rho \vDash \varphi$. Elle est *valide*, ce qui est noté $\vDash \varphi$, si pour toute interprétation I et toute valuation ρ, $I, \rho \vDash \varphi$; autrement dit, φ est valide si pour toute interprétation I, I est un modèle de φ.

Pour un ensemble de formules S, une interprétation I et une valuation ρ, on écrit $I, \rho \vDash S$ si $I, \rho \vDash \psi$ pour toutes les formules $\psi \in S$. Si de plus φ est une formule, on écrit $S \vDash \varphi$ si pour toute paire (I, ρ) telle que $I, \rho \vDash S$ on a $I, \rho \vDash \varphi$. Un ensemble S de formules est *insatisfiable* s'il n'existe pas I et ρ telles que $I, \rho \vDash S$, ou de manière équivalente si $S \vDash \bot$.

Notons que la satisfaction d'une formule ne dépend que de la valuation de ses variables libres.

Propriété 11.1. *Pour toute formule φ (resp. terme t), toute interprétation I, et toutes valuations ρ et ρ' telles que pour tout $x \in \mathrm{fv}(\varphi)$ (resp. $x \in \mathrm{fv}(t)$) $\rho(x) = \rho'(x)$, $[\![\varphi]\!]^I_\rho = [\![\varphi]\!]^I_{\rho'}$ (resp. $[\![t]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_{\rho'}$).*

Démonstration. Par induction structurelle sur φ (resp. t). □

En particulier, par la propriété 11.1, φ avec $\mathrm{fv}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est satisfiable si et seulement la formule close $\exists x_1 \dots \exists x_n.\varphi$ est satisfiable, et φ est valide si et seulement si la formule close $\forall x_1 \dots \forall x_n.\varphi$ est valide.

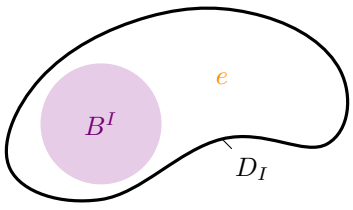
Exemple 11.2 (formule du buveur)**.** Considérons la signature $L = (\emptyset, \{B^{(1)}\})$ avec une relation unaire B. La formule $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$, qui se lit habituellement « il existe un individu tel que s'il boit alors tout le monde boit », est valide.

On notera que cette formule n'est pas valide si l'on permet un domaine d'interprétation vide. Elle n'est pas non plus valide en logique intuitionniste du premier ordre.

Nous allons montrer que dans toute interprétation I et pour toute valuation ρ, $I, \rho \vDash \exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$. Cela revient à montrer que pour toute interprétation I, il existe un élément $e \in D_I$ tel que $I, \rho[e/x] \vDash B(x) \Rightarrow \forall y.B(y)$, c'est-à-dire tel que

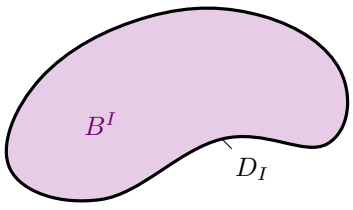
$$I, \rho[e/x] \nvDash B(x) \qquad \text{ou} \qquad I, \rho[e/x] \vDash \forall y.B(y) \ .$$

Il y a alors deux cas selon l'interprétation B^I du symbole de relation B :



soit $B^I \subsetneq D_I$: il existe un élément « sobre » $e \in D_I$ tel que $e \notin B^I$, et on a bien

$$I, \rho[e/x] \nvDash B(x)$$



soit $B^I = D_I$: comme $D_I \neq \emptyset$, on peut choisir n'importe quel $e \in D_I$ et on a bien

$$I, \rho[e/x] \vDash \forall y.B(y)$$

Exemple 11.3 (requêtes sur une base de données)**.**
Considérons la signature et l'interprétation I de l'exemple 9.3. Une formule du premier ordre permet d'exprimer des *requêtes* sur la base de données correspondante : si $x_1, \dots, x_n$

sont les variables libres de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, l'ensemble de n-uplets $\varphi(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{(v_1, \ldots, v_n) \mid I, [v_1/x_1, \ldots, v_n/x_n] \vDash \varphi\}$ est le résultat de la requête.

— Les titres des films présents dans la base de données :

$$\exists r \exists i. \mathit{Film}(x, r, i) \tag{7}$$

avec pour résultat $\{\mathit{Shining}, \mathit{The\ Player}, \mathit{Chinatown}, \mathit{Repulsion}\}$.

— Tous les cinémas qui diffusent un film de Polanski :

$$\exists t \exists i. \mathit{Film}(t, \mathit{polanski}, i) \wedge \mathit{Seance}(x, t) \tag{8}$$

avec pour résultat {Le Champo, Odéon}.

— Tous les cinémas qui diffusent un film de Polanski avec Deneuve :

$$\exists t. \mathit{Film}(t, \mathit{polanski}, \mathit{deneuve}) \wedge \mathit{Seance}(x, t) \tag{9}$$

avec pour résultat $\emptyset$.

— Les interprètes qui ont joué dans un film dirigé par Kubrick ou par Polanski :

$$\exists t. \mathit{Film}(t, \mathit{kubrick}, x) \vee \mathit{Film}(t, \mathit{polanski}, x) \tag{10}$$

avec pour résultat {Nicholson, Polanski, Deneuve}.

— Les réalisateurs qui ont joué dans un film qu'ils ont dirigé :

$$\exists t. \mathit{Film}(t, x, x) \tag{11}$$

avec pour résultat {Polanski}.

— Les réalisateurs et les cinémas qui diffusent leurs films :

$$\exists t \exists i. \mathit{Film}(t, x, i) \wedge \mathit{Seance}(y, t) \tag{12}$$

avec pour résultat {(Kubrick, Le Champo), (Altman, Le Champo), (Polanski, Le Champo), (Polanski, Odéon)}.

— Les réalisateurs dont les films passent dans tous les cinémas :

$$\forall c. (\exists t. \mathit{Seance}(c, t)) \Rightarrow (\exists t \exists i.\ \mathit{Film}(t, x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t)) \tag{13}$$

avec pour résultat {Polanski}. À noter ici que par souci de lisibilité, on aurait pu définir une formule $\mathit{cinema}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists t. \mathit{Seance}(x, t)$ et écrire notre requête (13) comme

$$\forall c. \mathit{cinema}(c) \Rightarrow \exists t \exists i. \mathit{Film}(t, x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t)\ . \tag{14}$$

Comme la langue française est ambiguë, on aurait aussi pu comprendre cette requête comme

$$\exists t \exists i. \mathit{Film}(t, x, i) \wedge \forall c. \mathit{cinema}(c) \Rightarrow \mathit{Seance}(c, t) \tag{15}$$

qui retourne aussi {Polanski}.

— Les films dirigés par le même réalisateur que *Chinatown* et qui ont au moins un interprète en commun avec *Chinatown* :

$$\exists r \exists i. \mathit{Film}(x, r, i) \wedge \mathit{Film}(\mathit{chinatown}, r, i) \tag{16}$$

avec pour réponse $\{\mathit{Chinatown}\}$.

— Les interprètes qui ont joué dans un film de Polanski mais pas dans un film de Kubrick :

$$(\exists t. \mathit{Film}(t, \mathit{polanski}, x)) \wedge \neg(\exists t. \mathit{Film}(t, \mathit{kubrick}, x)) \tag{17}$$

avec pour résultat {Polanski, Deneuve}.

— Les interprètes qui n'ont joué que dans un seul film :

$$\exists t \exists r. \mathit{Film}(t, r, x) \wedge \forall t' \forall r'. \mathit{Film}(t', r', x) \Rightarrow t = t' \tag{18}$$

avec pour résultat {Robbins, Polanski, Deneuve}.

Exemple 11.4 (propriétés des ordres)**.** Dans la signature de l'exemple 9.1, l'interprétation I de domaine $\mathbb{Q}$ est un modèle de la formule

$$\forall x \exists y . y < x \tag{19}$$

qui exprime le fait que l'ordre n'est pas borné à gauche ; comme il s'agit d'une formule close, elle est donc valide. Il en serait de même si on avait pris $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$ et $<^I$ l'ordre sur les entiers relatifs. En revanche, si on avait pris $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$, la formule (19) serait devenue fausse : cette formule n'est donc pas valide.
La formule close

$$\forall x \forall y . x < y \Rightarrow \exists z . x < z \wedge z < y \tag{20}$$

exprime que l'ordre est dense. Elle est vraie sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$. La formule

$$\forall x \exists y \forall z . x < y \wedge \neg (x < z \wedge z < y) \tag{21}$$

est au contraire vraie sur $\mathbb{Z}$ mais fausse sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 11.5 (propriétés arithmétiques)**.** Dans la signature de l'exemple 9.2 et l'interprétation I de domaine $\mathbb{N}$, on peut définir dans la logique :

- le nombre 0 par une formule avec une variable libre

$$\mathit{zero}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + x = x \tag{22}$$

  et alors $I \vDash \exists x . \mathit{zero}(x) \wedge \forall y . (\mathit{zero}(y) \Rightarrow x = y)$;
- de même, le nombre 1 par une formule avec une variable libre

$$\mathit{un}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \mathit{zero}(x) \wedge x \times x = x \tag{23}$$

  et alors $I \vDash \exists x . \mathit{un}(x) \wedge \forall y . (\mathit{un}(y) \Rightarrow x = y)$;
- l'ordre strict par une formule avec deux variables libres

$$x < y \stackrel{\text{def}}{=} \exists z . \neg \mathit{zero}(z) \wedge y = x + z \ ; \tag{24}$$

- le prédicat

$$\mathit{pair}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists y \exists z . x = y \times (z + z) \wedge \mathit{un}(z) \ ; \tag{25}$$

- le prédicat

$$\mathit{premier}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \neg \mathit{zero}(x) \wedge \neg \exists y \exists z . x = y \times z \wedge \neg \mathit{un}(y) \wedge \neg \mathit{un}(z) \ ; \tag{26}$$

- une formule close qui dit que tout nombre premier supérieur à 2 est impair :

$$\forall x . (\mathit{premier}(x) \wedge \exists y . x > y + y \wedge \mathit{un}(y)) \Rightarrow \neg \mathit{pair}(x) \ . \tag{27}$$

12. Substitutions

Résumé. Une *substitution* est une fonction σ de domaine fini qui associe à toute variable $x \in X$ un terme $\sigma(x) \in T(\mathcal{F}, X)$; par extension, $t\sigma$ est le terme t dans lequel toutes les occurrences de chaque variable x ont été remplacées par $\sigma(x)$.

Une substitution σ est *applicable* à une formule φ si elle n'interagit pas avec les variables liées de φ ; on note alors « $\varphi\sigma$ » pour la formule φ dans laquelle toutes les occurrences de chaque variable x ont été remplacées par $\sigma(x)$. Modulo *α-renommage*, qui consiste à renommer les variables liées de φ, on peut toujours appliquer une substitution (c.f. propriété 12.3).

Soit I une interprétation et ρ une valuation. On dénote par « $\rho\sigma$ » la valuation qui associe pour toute variable $x \in X$ l'élément $(\rho\sigma)(x) \stackrel{\text{def}}{=} [\![\sigma(x)]\!]^I_\rho$; alors le lemme 12.5 de substitution dit que $[\![\varphi\sigma]\!]^I_\rho = [\![\varphi]\!]^I_{\rho\sigma}$.

Une *substitution* est une fonction $\sigma\colon X \to T(\mathcal{F}, X)$ de *domaine* $\mathrm{dom}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$ fini. On note aussi σ comme $[\sigma(x_1)/x_1, \ldots, \sigma(x_n)/x_n]$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables distinctes de $\mathrm{dom}(\sigma)$.

(Duparc, 2015, sec. 10.7), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, def. 6.4), (Harrisson, 2009, sec. 3.4).

Une substitution définit une fonction $t \mapsto t\sigma$ de $T(\mathcal{F}, X)$ dans $T(\mathcal{F}, X)$ par induction sur le terme t

$$x\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(x)\ , \qquad\qquad f(t_1, \ldots, t_m)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1\sigma, \ldots, t_m\sigma)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{F}_m$. Une substitution à image dans $T(\mathcal{F})$ est dite *close*.

Ces définitions s'étendent aussi aux formules. Cependant, du fait de la présence de variables liées dans les formules, une substitution n'est pas applicable à n'importe quelle formule. Pour une substitution σ et une formule φ, on note $\mathrm{rv}_\varphi(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{fv}(\varphi)} \mathrm{fv}(\sigma(x))$ son ensemble de variables images (« *range variables* » en anglais). On dit que σ est *applicable* à φ si $(\mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{rv}_\varphi(\sigma)) \cap \mathrm{bv}(\varphi) = \emptyset$, et dans ce cas on définit $\varphi\sigma$ comme l'application de σ à φ par induction sur la formule φ

$$R(t_1, \ldots, t_m)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} R(t_1\sigma, \ldots, t_m\sigma)\ , \qquad (\neg\varphi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi\sigma)\ ,$$
$$(\varphi \vee \psi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\sigma) \vee (\psi\sigma)\ , \qquad (\exists x.\varphi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.(\varphi\sigma)\ ,$$

où $m \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathcal{P}_m$.

La *composition* $\sigma\sigma'$ de deux substitutions σ et σ' est définie par $\varphi(\sigma\sigma') \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\sigma)\sigma'$. Par exemple $(B(x) \vee B(y))[y/x, z/y] = B(y) \vee B(z)$, $(B(x) \vee B(y))[y/x][z/y] = B(z) \vee B(z)$, et $(B(x) \vee B(y))[z/x] = B(z) \vee B(y)$.

12.1. **Lemme de substitution.** Les valuations fournissent le pendant côté modèles des substitutions côté formules. Pour une substitution σ et une valuation ρ, notons $\sigma\rho$ la valuation $x \mapsto [\![\sigma(x)]\!]^I_\rho$ pour tout $x \in X$. Nous préparons ici le terrain pour le lemme 12.5 de substitution, qui sera énoncé sous une forme plus générale un peu plus loin.

Une substitution propositionnelle τ reliait deux interprétations I et $I\tau$; par contraste, une substitution σ relie deux valuations ρ et $\rho\sigma$.

Lemme 12.1. *Pour tout terme t, toute substitution σ, toute interprétation I, et toute valuation ρ, $[\![t\sigma]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_{\sigma\rho}$.*

Démonstration. Par induction structurelle sur t.

Pour le cas de base d'une variable x, $[\![x\sigma]\!]^I_\rho = [\![\sigma(x)]\!]^I_\rho = (\sigma\rho)(x) = [\![x]\!]^I_{\sigma\rho}$.

Pour un terme $f(t_1, \ldots, t_m)$, $[\![f(t_1, \ldots, t_m)\sigma]\!]^I_\rho = [\![f(t_1\sigma, \ldots, t_m\sigma)]\!]^I_\rho = f^I([\![t_1\sigma]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_m\sigma]\!]^I_\rho) \stackrel{\text{h.i.}}{=} f^I([\![t_1]\!]^I_{\sigma\rho}, \ldots, [\![t_m]\!]^I_{\sigma\rho}) = [\![f(t_1, \ldots, t_m)]\!]^I_{\sigma\rho}$. □

Lemme 12.2. *Pour toute formule φ, toute substitution σ applicable à φ, toute interprétation I, et toute valuation ρ, $[\![\varphi\sigma]\!]^I_\rho = [\![\varphi]\!]^I_{\sigma\rho}$.*

Démonstration. Par induction structurelle sur φ.

Pour une formule atomique $R(t_1, \ldots, t_m)$, une négation $\neg\varphi$, ou une disjonction $\varphi \vee \psi$, cela découle du lemme 12.1 et de l'hypothèse d'induction. Pour une quantification $\exists x.\varphi$,

$$[\![(\exists x.\varphi)\sigma]\!]^I_\rho = [\![\exists x.(\varphi\sigma)]\!]^I_\rho = \bigvee_{e \in D_I} [\![\varphi\sigma]\!]^I_{\rho[e/x]} \stackrel{\text{h.i.}}{=} \bigvee_{e \in D_I} [\![\varphi]\!]^I_{\sigma(\rho[e/x])} = [\![\exists x.\varphi]\!]^I_{\sigma\rho}\ ,$$

où il faut montrer pour justifier cette dernière étape que, pour toute variable libre $z \in \mathrm{fv}(\varphi)$, $(\sigma(\rho[e/x]))(z) = ((\sigma\rho)[e/x])(z)$, ce qui permettra de conclure par la propriété 11.1. Si $z = x$, alors $(\sigma(\rho[e/x]))(x) = [\![\sigma(x)]\!]^I_{\rho[e/x]} = [\![x]\!]^I_{\rho[e/x]} = e = [\![x]\!]^I_{(\sigma\rho)[e/x]} = ((\sigma\rho)[e/x])(x)$ où $\sigma(x) = x$ puisque, comme σ est applicable à $\exists x.\varphi$ et $x \in \mathrm{bv}(\exists x.\varphi)$, $x \notin \mathrm{dom}(\sigma)$. Si $z \neq x$, alors $(\sigma(\rho[e/x]))(z) = [\![\sigma(z)]\!]^I_{\rho[e/x]} = [\![\sigma(z)]\!]^I_\rho = ((\sigma\rho)[e/x])(z)$, où l'égalité centrale repose sur le fait que $x \notin \mathrm{fv}(\sigma(z))$, qui à son tour découle de $\mathrm{bv}(\exists x.\varphi) \cap \mathrm{rv}_{\exists x.\varphi}(\sigma) = \emptyset$ puisque σ est applicable à $\exists x.\varphi$. □

L'α-renommage est aussi une notion de base du λ-calcul, qui est au cœur des lambda-expressions de Java et OCaml.

12.2. **α-renommages.** Quand une substitution σ n'est pas applicable à une formule φ, il est cependant possible d'effectuer un α-renommage à φ pour obtenir une formule φ' sur laquelle appliquer σ. On raisonnera donc implicitement non sur des formules mais sur des classes de formules équivalentes à α-renommage près. Il est important dans ce cas que cette opération définisse une congruence (l'α-congruence) sur les formules pour pouvoir continuer à raisonner inductivement, et que l'opération préserve la sémantique des formules.

On définit l'opération d'α-renommage par

$$\exists x.\varphi \to_\alpha \exists y.\varphi[y/x] \qquad (\alpha\text{-renommage})$$

où $y \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$ et $[y/x]$ est applicable à φ. À noter que l'α-renommage n'impacte que les variables liées de φ, ce qui explique pourquoi il en préserve la sémantique (voir le lemme 12.4 ci-dessous).

On définit l'*α-congruence* $=_\alpha$ comme la plus petite congruence entre formules engendrée par $\to_\alpha$, c'est-à-dire la plus petite relation réflexive, symétrique et transitive telle que $\varphi \to_\alpha \psi$ implique $\varphi =_\alpha \psi$ et telle que si $\varphi =_\alpha \psi$ et $\varphi' =_\alpha \psi'$, alors $\neg\varphi =_\alpha \neg\psi$, $\varphi \vee \varphi' =_\alpha \psi \vee \psi'$ et $\exists x.\varphi =_\alpha \exists x.\psi$.

En appliquant des α-renommages inductivement sur les sous-formules croissantes de φ, on peut au besoin renommer toutes les variables liées de φ, et on déduit :

Propriété 12.3 (applicabilité)**.** *Pour toute substitution σ et toute formule φ, il existe une formule φ' telle que $\varphi =_\alpha \varphi'$ et que σ soit applicable à φ'. De plus, si $\varphi =_\alpha \varphi''$ et σ est aussi applicable à φ'', alors $\varphi' =_\alpha \varphi''$ et $\varphi'\sigma =_\alpha \varphi''\sigma$.*

Il reste à vérifier que les α-renommages n'impactent pas la sémantique des formules.

Lemme 12.4 (α-congruence)**.** *Soient φ et ψ deux formules telles que $\varphi =_\alpha \psi$. Alors pour toute interprétation I et toute valuation ρ, $[\![\varphi]\!]^I_\rho = [\![\psi]\!]^I_\rho$.*

Démonstration. Par induction sur la congruence $=_\alpha$.

Le cas de base est celui d'un α-renommage $\exists x.\varphi \to_\alpha \exists y.\varphi[y/x]$ avec $y \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$ et $[y/x]$ applicable. Puisque $[y/x]$ est applicable, par le lemme 12.2,

$$[\![\exists y.\varphi[y/x]]\!]^I_\rho = \bigvee_{e\in D_I} [\![\varphi[y/x]]\!]^I_{\rho[e/y]} = \bigvee_{e\in D_i} [\![\varphi]\!]^I_{[y/x](\rho[e/y])} = \bigvee_{e\in D_i} [\![\varphi]\!]^I_{\rho[e/x]} = [\![\exists x.\varphi]\!]^I_\rho$$

où nous devons justifier pour l'avant-dernière étape que, pour toute variable libre $z \in \mathrm{fv}(\varphi)$, $([y/x](\rho[e/y]))(z) = (\rho[e/x])(z)$, ce qui permettra de conclure ce cas de base par la propriété 11.1. Si $x = z$, alors $([y/x](\rho[e/y]))(x) = [\![y]\!]^I_{\rho[e/y]} = e = [\![x]\!]^I_{\rho[e/x]} = (\rho[e/x])(x)$. Si $x \neq z$, alors d'une part $([y/x](\rho[e/y]))(z) = [\![z]\!]^I_{\rho[e/y]} = [\![z]\!]^I_\rho$ puisque $y \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$ et donc $y \neq z$, et d'autre part $(\rho[e/x])(z) = [\![z]\!]^I_{\rho[e/x]} = [\![z]\!]^I_\rho$.

Le cas de base de la réflexivité ainsi que les étapes d'induction pour la symétrie, la transitivité, et la congruence pour $\neg$, $\vee$ et $\exists$ sont évidents puisque $[\![\varphi]\!]^I_\rho = [\![\psi]\!]^I_\rho$ vue comme une relation entre formules est aussi une congruence. □

La propriété 12.3 et le lemme 12.4 justifient un abus de notation : nous écrirons désormais « $\varphi\sigma$ » pour une formule $\varphi'\sigma$ où $\varphi =_\alpha \varphi'$ et σ est applicable à φ'. Le lemme 12.1 ainsi que le lemme 12.4 d'α-congruence combiné au lemme 12.2 nous permettent alors d'énoncer le lemme de substitution.

(Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, thm. 6.8).

Lemme 12.5 (substitution)**.** *Pour tout terme t, toute formule φ, toute substitution σ, toute interprétation I, et toute valuation ρ, $[\![t\sigma]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_{\sigma\rho}$ et $[\![\varphi\sigma]\!]^I_\rho = [\![\varphi]\!]^I_{\sigma\rho}$.*

On utilisera par la suite deux identités aisément démontrables par induction sur φ : en appliquant au besoin une α-congruence à φ pour rendre les substitutions applicables, si $x \notin \mathrm{fv}(\varphi)$, alors

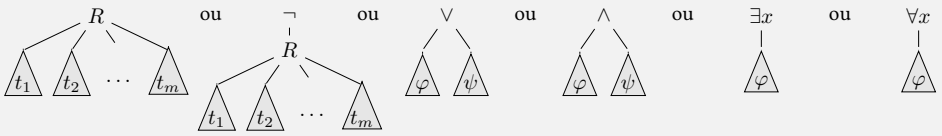
$$\varphi[t/x] =_\alpha \varphi \ , \tag{28}$$

et si $x \notin \mathrm{fv}(\varphi) \setminus \{y\}$, alors

$$\varphi[x/y][t/x] =_\alpha \varphi[t/y] \ . \tag{29}$$

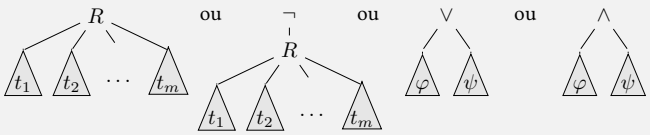
13. Formes normales

Résumé. On peut mettre n'importe quelle formule sous *forme normale négative* en « poussant » les négations vers les feuilles grâce aux dualités de de Morgan ; la formule obtenue est alors de la forme



où $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F}, X)$ et φ et ψ sont des formules sous forme normale négative. Les formules de la forme « $R(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ » ou « $\neg R(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ » sont appelées des *littéraux*.

Une formule est *sans quantificateur* si elle est de la forme



où $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F}, X)$ et φ et ψ sont des formules sans quantificateurs. Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme

où φ est sous forme prénexe et ψ est sans quantificateurs. On peut mettre une formule sous forme prénexe à partir d'une formule sous forme normale négative en « tirant » les quantificateurs vers la racine.

Une formule sous forme prénexe est *universelle* si elle est de la forme « $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n . \psi$ » où ψ est sans quantificateurs. La *skolémisation* d'une formule produit une formule équi-satisfiable sous forme universelle.

Comme en logique propositionnelle, les formules du premier ordre peuvent être mises sous différentes formes normales préservant la sémantique (formules *équivalentes*) ou préservant la satisfiabilité (formules *équi-satisfiables*).

(David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 2.6), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 6.5.1)

13.1. **Forme normale négative.** Une formule du premier ordre est en *forme normale négative* si elle respecte la syntaxe abstraite

$$\ell ::= \alpha \mid \neg\alpha \qquad \text{(littéraux)}$$
$$\varphi ::= \ell \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \forall x.\varphi \qquad \text{(formules en forme normale négative)}$$

où α est une formule atomique et $x \in X$. En d'autres termes, les négations ne peuvent apparaître que devant des formules atomiques. La mise sous forme normale négative procède en « poussant » les négations vers les feuilles ; pour une formule φ, on notera $\mathrm{nnf}(\varphi)$ sa forme normale négative obtenue inductivement par

$$\begin{aligned}
\mathrm{nnf}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha\ , & \mathrm{nnf}(\neg\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg\alpha\ ,\\
\mathrm{nnf}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \wedge \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi) \vee \mathrm{nnf}(\neg\psi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ , & \mathrm{nnf}(\neg\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\neg\varphi)\ ,\\
\mathrm{nnf}(\neg\neg\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\varphi)\ .
\end{aligned}$$

En termes algorithmiques, cette mise sous forme normale négative se fait en temps linéaire. Elle préserve visiblement la sémantique des formules : φ et $\mathrm{nnf}(\varphi)$ sont équivalentes. On notera en général

$$\overline{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\varphi)$$

pour la forme normale négative de la négation de φ.

Exemple 13.1. La formule du buveur de l'exemple 11.2 s'écrit sous forme normale négative comme $\exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))$.

Exemple 13.2. La formule (20) de l'exemple 11.4 s'écrit sous forme normale négative comme

$$\forall x \forall y.\neg(x < y) \vee \exists z.x < z \wedge z < y\ . \tag{30}$$

Exemple 13.3. La requête (13) de l'exemple 11.3 s'écrit sous forme normale négative comme

$$\forall c.(\forall t.\neg \mathit{Seance}(c,t)) \vee (\exists t \exists i.\mathit{Film}(t,x,i) \wedge \mathit{Seance}(c,t))\ . \tag{31}$$

La requête (17) s'écrit sous forme normale négative comme

$$(\exists t.\mathit{Film}(t,\mathit{polanski},x)) \wedge (\forall t.\neg \mathit{Film}(t,\mathit{kubrick},x))\ . \tag{32}$$

La requête (18) s'écrit sous forme normale négative comme

$$\exists t \exists r.\mathit{Film}(t,r,x) \wedge \forall t' \forall r'.\neg \mathit{Film}(t',r',x) \vee t = t'\ . \tag{33}$$

On peut observer par induction structurelle sur φ que

Propriété 13.4. *Pour toute formule φ en forme normale négative et toute substitution σ, $(\overline{\varphi})\sigma = \overline{(\varphi\sigma)}$.*

La *profondeur* $p(\varphi)$ d'une formule φ en forme normale négative est définie inductivement par $p(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ pour un littéral, $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \max\{p(\varphi), p(\psi)\}$, et $p(\exists x.\varphi) = p(\forall x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + p(\varphi)$.

(Duparc, 2015, sec. 11.6), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 2.6.2), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, thm. 6.10), (Harrisson, 2009, sec. 3.5)

13.2. **Forme prénexe.** Une formule est sous *forme prénexe* si elle est de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi$ où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et ψ est sans quantificateur, c'est-à-dire ψ respecte la syntaxe abstraite

$$\psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi\ . \qquad \text{(formules sans quantificateur)}$$

Propriété 13.5 (forme prénexe)**.** *Pour toute formule φ, on peut construire une formule prénexe équivalente.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que φ est déjà sous forme normale négative. On procède alors par induction sur φ :

Cas de ℓ : Alors ℓ est déjà sous forme prénexe.

Cas de $\varphi \vee \varphi'$: Par hypothèse d'induction, φ et φ' sont équivalentes à $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi$ et $Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m.\psi'$ où ψ et ψ' sont sans quantificateur. Par le lemme 12.4 d'α-congruence, on peut supposer que ces formules utilisent des ensembles disjoints de variables liées : $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset$. Montrons que $(Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi) \vee (Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m.\psi')$ est équivalente à $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . Q'_1 y_1 \dots Q'_m y_m.(\psi \vee \psi')$, qui sera donc équivalente à $\varphi \vee \varphi'$. On procède pour cela par récurrence sur $n + m$. Le cas de base pour $n + m = 0$ est trivial. Pour l'étape de récurrence, il suffit de montrer que pour toutes formules θ et θ' et $x \notin \mathrm{fv}(\theta')$,

- $(\exists x.\theta) \vee \theta'$ est équivalente à $\exists x.\theta \vee \theta'$: en effet, pour toute interprétation I et toute valuation ρ,

$$\begin{aligned}
[\![(\exists x.\theta) \vee \theta']\!]^I_\rho &= \Big(\bigvee_{e \in D_I} [\![\theta]\!]^I_{\rho[e/x]}\Big) \vee [\![\theta']\!]^I_\rho \\
&= \Big(\bigvee_{e \in D_I} [\![\theta]\!]^I_{\rho[e/x]}\Big) \vee \Big(\bigvee_{e \in D_I} [\![\theta']\!]^I_{\rho[e/x]}\Big) \qquad \text{(car } D_I \neq \emptyset \text{ et par la propriété 11.1)} \\
&= \bigvee_{e \in D_I} [\![\theta \vee \theta']\!]^I_{\rho[e/x]} \\
&= [\![\exists x.(\theta \vee \theta')]\!]^I_\rho \,.
\end{aligned}$$

- $(\forall x.\theta) \vee \theta'$ est équivalente à $\forall x.\theta \vee \theta'$: c'est bien le cas par un raisonnement similaire.

Cas de $\varphi \wedge \varphi'$: Similaire au cas précédent.

Cas de $\exists x.\varphi$: Par hypothèse d'induction, φ est équivalente à $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi$ où ψ est sans quantificateur. Alors $\exists x.\varphi$ est équivalente à $\exists x.Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi$.

Cas de $\forall x.\varphi$: Similaire au cas précédent. □

Exemple 13.6. La négation de la formule du buveur de l'exemple 11.2 s'écrit sous forme normale négative comme $\forall x.(B(x) \wedge \exists y.\neg B(y))$. Une forme prénexe de cette négation est alors $\forall x.\exists y.(B(x) \wedge \neg B(y))$.

Exemple 13.7. La formule (30) de l'exemple 13.2 s'écrit sous forme prénexe comme

$$\forall x \forall y \exists z.\neg(x < y) \vee (x < z \wedge z < y) \,. \tag{34}$$

Exemple 13.8. Mettons les formules de l'exemple 13.3 sous forme prénexe. Pour la requête (31), il faut procéder à un α-renommage sur une des sous-formules qui quantifient sur t ; par exemple :

$$\forall c.(\forall t.\neg \mathit{Seance}(c,t)) \vee (\exists t' \exists i.\mathit{Film}(t', x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t')) \,. \tag{35}$$

On peut maintenant appliquer la propriété 13.5 à (35) :

$$\forall c \forall t \exists t' \exists i.\neg \mathit{Seance}(c,t) \vee (\mathit{Film}(t', x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t')) \,. \tag{36}$$

On procède de même pour (32) :

$$\exists t \forall t'.\mathit{Film}(t, \mathit{polanski}, x) \wedge \neg \mathit{Film}(t', \mathit{kubrick}, x) \,. \tag{37}$$

Et aussi pour (33) :

$$\exists t \exists r \forall t' \forall r'.\mathit{Film}(t, r, x) \wedge (\neg \mathit{Film}(t', r', x) \vee t = t') \,. \tag{38}$$

13.3. **Skolémisation.** Une formule $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n.\psi$ sous forme prénexe est *existentielle* si $Q_i = \exists$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et *universelle* si $Q_i = \forall$ pour tout $1 \leq i \leq n$. La skolémisation d'une formule φ est une formule universelle équi-satisfiable.

(David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 2.7), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, thm. 6.12), Harrisson, 2009, [sec. 3.6

On étend pour cela l'ensemble $\mathcal{F}$ des symboles de fonction. Pour toute formule φ et toute variable x, on fixe une énumération $\vec{x}_\varphi$ de $\mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$ et on ajoute un nouveau symbole de fonction $f_{\varphi,x} \notin \mathcal{F}$ d'arité $|\mathrm{fv}(\exists x.\varphi)|$. Soit $\mathcal{F}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F} \uplus \{f_{\varphi,x} \mid f \text{ formule sur } (\mathcal{F},\mathcal{P}) \text{ et } x \in X\}$.

La *skolémisation* $s(\varphi)$ d'une formule φ en forme normale négative est alors définie par

$$\begin{aligned} s(\ell) &\stackrel{\text{def}}{=} \ell \ , \\ s(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} s(\varphi) \vee s(\psi) \ , \\ s(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\text{def}}{=} s(\varphi) \wedge s(\psi) \ , \\ s(\exists x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} (s(\varphi))[f_{\varphi,x}(\vec{x}_\varphi)/x] \\ s(\forall x.\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x.s(\varphi) \ . \end{aligned}$$

On peut noter que, si φ était sous forme prénexe, alors $s(\varphi)$ est universelle.

Théorème 13.9 (Skolem)**.** *Soit φ une formule du premier ordre. Alors on peut construire une formule universelle équi-satisfiable.*

Démonstration. On peut supposer φ sous forme prénexe. Il suffit alors de montrer que φ et $s(\varphi)$ sont équi-satisfiables.

Commençons par montrer que, si φ est satisfiable, alors $s(\varphi)$ l'est aussi. Pour toute interprétation I sur la signature $(\mathcal{F},\mathcal{P})$, on construit une interprétation I' sur la signature $(\mathcal{F}',\mathcal{P})$. L'interprétation I' a le même domaine $D_{I'} \stackrel{\text{def}}{=} D_I$ que I et interprète les symboles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ de la même manière : $f^{I'} \stackrel{\text{def}}{=} f^I$ et $R^{I'} \stackrel{\text{def}}{=} R^I$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $R \in \mathcal{P}$. Il faut maintenant fournir une interprétation des symboles $f_{\varphi,x}$. Considérons pour cela une formule φ et une variable x. Soit $x_1,\dots,x_n$ l'énumeration de $\mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$. Pour tout tuple $(e_1,\dots,e_n) \in D_I^n$, on définit

$$D_{I,\varphi,x}(e_1,\dots,e_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{e \in D_I \mid I, \rho[e_1/x_1,\dots,e_n/x_n,e/x] \vDash \varphi\} \ . \tag{39}$$

Comme $D_I \neq \emptyset$, on peut choisir un élément $e_\emptyset \in D_I$. On étend alors l'interprétation I : si $D_{I,\varphi,x}(e_1,\dots,e_n)$ est non vide, on choisit un représentant $f^{I'}_{\varphi,x}(e_1,\dots,e_n) \in D_{I,\varphi,x}(e_1,\dots,e_n)$, et sinon on pose $f^{I'}_{\varphi,x}(e_1,\dots,e_n) = e_\emptyset$.

Montrons maintenant par induction sur φ que, pour toute interprétation I et toute valuation ρ, $I,\rho \vDash \varphi$ implique $I',\rho \vDash s(\varphi)$. On ne traite ici que le cas d'une formule $\exists x.\varphi$. Soit $x_1,\dots,x_n$ l'énumération de $\mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$. On a les implications

$$\begin{aligned} & I,\rho \vDash \exists x.\varphi \\ \Rightarrow \quad & \exists e \in D_I,\ I,\rho[e/x] \vDash \varphi \\ \Rightarrow \quad & I,\rho[f^{I'}_{\varphi,x}(\rho(x_1),\dots,\rho(x_n))/x] \vDash \varphi \\ \Rightarrow \quad & I',\rho[f^{I'}_{\varphi,x}(\rho(x_1),\dots,\rho(x_n))/x] \vDash s(\varphi) && \text{par hyp. ind.} \\ \Rightarrow \quad & I',\rho \vDash (s(\varphi))[f_{\varphi,x}(x_1,\dots,x_n)/x] && \text{par le lemme 12.5} \\ \Rightarrow \quad & I',\rho \vDash s(\exists x.\varphi) \ . \end{aligned}$$

Inversement, montrons que si $s(\varphi)$ est satisfiable, alors φ l'est aussi. Pour une interprétation I sur la signature $(\mathcal{F}',\mathcal{P})$, on définit l'interprétation $I_{|\mathcal{F}}$ comme sa restriction à la signature $(\mathcal{F},\mathcal{P})$. Montrons par induction sur φ que $I,\rho \vDash s(\varphi)$ implique $I_{|\mathcal{F}},\rho \vDash \varphi$. Encore une fois, nous ne traitons que le cas d'une formule $\exists x.\varphi$ où $x_1,\dots,x_n$ est l'énumération de $\mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$. On a les

implications

$$\begin{aligned}
& I, \rho \vDash s(\exists x.\varphi) \\
\Rightarrow \quad & I, \rho \vDash (s(\varphi))[f^I_{\varphi,x}(x_1, \ldots, x_n)/x] \\
\Rightarrow \quad & I, \rho[f^I_{\varphi,x}(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n))/x] \vDash s(\varphi) && \text{par le lemme 12.5} \\
\Rightarrow \quad & I_{|\mathcal{F}}, \rho[f^I_{\varphi,x}(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n))/x] \vDash \varphi && \text{par hyp. ind.} \\
\Rightarrow \quad & I_{|\mathcal{F}}, \rho \vDash \exists x.\varphi \ . && \square
\end{aligned}$$

Exemple 13.10. La formule du buveur $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$ se skolémise en introduisant un symbole de constante a pour $f_{(B(x)\Rightarrow\forall y.B(y)),x}$ où $\mathrm{fv}(\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))) = \emptyset$:

$$B(a) \Rightarrow \forall y.B(y) \ . \tag{40}$$

⚠ *La skolémisation préserve la satisfiabilité, mais pas la validité. Ainsi, la formule du buveur est valide, mais la formule* (40) *ne l'est pas : l'interprétation I avec $D_I = \{e_1, e_2\}$, $a^I = e_1$ et $B^I = \{e_1\}$ en est un contre-modèle.*

Exemple 13.11. La formule (34) de l'exemple 13.7 se skolémise en introduisant une fonction f d'arité deux pour $f_{\varphi,z}$ où $\varphi = \neg(x < y) \vee (x < z \wedge z < y)$ et $\mathrm{fv}(\exists z.\varphi) = \{x, y\}$:

$$\forall x \forall y.\neg(x < y) \vee (x < f(x, y) \wedge f(x, y) < y) \ . \tag{41}$$

Exemple 13.12. La requête (36) de l'exemple 13.8 se skolémise en introduisant une fonction f d'arité 3 pour $f_{\varphi,t'}$ où $\varphi = \exists i.\neg \mathit{Seance}(c, t) \vee (\mathit{Film}(t', x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t')$ et $\mathrm{fv}(\exists t.\varphi) = \{x, c, t\}$, ainsi qu'une fonction g d'arité 4 pour $f_{\psi,i}$ où $\psi = \neg \mathit{Seance}(c, t) \vee (\mathit{Film}(t', x, i) \wedge \mathit{Seance}(c, t')$ et $\mathrm{fv}(\exists i.\psi) = \{x, c, t, t'\}$:

$$\forall c \forall t.\neg \mathit{Seance}(c, t) \vee (\mathit{Film}(f(x, c, t), x, g(x, c, t, f(x, c, t))) \wedge \mathit{Seance}(c, f(x, c, t))) \ . \tag{42}$$

⚠ *Les requêtes que nous obtenons ici ont encore x en variable libre. Pour obtenir une formule universelle équi-satisfiable* close*, il faudrait dans chaque cas introduire une constante a et remplacer x par a.*

La requête (37) se skolémise en introduisant une fonction h d'arité 1 :

$$\forall t'.\mathit{Film}(h(x), \mathit{polanski}, x) \wedge \neg \mathit{Film}(t', \mathit{kubrick}, x) \ . \tag{43}$$

La requête (38) se skolémise en introduisant une fonction f' d'arité 1 et une fonction g' d'arité 2 :

$$\forall t' \forall r'.\mathit{Film}(f'(x), g'(x, f'(x))) \wedge (\neg \mathit{Film}(t', r', x) \vee f'(x) = t') \ . \tag{44}$$

13.4. * **Modèles de Herbrand.** Supposons $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$, de telle sorte que $T(\mathcal{F})$ soit non vide. La *base de Herbrand*

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{R(t_1, \ldots, t_m) \mid m \in \mathbb{N}, R \in \mathcal{P}_m, t_1, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F})\}$$

est l'ensemble des instanciations des symboles de relation de $\mathcal{P}$. Une *interprétation de Herbrand* est une valuation $H : \mathcal{B} \to \mathbb{B}$ qui associe une valeur de vérité à chaque élément de la base de Herbrand. On identifie H avec l'interprétation de domaine $D_H \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathcal{F})$ qui associe

$$f^H(t_1, \ldots, t_m) \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1, \ldots, t_m) \ , \qquad R^H(t_1, \ldots, t_m) \stackrel{\text{def}}{=} H(R(t_1, \ldots, t_m))$$

à tout $f \in \mathcal{F}_m$ et $R \in \mathcal{P}_m$ pour tout m.

🔖 *(Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 5.2), (Harrisson, 2009, sec. 3.7)*

Théorème 13.13 (Herbrand)**.** *Soit S un ensemble de formules universelles closes. Alors S est satisfiable si et seulement si S est satisfiable dans une interprétation de Herbrand.*

Démonstration. Seul le sens direct nécessite une preuve. Soit I une interprétation telle que $I \vDash S$. On définit l'interprétation de Herbrand H par $H(R(t_1, \ldots, t_m)) \stackrel{\text{def}}{=} [\![R(t_1, \ldots, t_m)]\!]^I$ pour tous $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{P}_m$, et $t_1, \ldots, t_m \in T(\mathcal{F})$; comme les formules et termes en question sont clos, il n'est pas utile de préciser sous quelle valuation.

⚠ *Les formules de S doivent être* closes *: $S = \{P(x), \neg P(a)\}$ avec $\mathcal{F} = \{a\}$ est satisfiable mais ne l'est pas dans une interprétation de Herbrand.*

Montrons que $H \vDash S$. Pour toute formule close $\forall x_1 \ldots \forall x_n.\varphi \in S$ où φ est sans quantificateur et $\mathrm{fv}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et pour tous $t_1, \ldots, t_n \in D_H = T(\mathcal{F})$, on définit $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ – qui peut être vue à la fois comme une substitution close et comme une valuation dans D_H – et $\rho \stackrel{\text{def}}{=} [[\![t_1]\!]^I/x_1, \ldots, [\![t_n]\!]^I/x_n]$ une valuation dans I. On montre $[\![\varphi]\!]^H_\sigma = [\![\varphi]\!]^I_\rho$

par induction sur φ ; par suite, comme $I \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n.\varphi$, on en déduit $H \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n.\varphi$ comme voulu.

- Pour une formule atomique α, par définition de H, $[\![\alpha]\!]^H_\sigma = [\![\alpha\sigma]\!]^H$ par le lemme 12.5, et cette sémantique est égale à $[\![\alpha\sigma]\!]^I$ par définition de R^H, qui n'est autre que $[\![\alpha]\!]^I_\rho$ par le lemme 12.5.
- Pour une négation $\neg\varphi$, $[\![\neg\varphi]\!]^H_\sigma = \neg[\![\varphi]\!]^H_\sigma \overset{\text{h.i.}}{=} \neg[\![\varphi]\!]^I_\rho = [\![\neg\varphi]\!]^I_\rho$.
- Pour une disjonction $\varphi \vee \psi$, $[\![\varphi \vee \psi]\!]^H_\sigma = [\![\varphi]\!]^H_\sigma \vee [\![\psi]\!]^H_\sigma \overset{\text{h.i.}}{=} [\![\varphi]\!]^I_\rho \vee [\![\psi]\!]^I_\rho = [\![\varphi \vee \psi]\!]^I_\rho$. □

Le théorème de Herbrand permet de « réduire » la logique du premier ordre à la logique propositionnelle. Pour une formule universelle close $\varphi = \forall\vec{x}.\varphi'$ où φ' est sans quantificateur, on note $\varphi\Sigma \overset{\text{def}}{=} \{\varphi'\sigma \mid \sigma \text{ substitution close}\}$ l'ensemble de ses *instances de Herbrand*. Pour un ensemble de formules universelles closes S, on écrit $S\Sigma \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\varphi\in S} \varphi\Sigma$. Une formule de $S\Sigma$ peut ainsi être vue comme une formule propositionnelle avec la base de Herbrand $\mathcal{B}$ comme ensemble de propositions.

Propriété 13.14. *Soit S un ensemble de formules universelles closes et H une interprétation de Herbrand. Alors $H \vDash S$ si et seulement si $H \vDash S\Sigma$.*

Démonstration. Pour toute formule close $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n.\varphi' \in S$ où φ' est sans quantificateur et $\mathrm{fv}(\varphi') = \{x_1, \dots, x_n\}$, $H \vDash \varphi$ si et seulement si pour tous termes clos $t_1, \dots, t_n \in D_H$, $H, [t_1/x_1, \dots, t_n/x_n] \vDash \varphi'$, si et seulement si pour tous termes clos $t_1, \dots, t_n \in T(\mathcal{F})$, $H \vDash \varphi'[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$, si et seulement si pour toute formule $\psi \in \varphi\Sigma$, $H \vDash \psi$. □

Corollaire 13.15. *Soit S un ensemble de formules universelles closes. Alors S est satisfiable si et seulement si $S\Sigma$ est propositionnellement satisfiable sur l'ensemble de propositions $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Par le théorème 13.13, S est satisfiable si et seulement s'il existe une interprétation de Herbrand H telle que $H \vDash S$. Il suffit alors d'appliquer la propriété 13.14 à S et H. □

14. Théories et modèles

Résumé. Une *théorie* est un ensemble T de formules closes (c'est-à-dire de formules sans variables libres) tel que, si φ est close et $T \vDash \varphi$, alors $\varphi \in T$. On définit habituellement des théories de deux manières :

(1) comme l'ensemble des formules closes $\mathrm{Th}(I) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid I \vDash \varphi\}$ dont une interprétation I est un modèle, ou

(2) comme l'ensemble des formules closes $\mathrm{Th}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid A \vDash \varphi\}$ des conséquences logiques d'une *axiomatisation* A (c'est-à-dire que A est un ensemble de formules closes).

Une théorie T est *cohérente* si elle ne contient pas à la fois une formule φ et sa négation $\neg\varphi$. Elle est *complète* si, pour toute formule close φ, $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$. Elle est *décidable* s'il existe un algorithme (qui dépend de T) qui prend en entrée une formule close φ et répond si $\varphi \in T$ ou non.

Toutes les théories ne sont pas décidables. Une manière de montrer qu'une théorie T est décidable est de montrer qu'elle permet l'*élimination des quantificateurs*, c'est-à-dire de montrer que pour toute formule φ (pas nécessairement close), il existe une formule ψ sans quantificateurs telle que $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$. C'est le cas par exemple de la théorie $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$ des ordres linéaires denses non bornés stricts (c.f. lemme 14.9) et de la théorie $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ de l'arithmétique linéaire sur les rationnels (c.f. lemme 14.12).

Prise en isolation, une formule du premier ordre utilise des symboles *non interprétés*, qui peuvent être interprétés de manière arbitraire et potentiellement contre-intuitive. Ainsi, quand nous avons défini les signatures des exemples 9.1 à 9.3, nous avions une intuition de quelles interprétations seraient « raisonnables », mais rien n'oblige les interprétations à respecter cette intuition. Dans la signature $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$ de l'exemple 9.1, les formules closes

$$\exists x.\neg(x = x) \qquad\qquad \exists x.x < x$$

sont satisfiables, par exemple par l'interprétation I de domaine $D_I = \{e\}$ telle que $<^I = \{(e,e)\}$ et $=^I = \emptyset$. De manière similaire, dans la signature de l'exemple 9.3, la formule close

$$\mathit{polanski} = \mathit{repulsion}$$

est satisfiable, par exemple par l'interprétation I de domaine $D_I = \{e\}$ telle que tous les symboles de constantes soient interprétées comme e ($\mathit{shining}^I = \mathit{player}^I = \cdots = \mathit{odeon}^I = e$), et $\mathit{Film}^I = \mathit{Seance}^I = \emptyset$ et $=^I = \{(e,e)\}$.

Le problème que nous rencontrons avec ces exemples est que nous voulons restreindre nos interprétations à avoir une forme particulière, pour interdire les interprétations « contre-intuitives ».

(Duparc, 2015, sec. 11.7), (David, Nour et Raffalli, 2003, chap. 3), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, sec. 6.4)

14.1. **Théories logiques.** Rappelons que pour un ensemble S de formules et une formule φ, φ est une conséquence logique de S, noté $S \vDash \varphi$, si pour toute interprétation I, si I est un modèle de toutes les formules de S alors I est un modèle de φ. En symboles, $S \vDash \varphi$ si $I \vDash S$ (c'est-à-dire si pour toute valuation ρ et toute formule $\psi \in S$, $I, \rho \vDash \psi$) implique $I \vDash \varphi$. Rappelons aussi qu'une formule *close* est une formule sans variable libre.

Une *théorie* est un ensemble T de formules closes sur une même signature $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ du premier ordre, tel que, si φ est une formule close et $T \vDash \varphi$, alors $\varphi \in T$. Par exemple, l'ensemble de toutes les formules closes est une théorie – d'un intérêt toutefois assez limité.

(Harrisson, 2009, def. 5.4).

⚠ *À noter que certains ouvrages définissent une* théorie *comme un ensemble de formules closes, sans demander qu'il soit fermé par conséquence logique ; c'est le cas par exemple de (Duparc, 2015, sec. 11.7), (David, Nour et Raffalli, 2003, def. 2.5.1) et (C. C. Chang et Keisler, 1990, sec. 1.4). Dans ces notes nous parlerons plutôt d'*axiomatisations *pour de tels ensembles de formules ; voir la section 14.1.2 ci-dessous.*

14.1.1. *Théories de structures.* Pour une interprétation I, on définit la *théorie de* I comme l'ensemble

$$\mathrm{Th}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid I \vDash \varphi\} \tag{45}$$

des formules closes dont I est un modèle. Plus généralement, pour une classe $\mathcal{K}$ d'interprétations sur la même signature, la *théorie de* $\mathcal{K}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Th}(\mathcal{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid \forall I \in \mathcal{K} \,.\, I \vDash \varphi\} \tag{46}$$

des formules closes qui sont vraies dans toutes les interprétations dans $\mathcal{K}$; avec ces notations, $\mathrm{Th}(I) = \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ pour la classe $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{I\}$ qui ne contient que I. On vérifie aisément que $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ est bien une théorie : si $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) \vDash \varphi$, c'est-à-dire si pour toute interprétation I, $I \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ implique $I \vDash \varphi$, alors en particulier pour toute interprétation $I \in \mathcal{K}$, $I \vDash \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ par définition de $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$, donc $I \vDash \varphi$ et donc $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K})$.

Exemple 14.1. Prenons une signature $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{P^{(0)}, Q^{(0)}\}$ avec deux propositions P et Q, et soit l'interprétation de domaine $D_I = \{e\}$ où $P^I = \top$ et $Q^I = \bot$. Alors $\mathrm{Th}(I)$ contient en particulier les formules P, $\neg Q$, $P \vee Q \vee Q$, $\neg\neg P$, $Q \vee \exists x.P$, etc.

14.1.2. *Théories axiomatiques.* L'approche précédente, qui définit des théories à partir d'une classe d'interprétations $\mathcal{K}$, se heurte rapidement au problème suivant : comment définir la classe $\mathcal{K}$ elle-même ? Ainsi, pour la signature de l'exemple 9.1, on pourrait souhaiter ne considérer que des *ordres*. Pour cela, il est pratique de spécifier directement dans la logique quelles sont les propriétés attendues de nos interprétations. Par exemple, on peut demander pour la signature de l'exemple 9.1 que $\forall x.x = x$.

En général, une *axiomatisation* A est un ensemble de formules closes sur une signature $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ du premier ordre. La *théorie de* A est alors définie comme l'ensemble

$$\mathrm{Th}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \text{ close} \mid A \vDash \varphi\} \tag{47}$$

des conséquences logiques closes de A ; on parle parfois de « théorie axiomatique » pour une telle théorie. Lorsque A est un ensemble fini, on dit que $\mathrm{Th}(A)$ est *définissable*. Lorsque A est *récursif* – c'est-à-dire lorsqu'il existe un algorithme qui prend en entrée une formule ψ et répond si $\psi \in A$ ou non –, on dit que $\mathrm{Th}(A)$ est *récursivement axiomatisable*. Bien sûr, si $\mathrm{Th}(A)$ est définissable, alors elle est récursivement axiomatisable.

(Harrisson, 2009, sec. 4.1)

En présence de A_{eq} et des axiomes de congruence, on peut toujours se ramener au cas d'interprétations normales *I, dans lesquelles $=^I$ est l'égalité sur D_I.*

Exemple 14.2 (théorie de l'égalité pure)**.** Considérons la signature $\mathcal{P} = \{=^{(2)}\}$. Nous définissons une axiomatisation A_{eq} telle que $I \vDash A_{\text{eq}}$ si et seulement si $=^I$ est une relation d'équivalence sur D_I :

$$\begin{aligned}
\forall x.\quad & x = x && \text{(réflexivité de } =)\\
\forall x \forall y.\quad & x = y \Rightarrow y = x && \text{(symétrie de } =)\\
\forall x \forall y \forall z.\quad & (x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z && \text{(transitivité de } =)
\end{aligned}$$

Par exemple, l'interprétation I définie par $D_I = \{a, b, c\}$ et $=^I = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$ est un modèle de A_{eq}.

Exemple 14.3 (théorie des ordres stricts)**.** Reprenons la signature $\mathcal{F} = \emptyset$ et $\mathcal{P} = \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$ de l'exemple 9.1. Nous allons définir une axiomatisation A_{os} telle que $I \vDash A_{\text{os}}$ si et seulement si D_I est strictement ordonné par $<^I$ et $=^I$ est une congruence sur D_I. Nous ajoutons pour cela à A_{eq} de l'exemple précédent les quatre formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x.\quad & \neg(x < x) && \text{(irréflexivité de } <)\\
\forall x \forall y \forall z.\quad & (x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z && \text{(transitivité de } <)\\
\forall x \forall y \forall z.\quad & (x = y \wedge x < z) \Rightarrow y < z && \text{(congruence à gauche)}\\
\forall x \forall y \forall z.\quad & (x = y \wedge z < x) \Rightarrow z < y && \text{(congruence à droite)}
\end{aligned}$$

Par exemple, I de domaine $D_I = \{a, b, c, d\}$ où

$$<^I = \{(b,a), (c,a), (d,a)\} \qquad =^I = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (c,d), (d,c)\}$$

est un modèle de A_{os}.
Appelons I' son quotient $I/=^I$: alors $D_{I'} = \{[a], [b], [c]\}$ avec

$$<^{I'} = \{([b],[a]), ([c],[a])\} \qquad =^{I'} = \{([a],[a]), ([b],[b]), ([c],[c])\}$$

en est aussi un modèle, où de plus $=^{I'}$ est interprété comme l'égalité sur $D_{I'}$.

Exemple 14.4 (théorie des ordres linéaires stricts)**.** Continuons l'exemple 14.3. Nous définissions une axiomatisation A_{ols} qui contient les formules de A_{os} plus la formule suivante :

$$\forall x \forall y. x < y \vee x = y \vee y < x \qquad \text{(totalité de } <)$$

L'interprétation I de l'exemple 14.3 n'est pas un modèle de A_{ols} puisque $b \not<^I c$, $b \neq^I c$ et $c \not<^I b$. L'interprétation I'' de domaine $D_{I''} = \{a, b, c\}$ où

$$<^{I''} = \{(a,b), (a,c), (b,c)\} \qquad =^{I''} = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

est en revanche un modèle de A_{ols}.

Exemple 14.5 (axiomatiser une interprétation)**.** Reprenons maintenant la signature et l'interprétation I de l'exemple 9.3. On souhaite définir une axiomatisation A telle que $\mathrm{Th}(I) =$

$\mathrm{Th}(A)$. Pour cela, on va définir A de telle sorte que, pour toute interprétation I', $I' \models A$ si et seulement si $I'/{=^{I'}}$ est isomorphe à I ; dès lors, $A \models \varphi$

- si et seulement si pour toute interprétation I', si $I' \models A$ alors $I' \models \varphi$,
- si et seulement si pour toute interprétation I', si $I'/{=^{I'}}$ et I sont isomorphes, alors $I' \models \varphi$,
- si et seulement si $I \models \varphi$.

Nous allons commencer par imposer que $D_{I'}$ soit inclus dans D_I (à quotient près) par la formule $\forall x. \bigvee_{c \in \mathcal{F}_0} x = c$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\forall x. x = \mathit{shining} \vee x = \mathit{player} \vee x = \mathit{chinatown} \vee x = \mathit{repulsion} \vee x = \mathit{kubrick} \vee x = \mathit{altman} \\ \vee x = \mathit{polanski} \vee x = \mathit{nicholson} \vee x = \mathit{robbins} \vee x = \mathit{deneuve} \vee x = \mathit{champo} \vee x = \mathit{odeon}\end{aligned}$$

À noter que cette formule garantit en particulier que pour toute constante $c \in \mathcal{F}_0$, il existe $d \in \mathcal{F}_0$ telle que $(c^{I'}, d^{I'}) \in \{=^{I'}\}$.

Nous forçons aussi que pour toutes constantes $c \neq d$ de $\mathcal{F}_0$, leurs interprétations $c^{I'}$ et $d^{I'}$ soient distinctes, par la formule $\bigwedge_{c \neq d \in \mathcal{F}_0} \neg(c = d)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\neg(\mathit{shining} = \mathit{player}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{chinatown}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{repulsion}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{kubrick}) \\ &\wedge\neg(\mathit{shining} = \mathit{altman}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{polanski}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{robbins}) \\ &\wedge\neg(\mathit{shining} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{shining} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{chinatown}) \\ &\wedge\neg(\mathit{player} = \mathit{repulsion}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{kubrick}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{altman}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{polanski}) \\ &\wedge\neg(\mathit{player} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{player} = \mathit{champo}) \\ &\wedge\neg(\mathit{player} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{repulsion}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{kubrick}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{altman}) \\ &\wedge\neg(\mathit{chinatown} = \mathit{polanski}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{deneuve}) \\ &\wedge\neg(\mathit{chinatown} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{chinatown} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{kubrick}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{altman}) \\ &\wedge\neg(\mathit{repulsion} = \mathit{polanski}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{deneuve}) \\ &\wedge\neg(\mathit{repulsion} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{repulsion} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{kubrick} = \mathit{altman}) \wedge \neg(\mathit{kubrick} = \mathit{polanski}) \\ &\wedge\neg(\mathit{kubrick} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{kubrick} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{kubrick} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{kubrick} = \mathit{champo}) \\ &\wedge\neg(\mathit{kubrick} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{altman} = \mathit{polanski}) \wedge \neg(\mathit{altman} = \mathit{nicholson}) \wedge \neg(\mathit{altman} = \mathit{robbins}) \\ &\wedge\neg(\mathit{altman} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{altman} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{altman} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{polanski} = \mathit{nicholson}) \\ &\wedge\neg(\mathit{polanski} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{polanski} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{polanski} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{polanski} = \mathit{odeon}) \\ &\wedge\neg(\mathit{nicholson} = \mathit{robbins}) \wedge \neg(\mathit{nicholson} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{nicholson} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{nicholson} = \mathit{odeon}) \\ &\wedge\neg(\mathit{robbins} = \mathit{deneuve}) \wedge \neg(\mathit{robbins} = \mathit{champo}) \wedge \neg(\mathit{robbins} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{deneuve} = \mathit{champo}) \\ &\wedge\neg(\mathit{deneuve} = \mathit{odeon}) \wedge \neg(\mathit{champo} = \mathit{odeon})\end{aligned}$$

Cela garantit que $D_{I'}$ soit à D_I à quotient près. Par ces deux formules, nous savons aussi que $=^{I'}$ est l'identité sur $D_{I'}$.

Il reste à imposer que les relations $\mathit{Film}^{I'}$ et $\mathit{Seance}^{I'}$ soient les bonnes. Pour la relation *Film*, on écrit pour cela

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z. \mathit{Film}(x, y, z) \Leftrightarrow \big(\quad &(x = \mathit{shining} \wedge y = \mathit{kubrick} \wedge z = \mathit{nicholson}) \\ &\vee (x = \mathit{player} \wedge y = \mathit{altman} \wedge z = \mathit{robbins}) \\ &\vee (x = \mathit{chinatown} \wedge y = \mathit{polanski} \wedge z = \mathit{nicholson}) \\ &\vee (x = \mathit{chinatown} \wedge y = \mathit{polanski} \wedge z = \mathit{polanski}) \\ &\vee (x = \mathit{repulsion} \wedge y = \mathit{polanski} \wedge z = \mathit{deneuve})\big)\end{aligned}$$

Pour la relation *Seance*, on écrit de manière similaire

$$\begin{aligned}\forall x \forall y. \mathit{Seance}(x, y, z) \Leftrightarrow \big(\quad &(x = \mathit{champo} \wedge y = \mathit{shining}) \\ &\vee (x = \mathit{champo} \wedge y = \mathit{chinatown}) \\ &\vee (x = \mathit{champo} \wedge y = \mathit{player}) \\ &\vee (x = \mathit{odeon} \wedge y = \mathit{chinatown})\big)\end{aligned}$$

14.1.3. *Cohérence, complétude et décidabilité.* On dit qu'une théorie T est *cohérente* si elle ne contient pas à la fois une formule φ et sa négation $\neg\varphi$. Une théorie incohérente ne peut pas avoir de modèle : pour toute interprétation I, $I \not\models T$. Mais alors T contient toutes les formules closes puisqu'elle est fermée par conséquence logique.

Propriété 14.6. *Une théorie est cohérente si et seulement si elle a au moins un modèle, si et seulement si elle ne contient pas toutes les formules closes.*

Par suite, si $\mathcal{K} \neq \emptyset$ est une classe d'interprétations, alors $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ est forcément cohérente ; en revanche, si A est une axiomatisation, alors $\mathrm{Th}(A)$ est cohérente si et seulement si A a un modèle.

On dit qu'une théorie T est *complète* si, pour toute formule close φ, on a $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$. Observons que si $\mathcal{K}$ est une classe d'interprétations, alors $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ est forcément complète : pour toute formule close φ, soit $\mathcal{K} \models \varphi$, soit $\mathcal{K} \not\models \varphi$. En revanche, pour une axiomatisation A donnée, $\mathrm{Th}(A)$ n'est pas forcément complète. Par exemple, considérons l'axiomatisation A_{eq} de l'exemple 14.2 et la formule $\varphi = \forall x \forall y . x = y$ qui exprime le fait que D_I contient exactement un élément. Alors $A_{\mathrm{eq}} \not\models \varphi$ puisqu'il existe des modèles où $|D_I| > 1$, et $A_{\mathrm{eq}} \not\models \neg\varphi$ puisqu'il existe des modèles où $|D_I| = 1$.

⚠ *En théorie des modèles, on dit qu'une théorie T* décide *une formule φ si $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$, ce qui n'a pas le même sens ! Une théorie complète décide donc toutes les formules closes.*

On dit qu'une théorie T est *décidable* s'il existe un algorithme qui prend en entrée une formule φ et répond si $\varphi \in T$, c'est-à-dire un algorithme qui résout le problème de décision suivant, aussi connu comme le « Entscheidungsproblem » quand T est définissable.

Problème (DÉCISION DE T)**.**
instance : une formule close φ
question : est-ce que $\varphi \in T$?

À noter que si $T = \mathrm{Th}(\emptyset)$ est la théorie de l'ensemble vide d'axiomes, la DÉCISION DE T est exactement le problème de validité d'une formule du premier ordre, puisqu'à partir d'une formule φ quelconque il suffit de la clore par des quantifications universelles pour obtenir une formule équi-valide.

Problème (VALIDITÉ)**.**
instance : une formule φ
question : φ est-elle valide ?

Dans le cas de la théorie $\mathrm{Th}(I)$ d'une interprétation I fixée, la décidabilité de $\mathrm{Th}(I)$revient à l'existence d'un algorithme qui prend une formule close φ en entrée et répond si $I \models \varphi$, c'est-à-dire qu'une telle théorie est décidable si et seulement s'il existe un algorithme pour le problème suivant.

Problème (ÉVALUATION DANS I)**.**
instance : une formule close φ
question : est-ce que $I \models \varphi$?

Si le problème d'ÉVALUATION DANS I était aisé à résoudre dans le cas de la logique propositionnelle (c.f. section 3), ce n'est malheureusement plus le cas dans le cas de la logique du premier ordre, et il existe des théories indécidables. Nous allons commencer par voir dans la section 14.2 une technique algorithmique qui permet de décider certaines théories. Mais voici une dernière remarque, qui fait appel à des notions que nous n'avons pas couverte dans ces notes, et ne sera pas démontrée.

Propriété 14.7. *Si une théorie T est récursivement axiomatisable et complète, alors elle est décidable.*

🔖 *(Harrisson, 2009, sec. 5.6), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 3.7), (C.-L. Chang et Lee, 1973, sec. 1.5)*

14.2. **Élimination des quantificateurs et décidabilité.** Rappelons qu'une formule ψ est *sans quantificateurs* si elle respecte la syntaxe abstraite

$$\psi ::= \ell \mid \psi \vee \psi \mid \psi \wedge \psi \qquad \text{(formules sans quantificateur)}$$

où ℓ est un littéral.

Une théorie T permet l'*élimination des quantificateurs* si pour toute formule φ, il existe une formule ψ sans quantificateur telle que φ et ψ sont *équivalentes modulo* T, c'est-à-dire telle que $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$. Cette élimination est *effective* s'il existe un algorithme d'élimination des quantificateurs pour T, c'est-à-dire un algorithme qui prend une formule φ en entrée et retourne une telle formule ψ. Si la formule φ est close, alors ψ ne contiendra aucune variable, et il est alors (généralement) assez aisé de déterminer si $T \vDash \psi$.

Appelons une formule *primitive existentielle* si elle est de la forme $\varepsilon = \exists x.\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_n$ où $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des littéraux tels que $x \in \mathrm{fv}(\ell_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Supposons que pour toute formule primitive existentielle ε, on dispose d'un algorithme qui retourne une formule sans quantificateur $\mathrm{qe}_T(\varepsilon)$ équivalente modulo T. Alors on a un algorithme général d'élimination des quantificateurs pour la théorie T :

Lemme 14.8. *Si une formule sans quantificateur* $\mathrm{qe}_T(\varepsilon)$ *équivalente modulo* T *à* ε *peut être calculée pour toute formule primitive existentielle* ε*, alors une formule sans quantificateur* $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ *équivalente modulo* T *à* φ *peut être calculée pour toute formule* φ*.*

Démonstration. On définit $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ par induction structurelle sur φ.

- Pour une formule atomique α, elle est déjà sans quantificateurs et il n'y a rien à faire : on pose $\mathrm{qe}_T(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$.
- Pour le cas d'une formule $\neg\varphi$, on pose $\mathrm{qe}_T(\neg\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathrm{qe}_T(\varphi)$ qui est bien équivalente modulo T à $\neg\varphi$.
- Pour le cas d'une formule $\varphi \vee \psi$, on pose $\mathrm{qe}_T(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{qe}_T(\varphi) \vee \mathrm{qe}_T(\psi)$ qui est bien équivalente modulo T à $\varphi \vee \psi$.
- Pour le cas d'une formule $\exists x.\varphi$, on construit une formule sans quantificateur $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ équivalente modulo T par hypothèse d'induction. On a alors

  $$T \vDash (\exists x.\varphi) \Leftrightarrow (\exists x.\mathrm{qe}_T(\varphi))$$

  et on procède comme suit.

  (1) On met $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ sous forme normale disjonctive : $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ est équivalente (en particulier modulo T) à $\bigvee_{1\leq j\leq m} \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,j}$ pour des littéraux $\ell_{i,j}$, et donc

  $$T \vDash (\exists x.\varphi) \Leftrightarrow (\exists x. \bigvee_{1\leq j\leq m} \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,j}) \,.$$

  (2) Comme on a l'équivalence logique $(\exists x.\psi \vee \psi') \Leftrightarrow (\exists x.\psi) \vee (\exists x.\psi')$ pour toutes formules ψ, ψ', on en déduit que

  $$T \vDash (\exists x.\varphi) \Leftrightarrow \bigvee_{1\leq j\leq m} \left(\exists x. \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,j} \right) \,,$$

  et il suffit donc de construire une formule sans quantificateurs pour chacune des formules $\exists x. \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,j}$.

  (3) Enfin, si ψ, ψ' sont des formules telles que $x \notin \mathrm{fv}(\psi)$, on a l'équivalence logique $(\exists x.\psi \wedge \psi') \Leftrightarrow (\psi \wedge \exists x.\psi')$. Dès lors, pour chaque formule $\exists x. \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,j}$, soient $I_j \stackrel{\text{def}}{=} \{1 \leq i \leq n \mid x \in \mathrm{fv}(\ell_{i,j})\}$ et $\bar{I}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{1 \leq i \leq n \mid x \notin \mathrm{fv}(\ell_{i,j})\}$ les indices des littéraux où x est une variable libre ou non. On a donc

  $$T \vDash (\exists x.\varphi) \Leftrightarrow \bigvee_{1\leq j\leq m} \left((\bigwedge_{i\in\bar{I}_j} \ell_{i,j}) \wedge (\exists x. \bigwedge_{i\in I_j} \ell_{i,j}) \right) \,.$$

(4) Chacune des formules $\exists x.\bigwedge_{i\in I_j}\ell_{i,j}$ est primitive existentielle, et d'après l'énoncé du lemme on peut calculer une formule sans quantificateur $\mathrm{qe}_T(\exists x.\bigwedge_{i\in I_j}\ell_{i,j})$ équivalente modulo T. On pose donc

$$\mathrm{qe}_T(\varphi)\stackrel{\text{def}}{=}\bigvee_{1\leq j\leq m}\left((\bigwedge_{i\in\bar{I}_j}\ell_{i,j})\wedge\mathrm{qe}_T(\exists x.\bigwedge_{i\in I_j}\ell_{i,j})\right)$$

qui est bien équivalente modulo T à $\exists x.\varphi$. □

(Harrisson, 2009, sec. 5.6), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 3.7.2), (C.-L. Chang et Lee, 1973, sec. 1.5)

14.2.1. *Théorie des ordres linéaires denses non bornés.* Reprenons la signature avec $\mathcal{F}=\emptyset$ et $\mathcal{P}=\{<^{(2)},=^{(2)}\}$ et l'axiomatisation A_{ols} des ordres linéaires stricts des exemples 14.2 à 14.4. Nous définissons l'axiomatisation A_{oldns} des ordres linéaires denses non bornés en ajoutant à A_{ols} les deux formules suivantes :

$$\forall x\forall y\exists z.(x<y)\Rightarrow(x<z\wedge z<y) \qquad \text{(densité)}$$
$$\forall x\exists y\exists z.z<x\wedge x<y \qquad \text{(non borné)}$$

Observons que l'interprétation I de domaine $\mathbb{Q}$ où $<^I$ est l'ordre strict sur les rationnels et $=^I$ l'égalité sur $\mathbb{Q}$ est un modèle de A_{ols}, qui est donc une théorie cohérente.

Lemme 14.9. *La théorie* $\mathrm{Th}(A_{oldns})$ *permet effectivement l'élimination des quantificateurs.*

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, on peut remarquer que

(0) un littéral négatif sur $(\mathcal{F},\mathcal{P})$ est
- soit de la forme $\neg(x=y)$ et alors il est équivalent à $x<y\vee y<x$ modulo A_{oldns} par totalité de $<$,
- soit de la forme $\neg(x<y)$ et alors il est équivalent à $x=y\vee y<x$ modulo A_{oldns} par totalité de $<$.

Par le lemme 14.8, il suffit de pouvoir calculer une formule $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varepsilon)$ pour une formule $\varepsilon=\exists x.\psi$ primitive existentielle. Par la remarque (0) précédente, tous les littéraux dans ψ peuvent être supposés positifs.

(A) S'il existe un littéral $x<x$ dans ψ, on a alors ε équivalente à $\bot$ modulo $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$ par irréflexivité de $<$ et on pose $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\bot$.

(B) S'il existe un littéral $x=y$ dans ψ avec x un nom de variable différent de y, on a alors ε équivalente à $\psi[y/x]$ modulo $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$ par transitivité de $=$, congruence à gauche et congruence à droite et on pose $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\psi[y/x]$.

(C) Sinon, un littéral de la forme $x=x$ dans ψ peut être simplement supprimé par réflexivité de $=$, et on a une formule équivalente modulo $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$

$$\exists x.(\bigwedge_{1\leq i\leq m}y_i<x)\wedge(\bigwedge_{1\leq j\leq n}x<z_j)$$

où $x\neq y_i$ et $x\neq z_j$ pour tous $1\leq i\leq m$ et $1\leq j\leq n$.

(a) Si $m=0$ ou $n=0$, puisque $<$ est non borné on peut poser $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\top$.

(b) Sinon, par transitivité de $<$ et densité on peut poser $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varepsilon)\stackrel{\text{def}}{=}\bigwedge_{1\leq i\leq m}\bigwedge_{1\leq j\leq n}y_i<z_j$. □

Exemple 14.10. Considérons la formule $\exists x\exists y\exists z.x<y\wedge y<z\wedge\neg(x<z)$. Cette formule contredit la transitivité de $<$, et nous allons montrer que $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})}(\varphi)=\bot$. On commence pour cela (étape 0) par traduire $\neg(x<z)$ en $z<x\vee x=z$: une formule équivalente modulo $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$ est donc

$$\exists x\exists y\exists z.x<y\wedge y<z\wedge(z<x\vee x=z)\ .$$

Par les arguments du lemme 14.8 (étapes 2 et 3), cette formule est équivalente à

$$\exists x \exists y. x < y \wedge \big((\exists z. y < z \wedge z < x) \vee (\exists z. y < z \wedge x = z)\big)$$

où $\exists z. y < z \wedge z < x$ et $\exists z. y < z \wedge x = z$ sont primitives existentielles. On a alors d'après la preuve du lemme 14.9 que $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})}(\exists z. y < z \wedge z < x) = y < x$ (cas C.b) et $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})}(\exists z. y < z \wedge x = z) = y < x$ (cas B).
Notre formule est donc équivalente modulo $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})$ à

$$\exists x \exists y. x < y \wedge y < x$$

où $\exists y. x < y \wedge y < x$ est primitive existentielle. On a alors d'après la preuve du lemme 14.9 que $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})}(\exists y. x < y \wedge y < x) = x < x$ (cas C.b).
Notre formule est donc équivalente modulo $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})$ à

$$\exists x. x < x$$

qui est primitive existentielle, et d'après la preuve du lemme 14.9, $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})}(\exists x. x < x) = \bot$ (cas A) comme annoncé au début de l'exemple.

Théorème 14.11. *La théorie* $\mathrm{Th}(A_{oldns})$ *est décidable.*

Démonstration. Par le lemme 14.9, pour toute formule close φ, on peut calculer une formule sans variables $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})}(\varphi)$ équivalente modulo $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}})$. Il suffit donc d'être capable de déterminer si $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{oldns}}) \vDash \psi$ pour ψ sans variables. Comme $\mathcal{F}$ est vide, $T(\mathcal{F})$ l'ensemble des termes clos est lui aussi vide : ψ est soit $\top$ soit $\bot$. □

💬 *Cette preuve montre que, pour toute formule close* φ*, soit* $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{oldns})}(\varphi) = \top$ *soit* $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(A_{oldns})}(\varphi) = \bot$*, et donc soit* $\mathrm{Th}(A_{oldns}) \vDash \varphi \Leftrightarrow \top$ *soit* $\mathrm{Th}(A_{oldns}) \vDash \varphi \Leftrightarrow \bot$*, donc soit* $\mathrm{Th}(A_{oldns}) \vDash \varphi$ *soit* $\mathrm{Th}(A_{oldns}) \vDash \neg\varphi$ *: la théorie* $\mathrm{Th}(A_{oldns})$ *est donc* complète.

14.2.2. *Théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle.* La section 14.2.1 était l'occasion de montrer la décidabilité d'une théorie axiomatique. Ici, nous allons montrer la décidabilité de la théorie d'une structure dénotée par $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$. Nous considérons pour cela la signature infinie $\mathcal{F} = \{1^{(0)}, (q\cdot^{(1)})_{q\in\mathbb{Q}}, +^{(2)}\}$ et $\mathcal{P} = \{<^{(2)}, =^{(2)}\}$. Notre interprétation a pour domaine $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'interprétation de la constante 1 est le nombre rationnel $1 \in \mathbb{Q}$, chacune des fonctions unaires $q\cdot$ pour $q \in \mathbb{Q}$ est interprétée comme la fonction $x \mapsto q \cdot x$, la fonction binaire $+$ est interprétée comme l'addition entre rationnels, et les deux relations $<$ et $=$ sont interprétées respectivement comme l'ordre strict et l'égalité sur $\mathbb{Q}$. À noter que la structure $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ est en particulier un modèle de A_{odlns}.

Lemme 14.12 (Fourier-Motzkin)**.** *La théorie* $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ *permet effectivement l'élimination des quantificateurs.*

Démonstration. La preuve procède essentiellement comme celle du lemme 14.9. Par le lemme 14.8, il suffit de pouvoir calculer une formule $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varepsilon)$ pour une formule primitive existentielle $\varepsilon = \exists x. \psi$. Comme dans le lemme 14.9 (étape 0), on peut se ramener au cas où ψ ne comprend que des littéraux positifs, qui sont donc de la forme $t < t'$ ou $t = t'$ où $x \in \mathrm{fv}(t)$ ou $x \in \mathrm{fv}(t')$. Ces inéquations et équations sur $\mathbb{Q}$ peuvent de plus être réécrites de manière équivalente comme des littéraux de la forme $x < t$, $t < x$ ou $x = t$; par exemple, $5x + y < 2x - y + z$ peut se réécrire comme $x < -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z$.

On applique les mêmes étapes de raisonnement que dans la preuve du lemme 14.9. (A) Si ψ contient un littéral $x < x$, alors $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varepsilon) = \bot$ convient. (B) Si ψ contient un littéral $x = t$ pour t différent de x, alors $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varepsilon) = \psi[t/x]$ convient. Un littéral $x = x$ peut simplement être supprimé, et il nous reste donc (C) le cas où ε est de la forme

$$\exists x. \Big(\bigwedge_{1\le i\le m} t_i < x\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{1\le j\le n} x < t'_j\Big)$$

où $x \notin \mathrm{fv}(t_i)$ et $x \notin \mathrm{fv}(t'_j)$ pour tout i, j. Comme dans le lemme 14.9, si $m = 0$ ou $n = 0$ (C.a), alors comme $\mathbb{Q}$ est non borné, $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varepsilon) = \top$ convient. Et comme $\mathbb{Q}$ est dense

et $<$ est transitif, dans le cas contraire (C.b), $\mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varepsilon) = \bigwedge_{1\leq i\leq m}\bigwedge_{1\leq j\leq n} t_i < t'_j$ convient. □

Théorème 14.13. *La théorie* $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ *est décidable.*

Démonstration. Par les lemmes 14.8 et 14.12, savoir si $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <) \vDash \varphi$ pour φ close se ramène savoir si $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <) \vDash \mathrm{qe}_{\mathrm{Th}(\mathbb{Q},1,(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}},+,<)}(\varphi)$, donc pour une formule sans variable. Cette formule est une combinaison booléenne de littéraux de la forme $t < t'$ ou $t = t'$ où t et t' n'utilisent que la constante 1, l'addition $+$ et les multiplications par des constantes de $\mathbb{Q}$, et il suffit donc de calculer les valeurs de t et t' dans $\mathbb{Q}$. □

(Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, thm. 6.20), (Börger, Grädel et Gurevich, 1997, sec. 2.1)

14.3. * **Indécidabilité.** Il existe d'autres théories décidables, dont notablement
- l'*arithmétique de Presburger* $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, <)$, c.f. (Harrisson, 2009, sec. 5.7), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 3.7.5), (Carton, 2008, thm. 3.63) et
- l'*arithmétique des réels* $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \times)$, c.f. (Harrisson, 2009, sec. 5.9), (David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 3.7.4).

Cependant, les théories, et en particulier les théories arithmétiques, deviennent indécidables dès qu'elles sont assez « riches ». En particulier, toute théorie qui étend l'*arithmétique élémentaire* de la section 14.3.1 est indécidable. Comme le concept d'indécidabilité sera plutôt exploré en M1 dans le cours « calculabilité et complexité », dans cette section nous allons seulement donner des exemples sans faire de preuves.

14.3.1. *Théorie de l'arithmétique élémentaire.* Posons $\mathcal{F} = \{0^{(0)}, s^{(1)}, +^{(2)}, \times^{(2)}\}$ et $\mathcal{P} = \{=^{(2)}\}$. L'*arithmétique élémentaire* Q est l'axiomatisation finie suivante :

$$\begin{aligned}
\forall x.&\quad \neg(s(x) = 0)\\
\forall x.&\quad \neg(x = 0) \Rightarrow \exists y. x = s(y)\\
\forall x \forall y.&\quad s(x) = s(y) \Rightarrow x = y\\
\forall x.&\quad x + 0 = 0\\
\forall x \forall y.&\quad x + s(y) = s(x + y)\\
\forall x.&\quad x \times 0 = 0\\
\forall x \forall y.&\quad x \times s(y) = (x \times y) + x
\end{aligned}$$

à laquelle on ajoute les axiomes de l'égalité A_{eq} de l'exemple 14.2 ainsi que les axiomes de congruence suivants :

$$\begin{aligned}
\forall x \forall x' \forall y.&\quad (x = x' \wedge s(x) = y) \Rightarrow s(x') = y\\
\forall x \forall x' \forall y \forall z.&\quad (x = x' \wedge x + y = z) \Rightarrow x' + y = z\\
\forall x \forall x' \forall y \forall z.&\quad (x = x' \wedge y + x = z) \Rightarrow y + x' = z\\
\forall x \forall x' \forall y \forall z.&\quad (x = x' \wedge x \times y = z) \Rightarrow x' \times y = z\\
\forall x \forall x' \forall y \forall z.&\quad (x = x' \wedge y \times x = z) \Rightarrow y \times x' = z
\end{aligned}$$

Le résultat suivant énonce que cette « petite » axiomatisation est déjà indécidable.

Théorème 14.14 (Tarski, Mostowski et Robinson)**.** *La théorie* $\mathrm{Th}(Q)$ *est indécidable.*

Plus généralement, toute théorie cohérente qui contient Q est elle aussi indécidable. Et une dernière conséquence est qu'il n'existe pas d'algorithme qui résout le problème de VALIDITÉ. En effet, si un tel algorithme existait et pour n'importe quelle formule φ' pour laquelle on souhaiterait savoir si $\varphi' \in \mathrm{Th}(Q)$, on pourrait donner la formule $\varphi \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\bigwedge_{\psi\in Q} \psi) \Rightarrow \forall \mathrm{fv}(\varphi'). \varphi'$ en entrée à l'algorithme. Comme $\vDash \varphi$ si et seulement si $Q \vDash \varphi'$, l'existence d'un tel algorithme contredirait le théorème de Tarski, Mostowski et Robinson.

Théorème 14.15 (Turing et Church)**.** *Il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée une formule du premier ordre et retourne si oui ou non elle est valide.*

14.3.2. *Équations diophantiennes.* Une *équation diophantienne* est une équation $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ où p est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ pour laquelle on cherche une solution $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$. Par exemple, $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2x_3 - 7 = 0$ est une équation diophantienne qui a une solution $(1, 2, -2)$, tandis que $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Le problème de décision correspondant est connu comme « dixième problème de Hilbert ».

Problème (ÉQUATION DIOPHANTIENNE)**.**
instance : une équation diophantienne $p(x_1, \dots, x_n) = 0$
question : existe-t'il une solution dans $\mathbb{Z}^n$?

Une conséquence d'un résultat de Matiassevitch en 1970 est qu'il n'existe pas d'algorithme capable de dire s'il existe au moins une solution à une équation diophantienne.

Théorème 14.16 (Matiassevitch)**.** *Il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée une équation diophantienne et retourne si oui ou non il en existe une solution.*

Une conséquence du théorème de Matiassevitch est que les théories arithmétiques sur les entiers ou sur les naturels sont indécidables. Ici, on prend $\mathcal{F} = \{+^{(2)}, \times^{(2)}\}$ et $\mathcal{P} = \{=^{(2)}\}$ et on dénote par $(\mathbb{Z}, +, \times)$ l'interprétation sur les entiers de cette signature et par $(\mathbb{N}, +, \times)$ celle sur les naturels.

Corollaire 14.17. *Les théories* $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ *et* $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$ *sont indécidables.*

Le corollaire 14.17 est aussi une conséquence du théorème de Tarski, Mostowski et Robinson. L'intérêt de passer par le théorème de Matiassevitch est que les formules φ pour lesquelles on ne sait pas répondre si $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$ sont particulièrement simples.

Démonstration. Comme vu dans l'exemple 11.5, on peut exprimer par les formules $\mathit{zero}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z + z = z$ et $\mathit{un}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \neg\mathit{zero}(u) \wedge u \times u = u$ que les variables z et u soient valuées à 0 et 1 respectivement.

Étant donnée une équation diophantienne $p(x_1, \dots, x_n) = 0$, on peut l'écrire de manière équivalente comme $p_1(x_1, \dots, x_n) = p_2(x_1, \dots, x_n)$ où tous les coefficients de p_1 et p_2 sont dans $\mathbb{N}$. Par exemple, $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2x_3 - 7 = 0$ s'écrit de manière équivalente comme $3x_1^2 = 2x_1x_2 + x_2^2x_3 + 7$.

On peut alors construire une formule universelle close

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \forall z \forall u.(\mathit{zero}(z) \wedge \mathit{un}(u)) \Rightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n.\neg(t_1(x_1, \dots, x_n, z, u) = t_2(x_1, \dots, x_n, z, u))$$

où t_1 et t_2 sont des termes qui représentent les polynômes p_1 et p_2. Par exemple, $3x_1^2$ est représenté par $x_1 \times x_1 + x_1 \times x_1 + x_1 \times x_1$, et $2x_1x_2 + x_2^2x_3 + 7$ est représenté par $x_1 \times x_2 + x_1 \times x_2 + x_2 \times x_2 \times x_3 + u + u + u + u + u + u + u$. La formule φ est telle que $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ si et seulement si l'équation diophantienne $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ n'a pas de solution. Dès lors, si $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ était décidable, cela contredirait le théorème de Matiassevitch.

Pour la théorie $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$, on fait le même raisonnement en observant que l'équation diophantienne $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ a une solution dans $\mathbb{Z}^n$ si et seulement si $p(y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n) = 0$ a une solution dans $\mathbb{N}^{2n}$. □

Une conséquence du corollaire 14.17 est que le problème d'ÉVALUATION DANS I ne peut pas être résolu algorithmiquement quand $I = (\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $I = (\mathbb{N}, +, \times)$.

Théorème 14.18 (indécidabilité de l'évaluation)**.** *Pour $I = (\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $I = (\mathbb{N}, +, \times)$, il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée une formule φ et retourne si $I \vDash \varphi$ ou non, et ce même si φ est universelle.*

Corollaire 14.19. *Les théories* $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ *et* $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$ *ne sont pas récursivement axiomatisables.*

Démonstration. Si $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ ou $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \times)$ était récursivement axiomatisable, alors comme elles sont toute deux complètes, elle serait décidable par la propriété 14.7, contredisant le corollaire 14.17. □

15. Satisfiabilité modulo théorie

Résumé. Un *solveur modulo théorie* pour une théorie T est un programme qui prend en entrée une formule φ et répond s'il existe une interprétation I et une valuation ρ telles que $I \vDash \psi$ pour toute formule $\psi \in T$ et $I, \rho \vDash \varphi$ (et retourne I et ρ le cas échéant).

En pratique, les solveurs modulo théorie savent traiter des formules φ qui sont des conjonctions de littéraux, font appel à un solveur SAT pour pouvoir traiter des formules sans quantificateurs, et peuvent utiliser l'élimination des quantificateurs pour traiter des formules générales.

Les solveurs modulo théorie utilisent un langage standard appelé *SMT-LIB* pour décrire la signature $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, la théorie T, et la formule φ.

Rappelons qu'une formule φ est satisfiable s'il existe une interprétation I et une valuation ρ telles que $I, \rho \vDash \varphi$. Comme vu dans la section 14, savoir si une formule prise en isolation est satisfiable n'est souvent pas suffisant, car on souhaite restreindre les interprétations possibles des symboles de fonction et de relation utilisées par la formule. On fixe alors une théorie T pour expliciter les propriétés de nos interprétations ; le problème considéré en pratique est donc le suivant.

Problème (SATISFIABILITÉ MODULO T)**.**
instance : une formule φ
question : existe-t'il une interprétation I et une valuation ρ telles que $I \vDash T$ et $I, \rho \vDash \varphi$?

Un *témoin* de SATISFIABILITÉ MODULO T est alors une interprétation I et une valuation ρ telles que $I \vDash T$ et $I, \rho \vDash \varphi$.

Dans beaucoup de cas d'intérêt pratique, la théorie T elle-même est la théorie $\mathrm{Th}(I)$ d'une interprétation I fixée, comme $(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ ou $(\mathbb{R}, +, \times)$. Dans ce cas le problème de SATISFIABILITÉ MODULO T revient à trouver s'il existe une valuation ρ telle que $I, \rho \vDash \varphi$.

15.1. Utilisation de solveurs SMT.

Un *solveur modulo théorie* (SMT) est un programme qui cherche à résoudre la problème de SATISFIABILITÉ MODULO T et retourne un témoin le cas échéant. Il existe de nombreux solveurs SMT. Dans ces notes nous utiliserons le solveur Z3 [12]. La lecture du tutoriel `https://rise4fun.com/Z3/tutorial/guide` est chaudement recommandée.

15.1.1. *Principes de base des solveurs SMT.*

Dans leur forme la plus basique, les solveurs SMT ont été développés pour résoudre le problème de SATISFIABILITÉ MODULO T pour des formules φ sans quantificateurs sur une théorie T fixée. Ainsi, on pourrait chercher à déterminer si la formule

$$x + y \geq 0 \wedge (x \neq z \Rightarrow y + z = -1) \wedge z > 3t \tag{48}$$

dans la théorie de l'arithmétique linéaire rationnelle $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$.

Les solveurs SMT implémentent en réalité des solveurs pour des formules qui sont des conjonctions de littéraux. Dans le cas de la formule (48), on pourrait alors convertir la formule sous forme normale disjonctive

$$(x + y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge z > 3t) \vee (x + y \geq 0 \wedge y + z = -1 \wedge z > 3t)$$

12. `https://github.com/Z3Prover/z3` ; les exemples peuvent être testés en ligne à la page `https://rise4fun.com/z3/`

puis essayer de résoudre chacune des deux conjonctions de littéraux indépendamment. Cela revient à résoudre les deux systèmes d'équation suivants dans $\mathbb{Q}$, ce qui se fait aisément :

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-z=0 \\ z-3t>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y \geq 0 \\ y+z-1=0 \\ z-3t>0 \end{cases}$$

Solveurs SMT hors ligne. Un défaut d'une telle approche est que la mise sous forme normale disjonctive peut avoir un coût exponentiel. Les solveurs SMT s'appuient à la place sur des solveurs SAT pour traiter la « partie booléenne » de la formule. On procède pour cela comme suit.

(1) Chaque littéral de la formule d'origine est associé à une proposition. Par exemple, pour la formule (48), on obtient ainsi une formule $P_1 \wedge (P_2 \Rightarrow P_3) \wedge P_4$ où P_1 représente le littéral $x+y \geq 0$, P_2 représente $x \neq z$, P_3 représente $y+z=-1$ et P_4 représente $z>3t$.

(2) La formule propositionnelle est convertie en forme normale conjonctive – ce qui donne la formule $P_1 \wedge (\neg P_2 \vee P_3) \wedge P_4$ pour notre exemple – et donnée en entrée à un solveur SAT. Si cette formule propositionnelle est insatisfiable, alors la formule de départ l'était aussi.

(3) Sinon, le solveur SAT fournit un modèle de la formule propositionnelle, par exemple l'interprétation partielle $[\top/P_1, \bot/P_2, \top/P_3, \top/P_4]$. Ce modèle correspond à une conjonction de littéraux $x+y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge y+z=-1 \wedge z>3t$ que le solveur SMT tente de satisfaire dans la théorie $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$; en l'occurrence, il s'agit simplement de résoudre un système d'inéquations linéaires sur les rationnels :

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-z=0 \\ y+z-1=0 \\ z-3t>0 \end{cases}$$

Si cette conjonction de littéraux est satisfiable, la formule de départ l'était aussi.

(4) Sinon, et c'est le cas de notre exemple, on fait la conjonction entre la formule d'origine et la négation de notre conjonction de littéraux de l'étape (3) ; pour notre exemple, cela donne la formule $(x+y \geq 0 \wedge (x \neq z \Rightarrow y+z=-1) \wedge z>3t) \wedge \neg(x+y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge y+z=-1 \wedge z>3t)$. Le résultat est une nouvelle formule qui est satisfiable si et seulement si la formule d'origine l'était, et on recommence à l'étape (1) ci-dessus.

Exemple 15.1. Si on poursuit sur notre exemple, nous avons maintenant (2) une formule propositionnelle en forme normale conjonctive $P_1 \wedge (\neg P_2 \vee P_3) \wedge P_4 \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3 \vee \neg P_4)$ pour laquelle un solveur SAT retourne par exemple $[\top/P_1, \bot/P_2, \bot/P_3, \top/P_4]$, et (3) la conjonction de littéraux $x+y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge \neg(y+z=-1) \wedge z>3t$ est maintenant satisfiable dans $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$, par exemple par la valuation partielle $[0/x, 0/y, 0/z, -\frac{1}{6}/t]$, qui satisfait donc aussi la formule d'origine (48).

15.1.2. *Élimination des quantificateurs.* Dans le cas où la théorie T permet effectivement l'élimination des quantificateurs, comme les théories $\mathrm{Th}(A_{\text{oldns}})$ des ordres linéaires denses non bornés stricts et $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, 1, (q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}, +, <)$ de l'arithmétique linéaire rationnelle de la section 14.2, mais aussi les théories $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, <)$ de l'arithmétique de Presburger et $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \times)$ de l'arithmétique des réels, on dispose d'un algorithme qui, pour une formule φ donnée, retourne une formule sans quantificateurs $\mathrm{qe}_T(\varphi)$ équivalente modulo T, c'est-à-dire telle que $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathrm{qe}_T(\varphi)$.

Cela permet d'appliquer notre solveur SMT à la formule $\mathrm{qe}_T(\varphi)$. En effet, en général si $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$ alors la formule φ est satisfiable modulo T si et seulement si la formule ψ l'est, et de plus les mêmes témoins I, ρ peuvent être utilisés pour les deux formules. Cela découle des définitions : si $T \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$, c'est-à-dire si pour toute interprétation I telle que $I \vDash T$ et pour toute valuation ρ

En pratique, plutôt que de faire la conjonction avec $\neg(x+y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge y+z=-1 \wedge z>3t)$ en entier, le solveur SMT va trouver un sous-ensemble des littéraux qui ne peut pas être satisfait et ajouter la négation de ce sous-ensemble ; par exemple $\neg(x+y \geq 0 \wedge \neg(x \neq z) \wedge y+z=-1)$.

Les solveurs SAT *actuels basés sur des techniques de «* conflict-driven clause learning *» sont capables d'ajouter des nouvelles clauses en cours d'exécution, ce qui rend l'étape (4) efficace. Les solveurs SMT actuels sont plutôt* en ligne *pour faire dialoguer efficacement le solveur* SAT *et la recherche de modèle dans la théorie.*

on a $I, \rho \vDash \varphi \Leftrightarrow \psi$, alors pour toute interprétation I telle que $I \vDash T$ et pour toute valuation ρ, $I, \rho \vDash \varphi$ si et seulement si $I, \rho \vDash \psi$.

15.1.3. *SMT-LIB.* Un solveur SMT comme Z3 peut être utilisé au travers de son API ; il en existe pour plusieurs langages de programmation [13]. Si de telles APIs rendent les solveurs SMT directement accessibles depuis un langage de programmation, elles ont le défaut de dépendre à la fois du solveur et du langage.

Une approche générique est d'avoir un format commun pour tous les solveurs SMT, comme le format DIMACS l'était pour les solveurs SAT. Dans le cas des solveurs SMT, ce format commun s'appelle *SMT-LIB* [14] et est en fait un langage pour définir des théories logiques et des formules, et pour écrire des scripts très simples.

(Barrett, Fontaine et Tinelli, 2017)

Écrire des formules en SMT-LIB. Commençons par un exemple très simple : la formule (48). Voici le code correspondant en SMT-LIB.

eq47.smt2

```
(declare-const x Real)
(declare-const y Real)
(declare-const z Real)
(declare-const t Real)
(assert (and (>= (+ x y) 0) (=> (distinct x z) (= (+ y z) -1))
  (> z (* 3 t))))
(check-sat)
(get-value (x y z t))
(exit)
```

Dans ce code, on commence par déclarer les quatre variables libres x, y, z et t. Le langage SMT-LIB force à donner des *types* à tous ses objets ; ici nous utilisons le type `Real` pour toutes nos variables (il n'y a pas de type pour les rationnels, mais cela revient au même). Les formules dont on souhaite vérifier la satisfiabilité sont écrites en « notation préfixe » et ajoutées par la commande `(assert` φ`)` ; à noter que les opérateurs comme `and` peuvent prendre plus de deux arguments. On vérifie la satisfiabilité par `(check-sat)`, puis `(get-value ...)` permet d'afficher la valuation. Si on appelle Z3 sur ce fichier, il répond correctement que la formule est satisfiable et fournit une valuation :

```
sat
((x 0.0)
 (y 0.0)
 (z 0.0)
 (t (- (/ 1.0 6.0))))
```

Formules quantifiées en SMT-LIB. Voyons comment écrire les formules de l'exemple 11.4 en SMT-LIB. La formule (19) $\forall x \exists y . y < x$ s'écrit comme suit.

order.smt2

```
;; équation (19)
(assert (forall ((x Real)) (exists ((y Real)) (< y x))))
(check-sat-using (then qe smt))
```

Il y a deux différences par rapport au code précédent. D'une part, comme la formule est close, il n'est pas nécessaire de déclarer de variables libres comme des constantes. D'autre part, comme la formule utilise des quantificateurs, il faut indiquer à Z3 qu'il doit utiliser l'élimination des quantificateurs avant de chercher un modèle : c'est ce que fait la commande `(check-sat-using (then qe smt))`.

13. https://github.com/Z3Prover/z3#z3-bindings
14. http://smtlib.cs.uiowa.edu/

La formule (20) $\forall x \forall y . x < y \Rightarrow \exists z . x < z \wedge z < y$ s'écrit comme suit.

order.smt2
```
;; équation (20) sur les réels
(assert (forall ((x Real) (y Real)) (=> (< x y)
  (exists ((z Real)) (and (< x z) (< z y))))))
(check-sat-using (then qe smt))
```

Cette formule est satisfiable dans un ordre dense comme $(\mathbb{Q}, <)$ ou $(\mathbb{R}, <)$, mais ne l'est pas dans un ordre discret comme $(\mathbb{Z}, <)$; Z3 répond `unsat` pour le code SMT-LIB suivant :

order.smt2
```
;; équation (20) sur les entiers
(assert (forall ((x Int) (y Int)) (=> (< x y)
  (exists ((z Int)) (and (< x z) (< z y))))))
(check-sat-using (then qe smt))
```

Inversement, la formule (21) $\forall x \exists y \forall z . x < y \wedge \neg(x < z \wedge z < y)$ n'est pas satisfiable dans $(\mathbb{R}, <)$; Z3 répond `unsat` pour le code SMT-LIB suivant :

order.smt2
```
;; équation (21)
(assert (forall ((x Real)) (exists ((y Real)) (and (< x y)
  (not (exists ((z Real)) (and (< x z) (< z y)))))))))
(check-sat-using (then qe smt))
```

Déclarer des symboles. Reprenons maintenant la formule du buveur $\exists x . B(x) \Rightarrow \forall y . B(y)$ de l'exemple 11.2. Celle-ci est valide si et seulement si sa négation est insatisfiable, ce que nous allons vérifier avec Z3. La formule utilise un symbole B de relation unaire *non interprété*, qu'il va falloir déclarer : on déclare pour cela un nouveau type D par la commande `(declare-sort D)`.

buveur.smt2
```
; exemple 11.1
; on appelle D notre domaine
(declare-sort D)
; le symbole de relation `B' prend un élément du domaine et retourne
; une valeur de vérité
(declare-fun B (D) Bool)
; la formule du buveur est valide si et seulement si sa négation
; est insatisfiable
(assert (not (exists ((x D)) (=> (B x) (forall ((y D)) (B y))))))
(check-sat-using (then qe smt))
; (renvoie `unsat')
(exit)
```

Définir des symboles. Considérons maintenant la théorie de l'exemple 14.5. L'axiomatisation A que nous avions défini dans cet exemple permettait de modéliser fidèlement l'interprétation I donnée dans l'exemple 9.3, et pourrait être écrit en SMT-LIB. Cependant, il est plus aisé pour modéliser notre base de données d'utiliser un type énumératif pour l'ensemble des éléments du domaine D_I, ce qui crée simultanément les symboles de constantes *shining*, *player*, etc. C'est ce que nous faisons ci-dessous, en différenciant de plus trois types d'éléments dans le domaine D_I : les titres de films, les noms de réalisateurs et d'interprètes, et les noms de cinémas.

database.smt2
```
;; exemple 11.3
;; types énumératifs
(declare-datatypes () ((Titre shining player chinatown repulsion)
```

```
  (Nom kubrick altman polanski nicholson robbins deneuve)
  (Cinema champo odeon)))
;; la relation `Film'
(define-fun Film ((x Titre) (y Nom) (z Nom)) Bool
  (ite (and (= x shining)   (= y kubrick)  (= z nicholson)) true
  (ite (and (= x player)    (= y altman)   (= z robbins))   true
  (ite (and (= x chinatown) (= y polanski) (= z nicholson)) true
  (ite (and (= x chinatown) (= y polanski) (= z polanski))  true
  (ite (and (= x repulsion) (= y polanski) (= z deneuve))   true
    false))))))
;; la relation `Seance'
(define-fun Seance ((x Cinema) (y Titre)) Bool
  (ite (and (= x champo) (= y shining))   true
  (ite (and (= x champo) (= y chinatown)) true
  (ite (and (= x champo) (= y player))    true
  (ite (and (= x odeon)  (= y chinatown)) true
    false)))))
```

Plutôt que de déclarer un symbole de relation non interprété *Film* et d'ajouter une assertion qui garantit que $\mathit{Film}(x, y, z)$ n'est vrai que pour les bons x, y et z, on a défini ci-dessus le symbole de relation via `(define-fun Film ...)`. La commande `(ite` *cond si sinon*`)` est un « *if-then-else* » : si *cond* s'évalue à vrai, son résultat est celui de *si*, et sinon c'est le résultat de *sinon*.

Nous pouvons maintenant tester les requêtes de l'exemple 11.3. La première requête (7) cherche un titre de film présent dans la base de données et est satisfiable.

database.smt2
```
(declare-const x Titre)
;; équation (7)
(assert (exists ((r Nom) (i Nom)) (Film x r i)))
(check-sat-using (then qe smt))
(get-value (x))
```

On demande ici à Z3 une valeur de x qui satisfait la requête par la commande `(get-value ...)` ; le résultat est le suivant.

```
sat
((x repulsion))
```

La requête (12) cherche des paires d'un réalisateur et d'un cinéma qui diffuse un de ses films ; Z3 trouve que (Altman, Le Champo) satisfait la requête.

database.smt2
```
(declare-const x Nom)
(declare-const y Cinema)
;; équation (12)
(assert (exists ((t Titre) (i Nom)) (and (Film t x i) (Seance y t))))
(check-sat-using (then qe smt))
(get-value (x y))
```

La requête équation (18) cherche des interprètes qui n'ont joué que dans un seul film ; Z3 trouve que Robbins satisfait cette requête.

database.smt2
```
(declare-const x Nom)
;; équation (18)
(assert (exists ((t Titre) (r Nom)) (and (Film t r x)
  (forall ((t2 Titre) (r2 Nom)) (=> (Film t2 r2 x) (= t t2))))))
```

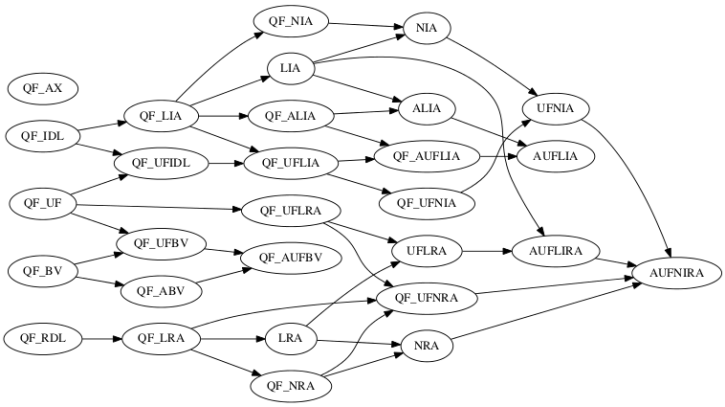


FIGURE 21. Les théories définies par SMT-LIB 2.6 ; voir `http://smtlib.cs.uiowa.edu/logics.shtml`.

```
(check-sat-using (then qe smt))
(get-value (x))
```

15.1.4. *Théories usuelles.* La figure 21 ci-après est tirée de la documentation de SMT-LIB et recense les théories standardisées – mais toutes ne sont pas nécessairement implémentées dans tous les solveurs SMT. Ces théories permettent différentes combinaisons de

- théories arithmétiques comme par exemple $(\mathbb{Z}, +, \times)$ (notée NIA dans la figure 21) ou $(\mathbb{R}, +, \times)$ (notée NRA) ou leurs restrictions à leurs fragments linéaires (par exemple LIA pour l'arithmétique de PRESBURGER ou LRA pour l'arithmétique linéaire sur les réels),
- permettant des formules quantifiées ou non (les fragments sans quantificateurs sont préfixés par QF_ dans la figure 21) , et
- permettant des symboles non interprétés (les fragments avec symboles non interprétés sont préfixés par UF dans la figure 21) ou non.

Par exemple, UFLRA désigne l'arithmétique linéaire sur les réels avec quantificateurs et symboles non interprétés.

Pour plusieurs des théories de la figure 21, il n'existe pas d'algorithme qui résout le problème de SATISFIABILITÉ MODULO T. Cela n'empêche pas d'implémenter une procédure, qui potentiellement répondra `(timeout)` ou `(unknown)` ou lieu de `(sat)` ou `(unsat)`.

15.2. **Exemple de modélisation : nombre de McNuggets.** Voyons maintenant un exemple complet de modélisation en logique du premier ordre et son implémentation en SMT-LIB. Le problème est le suivant : les McNuggets sont vendus en boîtes de six, de neuf, ou de vingt McNuggets [15] ; voir la figure 22.

Si on souhaite acheter un nombre $m \in \mathbb{N}$ de McNuggets, cela n'est pas forcément possible. Par exemple, on ne peut pas acheter exactement trois McNuggets ou exactement onze McNuggets. En fait, on peut acheter exactement m McNuggets si et seulement si m est une combinaison positive linéaire de six, neuf et vingt :

$$\mathit{combinaison}(m) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists c_1 \exists c_2 \exists c_3 . m = 6 \cdot c_1 + 9 \cdot c_2 + 20 \cdot c_3) \tag{49}$$

où c_1, c_2 et c_3 doivent être pris dans $\mathbb{N}$.

Cependant, si m est assez grand, de tels coefficients c_1, c_2 et c_3 existent nécessairement par le théorème combinatoire de SCHUR puisque 6, 9 et 20 sont premiers entre eux. Le *nombre de McNuggets* est le plus grand entier m qui ne satisfait pas la formule $\mathit{combinaison}(m)$ définie

15. Auteur : Fritz Saalfeld, licence [CC BY-SA 2.5], via *Wikimedia Commons*.

FIGURE 22. Une boîte de vingt *chicken McNuggets*[15].

en (49). Dit autrement, on cherche m tel que

$$\neg \mathit{combinaison}(m) \wedge \forall p. p > m \Rightarrow \mathit{combinaison}(p)\ . \tag{50}$$

Calculer le nombre de McNuggets est bien une instance de SATISFIABILITÉ MODULO T où l'on peut prendre l'arithmétique de PRESBURGER comme théorie T sous-jacente. On peut implémenter tout cela en SMT-LIB comme ci-dessous.

mcnuggets.smt2

```
; nombre de McNuggets
(declare-const m Int)
(assert (>= m 0))
; équation (48) : n est-il une combinaison linéaire de 6, 9 et 20 ?
(define-fun combinaison ((n Int)) Bool
  (exists ((c1 Int)(c2 Int)(c3 Int))
    (and (>= c1 0) (>= c2 0) (>= c3 0)
      (= n (+ (* 6 c1) (* 9 c2) (* 20 c3))))))
; équation (49)
(assert (and
  (not (combinaison m))
  (forall ((p Int)) (=> (> p m) (combinaison p)))))
(check-sat)
(get-value (m))
(exit)
```

Le solveur Z3 arrive à résoudre ce problème sur ma machine de bureau, et répond correctement que 43 est le nombre de McNuggets.

Cette section donne un exemple d'algorithme d'apprentissage passif à la (GOLD, 1967).

15.3. **Exemple de modélisation : apprentissage d'automates séparateurs.** Soient deux ensembles finis disjoints I et E de mots sur un alphabet fini Σ. On souhaite apprendre un automate fini déterministe $\mathcal{A}$ qui accepte tous les mots de I et rejette tous les mots de E : $I \subseteq L(\mathcal{A})$ et $E \cap L(\mathcal{A}) = \emptyset$. Par exemple, sur $\Sigma = \{a, b\}$ pour $I = \{\varepsilon, ab\}$ (où ε dénote le mot vide) et $E = \{aa, b\}$, l'automate de la figure 23 ci-dessous répond au problème.

Modélisation du problème. Nous allons voir comment utiliser un solveur SMT pour trouver automatiquement un tel automate. Rappelons pour cela la définition d'un automate fini déterministe complet $\mathcal{A}$ sur un alphabet Σ : $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F, q_0)$ où Q est un ensemble fini d'états, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants et $q_0 \in Q$

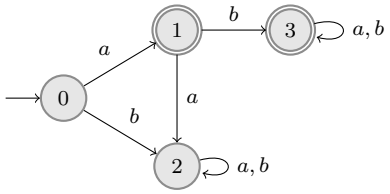


FIGURE 23. Un automate qui accepte ε et ab mais rejette b et aa.

est l'état initial. La fonction de transition peut être étendue en une fonction $\delta : Q \times \Sigma^* \to Q$ en posant $\delta(q, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} q$ et $\delta(q, wa) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(\delta(q, w), a)$ pour tout $w \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$. Le langage de l'automate est $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$. Par exemple, le langage de l'automate de la figure 23 est $\{a, ab\} \cup \{abw \mid w \in \Sigma^*\}$.

Pour modéliser efficacement le problème, nous allons dans une première étape construire une structure d'*arbre préfixe* (aussi appelé « *trie* » pour l'ensemble de mots $I \cup E$. Pour un ensemble de mots S sur un alphabet Σ, l'arbre préfixe de S contient un nœud pour chaque mot dans

$$\mathit{Pref}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*. uv \in S\}$$

l'ensemble des préfixes des mots de S. Un nœud u est le parent d'un nœud v s'il existe une lettre a de l'alphabet Σ telle que $v = ua$. Par exemple, l'arbre de la figure 24 est l'arbre préfixe de l'ensemble $I \cup E = \{\varepsilon, ab, aa, b\}$.

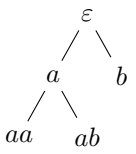


FIGURE 24. L'arbre préfixe pour l'ensemble $\{\varepsilon, ab, aa, b\}$.

L'idée de notre modélisation est qu'un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F, q_0)$ est tel que $I \subseteq L(\mathcal{A})$ et $E \cap L(\mathcal{A}) = \emptyset$ si et seulement si il existe une fonction $f : \mathit{Pref}(I \cup E) \to Q$ telle que les trois contraintes ci-dessous soient vérifiées :

$$f(\varepsilon) = q_0 \tag{51}$$

$$\bigwedge_{\substack{w \in \Sigma^*, a \in \Sigma \\ wa \in \mathit{Pref}(I \cup E)}} \delta(f(w), a) = f(wa) \tag{52}$$

$$\Big(\bigwedge_{w \in I} f(w) \in F \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{w \in E} f(w) \notin F \Big) \tag{53}$$

Proposition 15.2. *Un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F, q_0)$ est tel que $I \subseteq L(\mathcal{A})$ et $E \cap L(\mathcal{A}) = \emptyset$ si et seulement si il existe une fonction $f : \mathit{Pref}(I \cup E) \to Q$ telle que* (51)*,* (52) *et* (53) *soient vérifiées.*

Démonstration. Si $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, F, q_0)$ est un automate tel que $I \subseteq L(\mathcal{A})$ et $E \cap L(\mathcal{A}) = \emptyset$, on définit $f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(q_0, w)$ pour tout mot $w \in \mathit{Pref}(I \cup E)$, ce qui vérifie bien (51), (52) et (53).

Inversement, si $f : \mathit{Pref}(I \cup E) \to Q$ est une fonction telle que (51) et (52) soient vérifiées, alors

$$\forall w \in \mathit{Pref}(I \cup E). f(w) = \delta(q_0, w) \ .$$

Cela se vérifie par induction sur le mot w. Pour le cas de base $w = \varepsilon$, par (51), on a bien $f(\varepsilon) = q_0 = \delta(q_0, \varepsilon)$. Puis pour l'étape d'induction $w = w'a$ avec $w' \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$, comme nécessairement $w' \in \mathit{Pref}(I \cup E)$, l'hypothèse d'induction s'applique et donc $f(w') = \delta(q_0, w')$; de plus par (52), $f(w) = f(w'a) = \delta(f(w'), a) = \delta(\delta(q_0, w'), a) = \delta(q_0, w'a) = \delta(q_0, w)$ comme désiré.

Par suite, pour tout $w \in I$, on a $w \in \mathit{Pref}(I \cup E)$ donc $\delta(q_0, w) = f(w)$ et $f(w) \in F$ par (53), donc $I \subseteq L(\mathcal{A})$. Et pour tout $w \in E$, on a $w \in \mathit{Pref}(I \cup E)$ donc $\delta(q_0, w) = f(w)$ et $f(w) \notin F$ par (53), donc $E \cap L(\mathcal{A}) = \emptyset$. □

Implémentation en SMT-LIB. Voici maintenant comment exprimer notre problème en SMT-LIB. Tout d'abord, nous allons déclarer des types énumératifs pour notre alphabet et pour notre arbre préfixe.

automaton.smt2
```
; définition de l'alphabet A et de l'arbre préfixe T
(declare-datatypes () ((A a b) (T e ea eb eaa eab)))
```

Les symboles de constantes associés à l'arbre préfixe sont `e` pour ε, `ea` pour a, `eb` pour b, `eaa` pour aa et `eab` pour ab.

L'automate fini $\mathcal{A}$ utilise l'ensemble d'entiers $\{0, \ldots, n-1\}$ comme ensemble d'états Q, où 0 est l'état initial.

automaton.smt2
```
; les états de l'automate à trouver sont {0, 1, ..., n-1}
(define-sort Q () Int)
(declare-const n Q)
(assert (> n 0))
; fonction de transition de l'automate
(declare-fun delta (Q A) Q)
(assert (forall ((q Q) (a A))
  (and (>= (delta q a) 0) (< (delta q a) n))))
; ensemble d'états acceptants de l'automate
(declare-fun final (Q) Bool)
```

Il nous reste à exprimer la fonction $f : I \cup E \to Q$ ainsi que les contraintes des équations (51), (52) et (53).

automaton.smt2
```
; fonction des éléments de l'arbre préfixe vers les états
(declare-fun f (T) Q)
(assert (forall ((x T))
  (and (>= (f x) 0) (< (f x) n))))
; contrainte (50) sur l'état initial
(assert (= 0 (f e)))
; contraintes (51) sur les transitions
(assert (and (= (f ea)  (delta (f e)  a))
             (= (f eb)  (delta (f e)  b))
             (= (f eaa) (delta (f ea) a))
             (= (f eab) (delta (f ea) b))))
; contraintes (52) sur les états acceptants
(assert (and (final (f e))
             (final (f eab))
             (not(final (f eb)))
             (not(final (f eaa)))))
(check-sat-using (then qe smt))
```

```
(get-model)
(exit)
```

La commande `(get-model)` demande au solveur SMT de fournir l'interprétation qu'il a trouvée (si le problème était satisfiable). Voici ce que retourne Z3.

```
sat
(model
  (define-fun n () Int
    2)
  (define-fun k!6 ((x!0 Int)) Int
    (ite (= x!0 0) 0
      1))
  (define-fun delta!7 ((x!0 Int) (x!1 A)) Int
    (ite (and (= x!0 1) (= x!1 b)) 0
      1))
  (define-fun delta ((x!0 Int) (x!1 A)) Int
    (delta!7 (k!6 x!0) x!1))
  (define-fun final ((x!0 Int)) Bool
    (ite (= x!0 1) false
      true))
  (define-fun f ((x!0 T)) Int
    (ite (= x!0 e) 0
    (ite (= x!0 eab) 0
      1)))
)
```

L'interprétation trouvée met `n` à 2, donc l'automate a deux états 0 et 1. Les deux fonctions `k!6` et `delta!7` sont des fonctions auxiliaires introduites par le solveur. La fonction de transition `delta` prend en entrée un état `x!0` et une lettre de l'alphabet `x!1` et envoie sur l'état 1 sauf si `x!0` est l'état 1 et `x!1` est la lettre b, auquel cas elle envoie sur 0. La fonction `final` définit l'état 1 comme rejetant et l'état 0 comme acceptant. Tout cela décrit l'automate de la figure 25. À noter que cet automate accepte le language $((a+b)a^*b)^*$, qui n'est pas le même que celui de l'automate de la figure 23, mais qui sépare aussi I de E.

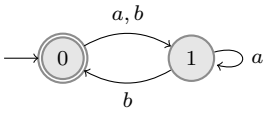


FIGURE 25. Un autre automate qui accepte ε et ab mais rejette aa et b.

15.4. * **Indécidabilité : pavage du plan.** Pour finir cette section, mentionnons qu'en général, il n'existe pas d'algorithme qui résout SATISFIABILITÉ MODULO T. En effet, une formule close φ appartient à la théorie T si et seulement si sa négation $\neg\varphi$ n'est pas satisfiable modulo T. Un algorithme pour SATISFIABILITÉ MODULO T permettrait donc de décider la théorie T, or nous avons vu en section 14.3 que certaines théories comme l'arithmétique élémentaire ou $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \times)$ étaient indécidables.

Problème de pavage du plan. Dans cette section, nous allons en faire une preuve directe, qui sera aussi l'occasion de modéliser un problème de plus comme un problème de satisfiabilité modulo théorie. Le problème qui nous intéresse est le problème de *pavage du plan*. L'entrée du problème est un *catalogue*, qui est un ensemble fini C de *tuiles* carrées avec une couleur par côté comme celles de la figure 26.

(BÖRGER, GRÄDEL et GUREVICH, 1997, sec. 3.1)

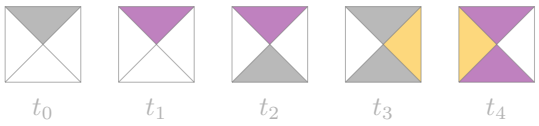


FIGURE 26. Un catalogue $C_{\text{ex}} = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

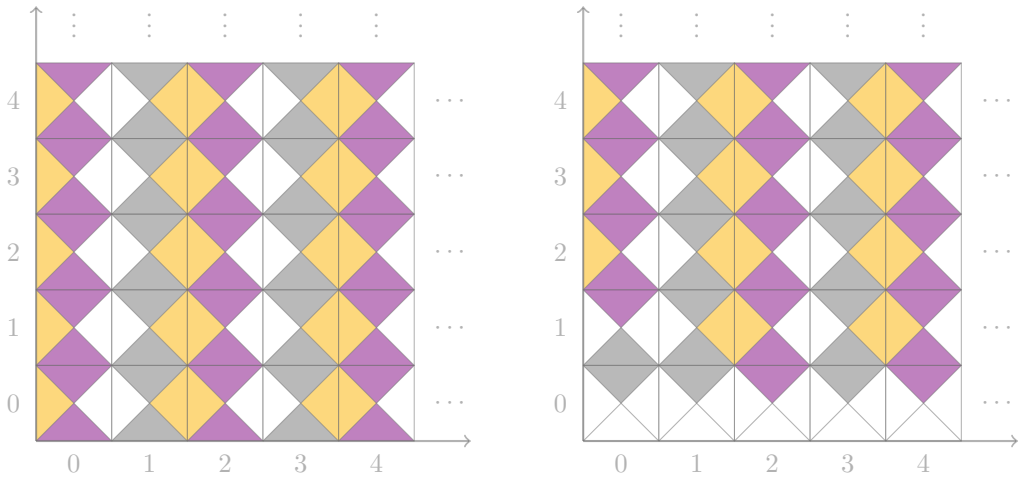


FIGURE 27. Deux pavages du plan possibles avec le catalogue C_{ex} de la figure 26.

Le but pour un catalogue C donné est de déterminer s'il est possible de couvrir le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en respectant les couleurs. On peut pour cela réutiliser les tuiles du catalogue, mais celles-ci ne peuvent pas être tournées. La figure 27 montre deux exemples de pavages possibles avec le catalogue de la figure 26. Formellement, un catalogue C est associé à deux relations binaires $H \subseteq C \times C$ de contraintes horizontales et $V \subseteq C \times C$ de contraintes verticales, où $(t, t') \in H$ si la couleur de droite de t est la même que la couleur de gauche de t' et $(t, t') \in V$ si la couleur du haut de t est la même que la couleur du bas de t'. Par exemple, pour le catalogue de la figure 26, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} H = \{&(t_0,t_0),(t_0,t_1),(t_0,t_2),(t_0,t_3),(t_1,t_0),(t_1,t_1),(t_1,t_2),(t_1,t_3),\\ &(t_2,t_0),(t_2,t_1),(t_2,t_2),(t_2,t_3),(t_3,t_4),(t_4,t_0),(t_4,t_1),(t_4,t_2),(t_4,t_3)\}\\ V = \{&(t_0,t_2),(t_0,t_3),(t_1,t_4),(t_2,t_4),(t_3,t_2),(t_3,t_3),(t_4,t_4)\} \end{aligned}$$

Un *pavage du plan par* C est alors une fonction $p\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$ telle que

(1) si $p(i,j) = t$ et $p(i+1,j) = t'$ alors $(t,t') \in H$ et
(2) si $p(i,j) = t$ et $p(i,j+1) = t'$ alors $(t,t') \in V$.

Le problème de décision correspondant est le suivant.

Problème (PAVAGE DU PLAN).
instance : un catalogue C et deux relations $H, V \subseteq C \times C$
question : est-ce qu'il existe un pavage du plan par C ?

Le problème de PAVAGE DU PLAN n'a pas de solution algorithmique.

Théorème 15.3 (BERGER et GUREVITCH-KORYAKOV). *Il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée un catalogue de tuiles C avec ses deux relations de contraintes horizontales H et de contraintes verticales V et répond s'il existe un pavage du plan.*

Modélisation en SMLT-LIB. Voyons comment modéliser le problème de PAVAGE DU PLAN comme un problème de satisfiabilité modulo une théorie. Nous commençons par déclarer un type énumératif pour le catalogue C et par définir les relations binaires H et V associées.

tiling-int.smt2

```
; déclaration du catalogue
(declare-datatypes () ((C t0 t1 t2 t3 t4)))
; les contraintes horizontales
(define-fun H ((s C)(t C)) Bool
  (ite (and (= s t0) (= t t0)) true
  (ite (and (= s t0) (= t t1)) true
  (ite (and (= s t0) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t0) (= t t3)) true
  (ite (and (= s t1) (= t t0)) true
  (ite (and (= s t1) (= t t1)) true
  (ite (and (= s t1) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t1) (= t t3)) true
  (ite (and (= s t2) (= t t0)) true
  (ite (and (= s t2) (= t t1)) true
  (ite (and (= s t2) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t2) (= t t3)) true
  (ite (and (= s t3) (= t t4)) true
  (ite (and (= s t4) (= t t0)) true
  (ite (and (= s t4) (= t t1)) true
  (ite (and (= s t4) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t4) (= t t3)) true
  false))))))))))))))))))))
; les contraintes verticales
(define-fun V ((s C)(t C)) Bool
  (ite (and (= s t0) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t0) (= t t3)) true
  (ite (and (= s t1) (= t t4)) true
  (ite (and (= s t2) (= t t4)) true
  (ite (and (= s t3) (= t t2)) true
  (ite (and (= s t3) (= t t3)) true
  (ite (and (= s t4) (= t t4)) true
  false))))))))
```

Il reste alors à définir la fonction de pavage p qui doit respecter les contraintes horizontales et verticales.

tiling-int.smt2

```
; la fonction p
(declare-fun p (Int Int) C)
(assert
  (forall ((i Int)(j Int))
    (=> (and (>= i 0) (>= j 0))
        (and (H (p i j) (p (+ i 1) j))
             (V (p i j) (p i (+ j 1)))))))
(check-sat-using (then qe smt))
(exit)
```

Sans surprise au vu du théorème de BERGER et GUREVITCH-KORYAKOV et sachant comment fonctionnent les solveurs SMT, Z3 n'arrive pas à résoudre ce problème et répond « unknown ».

Modélisation sans théorie. On peut aussi modéliser un problème de pavage comme un problème de satisfaction sans faire appel à une théorie sous-jacente. On utilise pour cela une relation binaire

non interprétée P_t pour chaque tuile $t \in C$ du catalogue; l'idée ici étant que $(x, y) \in P_t$ si $p(x, y) = t$. On écrit alors une formule close

$$\varphi_C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists x' \forall y . \varphi_1(x, y) \wedge \varphi_H(x, x', y) \wedge \varphi_V(x, x', y) \tag{54}$$

qui force les relations P_t à coder une fonction de pavage p en demandant que chaque position (x, y) soit associée à une unique tuile par

$$\varphi_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_{t \neq t'} \neg P_t(x, y) \vee \neg P_{t'}(x, y) \ , \tag{55}$$

en vérifiant les contraintes horizontales par

$$\varphi_H(x, x', y) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{(t,t') \in H} P_t(x, y) \wedge P_{t'}(x', y) \ , \tag{56}$$

et en vérifiant les contraintes verticales par

$$\varphi_V(x, x', y) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_{(t,t') \in V} P_t(y, x) \wedge P_{t'}(y, x') \ . \tag{57}$$

Proposition 15.4. *La formule φ_C est satisfiable si et seulement si on peut paver le plan avec les tuiles du catalogue C.*

Démonstration. Notons tout d'abord que la skolémisation de φ_C est la formule

$$\varphi'_C \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \forall y . \varphi_1(x, y) \wedge \varphi_H(x, f(x), y) \wedge \varphi_V(x, f(x), y)$$

où l'on a introduit un nouveau symbole de fonction unaire f. La formule φ'_C est équi-satisfiable avec φ, donc il suffit de montrer que φ'_C est satisfiable si et seulement si on pouvait paver le plan avec les tuiles du catalogue C.

Si on peut paver le plan par une fonction $p \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$, alors il existe une interprétation I telle que $I \vDash \varphi'_C$. On définit pour cela le domaine $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N}$ où f est interprétée comme la fonction successeur $f^I \colon n \mapsto n + 1$ et chaque P_t pour $t \in C$ est interprétée par la relation $P_t^I \stackrel{\text{def}}{=} \{(i, j) \mid p(i, j) = t\}$. La formule φ'_C est donc satisfiable dans ce cas.

Inversement, si φ'_C est satisfiable, alors il existe une interprétation I telle que $I \vDash \varphi'_C$. Par le théorème 13.13 de Herbrand, on peut supposer sans perte de généralité que I a pour domaine $D_I \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathcal{F})$ l'ensemble des termes clos sur l'ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F} = \{a^{(0)}, f^{(1)}\}$ et interprète a comme le terme constitué d'une feuille étiquetée par a et f comme la fonction $f^I \colon u \mapsto f(u)$ qui rajoute une nouvelle racine étiquetée par f au-dessus du terme u. On peut alors observer que $I \vDash \varphi'_C$ implique l'existence d'un pavage du plan $p \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C$ où $p(i, j) = t$ pour $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si et seulement si la paire de termes

$$\big(\underbrace{f(f(\cdots(f}_{i \text{ fois}}(a)\cdots)), \underbrace{f(f(\cdots(f}_{j \text{ fois}}(a)))\big)$$

appartient à l'interprétation P_t^I de P_t. □

On peut en déduire le corollaire suivant du théorème de Berger et Gurevitch-Koryakov – qui pouvait aussi se déduire du théorème 14.15 de Turing et Church puisque φ est valide si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas satisfiable.

Corollaire 15.5 (indécidabilité de la satisfiabilité)**.** *Il n'existe pas d'algorithme qui prend en entrée une formule φ et retourne si oui ou non φ est satisfiable.*

Cette autre modélisation peut aussi être écrite en SMT-LIB comme suit.

tiling.smt2

```
; on appelle notre domaine D
(declare-sort D)
```

```
; on déclare une relation binaire non interprétée par tuile du catalogue
(declare-fun P0 (D D) Bool)
(declare-fun P1 (D D) Bool)
(declare-fun P2 (D D) Bool)
(declare-fun P3 (D D) Bool)
(declare-fun P4 (D D) Bool)
; équation (54) : au plus une tuile par position
(define-fun phi1 ((x D) (y D)) Bool
  (and (not (and (P0 x y) (P1 x y)))
       (not (and (P0 x y) (P2 x y)))
       (not (and (P0 x y) (P3 x y)))
       (not (and (P0 x y) (P4 x y)))
       (not (and (P1 x y) (P0 x y)))
       (not (and (P1 x y) (P2 x y)))
       (not (and (P1 x y) (P3 x y)))
       (not (and (P1 x y) (P4 x y)))
       (not (and (P2 x y) (P0 x y)))
       (not (and (P2 x y) (P1 x y)))
       (not (and (P2 x y) (P3 x y)))
       (not (and (P2 x y) (P4 x y)))
       (not (and (P3 x y) (P0 x y)))
       (not (and (P3 x y) (P1 x y)))
       (not (and (P3 x y) (P2 x y)))
       (not (and (P3 x y) (P4 x y)))
       (not (and (P4 x y) (P0 x y)))
       (not (and (P4 x y) (P1 x y)))
       (not (and (P4 x y) (P2 x y)))
       (not (and (P4 x y) (P3 x y)))))
; équation (55) : les contraintes horizontales
(define-fun phiH ((x D) (xp D) (y D)) Bool
  (or (and (P0 x y) (P0 xp y))
      (and (P0 x y) (P1 xp y))
      (and (P0 x y) (P2 xp y))
      (and (P0 x y) (P3 xp y))
      (and (P1 x y) (P0 xp y))
      (and (P1 x y) (P1 xp y))
      (and (P1 x y) (P2 xp y))
      (and (P1 x y) (P3 xp y))
      (and (P2 x y) (P0 xp y))
      (and (P2 x y) (P1 xp y))
      (and (P2 x y) (P2 xp y))
      (and (P2 x y) (P3 xp y))
      (and (P3 x y) (P4 xp y))
      (and (P4 x y) (P0 xp y))
      (and (P4 x y) (P1 xp y))
      (and (P4 x y) (P2 xp y))
      (and (P4 x y) (P3 xp y))))
; équation (56) : les contraintes verticales
(define-fun phiV ((x D) (xp D) (y D)) Bool
  (or (and (P0 y x) (P2 y xp))
      (and (P0 y x) (P3 y xp))
      (and (P1 y x) (P4 y xp))
      (and (P2 y x) (P4 y xp))
      (and (P3 y x) (P2 y xp))
      (and (P3 y x) (P3 y xp))
```

```
      (and (P4 y x) (P4 y xp))))
; la formule complète (53)
(assert
  (forall ((x D))
    (exists ((xp D))
      (forall ((y D))
        (and (phi1 x y) (phiH x xp y) (phiV x xp y))))))
(check-sat-using (then qe smt))
(exit)
```

16. Calcul des séquents

Résumé. Le *calcul des séquents* est un système de déduction qui manipule des séquents $\vdash \Gamma$, où Γ est un multi-ensemble fini de formules sous forme normale négative. Un séquent $\vdash \Gamma$ pour lequel il existe une dérivation dans le système de preuve est dit *prouvable*, ce qui est noté « $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ ».

Un séquent $\vdash \Gamma$ est *valide*, si pour toute interprétation I, il existe une formule $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ du séquent telle que $I \vDash \vartheta$. Par le théorème 16.5 de *correction*, si $\vdash \Gamma$ est prouvable, alors il est valide. Inversement, par le théorème 16.17 de *complétude*, si $\vdash \Gamma$ est valide, alors il est prouvable, et même prouvable par une preuve qui n'utilise pas la règle de coupure (cut).

Le calcul des séquents peut être enrichi par des règles *admissibles*, telles que si toutes les prémisses de la règle sont prouvables, alors sa conclusion l'est aussi ; voir la figure 29. Ces résultats sont démontrés de manière « syntaxique », c'est-à-dire par manipulation des dérivations ; un résultat majeur de ce type est le théorème 16.19 d'*élimination des coupures*.

(Duparc, 2015, sec. 12.3), (David, Nour et Raffalli, 2003, ch. 5), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, fig. 6.2) pour le calcul des séquents. Voir (ibid., sec. 6.3) pour un système de preuve à la Hilbert, et (David, Nour et Raffalli, 2003, sec 1.3) et (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, fig. 2.2 et 6.1) pour des systèmes de déduction naturelle.

*Le calcul de la figure 28 ne contient ni la règle structurelle d'*échange*, qui est implicite parce que nous travaillons avec des multi-ensembles, ni la règle structurelle d'*affaiblissement*, qui est implicite dans la règle d'axiome* (ax) *(c.f. lemme 16.8), ni la règle structurelle de* contraction*, qui est implicite dans la règle de l'existentielle* ($\exists$) *(c.f. lemme 16.12). La règle* (ax) *est souvent présentée sous une forme plus générale (c.f. lemme 16.9).*

Nous allons étendre le calcul des séquents propositionnel $\mathbf{LK}_0$ de la section 8.1 à la logique du premier ordre. Comme dans la section 8.1, nous allons travailler sur des séquents monolatères $\vdash \Gamma$ où Γ est un multi-ensemble fini de formules en forme normale négative, mais maintenant de formules du premier ordre plutôt que de formules propositionnelles.

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \ell, \overline{\ell}}\ (\mathsf{ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Delta, \overline{\varphi}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\mathsf{cut})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \quad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi}\ (\forall) \quad \text{où } y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x.\varphi}{\vdash \Gamma, \exists x.\varphi}\ (\exists) \quad \text{où } t \in T(\mathcal{F}, X)$$

Figure 28. Calcul des séquents monolatère.

La notion de variable libre est étendue aux multi-ensembles de formules : $\mathrm{fv}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)} \mathrm{fv}(\varphi)$. On note le séquent vide $\vdash \bot$, où $\bot(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ pour toute formule φ. Une règle du calcul des séquents permet de déduire un séquent *conclusion* d'un nombre fini de séquents *prémisses*. Chaque règle excepté la règle de coupure comprend une *formule principale* dans sa conclusion, indiquée en orange dans les règles de la figure 28 ; la règle (cut) élimine une *formule de coupure* indiquée

en violet. Un séquent $\vdash \Gamma$ est *prouvable*, noté $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$, s'il en existe une dérivation dans le système de la figure 28.

Exemple 16.1. La formule du buveur de l'exemple 13.1 est prouvable. Une dérivation possible du séquent correspondant (avec la formule principale indiquée en orange à chaque étape) est :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B(x), B(y), \neg B(y), \forall y.B(y), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\text{ax})}{\vdash \neg B(x), B(y), \neg B(y) \vee \forall y.B(y), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\vee)}{\vdash \neg B(x), B(y), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\exists)}{\vdash \neg B(x), \forall y.B(y), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\forall)}{\vdash \neg B(x) \vee \forall y.B(y), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\vee)}{\vdash \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y.B(y))}\,(\exists)$$

Remarque 16.2. La condition $y \notin \text{fv}(\Gamma)$ dans la définition de la règle $(\forall)$ est nécessaire pour la correction du calcul des séquents. Sinon, on pourrait dériver

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B(x), \neg B(x)}\,(\text{ax})}{\vdash \forall x.B(x), \neg B(x)}\,(\forall)}{\vdash \forall x.B(x), \forall x.\neg B(x)}\,(\forall)}{\vdash (\forall x.B(x)) \vee (\forall x.\neg B(x))}\,(\vee)$$

où l'étape en pointillés est incorrecte. Cette formule n'est cependant pas valide : par exemple $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ avec $B^I \stackrel{\text{def}}{=} \{a\}$ en fournit un contre-modèle puisque d'une part $I, [b/x] \not\models B(x)$ et donc $I \not\models \forall x.B(x)$, et d'autre part $I, [a/x] \not\models \neg B(x)$ et donc $I \not\models \forall x.\neg B(x)$.

Remarque 16.3. La condition $y \notin \text{fv}(\forall x.\varphi)$ dans la définition de la règle $(\forall)$ est nécessaire pour la correction du calcul des séquents. Sinon, comme $(B(x) \vee \neg B(y))[y/x] = B(y) \vee \neg B(y)$, on pourrait dériver

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B(y), \neg B(y)}\,(\text{ax})}{\vdash B(y) \vee \neg B(y)}\,(\vee)}{\vdash \forall x.B(x) \vee \neg B(y)}\,(\forall)}{\vdash \forall y \forall x.B(x) \vee \neg B(y)}\,(\forall)$$

où l'avant-dernière étape est incorrecte. Cette formule n'est cependant pas valide : par exemple $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ avec $B^I \stackrel{\text{def}}{=} \{a\}$ en fournit un contre-modèle puisque $I, [a/y, b/x] \not\models B(x) \vee \neg B(y)$.

Exemple 16.4. Voici un exemple plus compliqué. On souhaite montrer que la formule (21) $\forall x \exists y \forall z.x < y \wedge \neg(x < z \wedge z < y)$ n'appartient pas à $\text{Th}(A_{oldns})$ la théorie des ordres linéaires denses non bornés de la section 14.2.1. Pour cela, nous allons montrer que la formule de densité implique la négation de la formule (21). Concrètement, cela signifie que nous allons montrer que la formule

$$\big(\forall x \forall y \exists z.(x < y) \Rightarrow (x < z \wedge z < y)\big) \Rightarrow \neg\big(\forall x \exists y \forall z.x < y \wedge \neg(x < z \wedge z < y)\big)$$

est prouvable (et donc valide par le théorème 16.5 de correction que nous verrons en section 16.1). La première étape est de mettre cette formule sous forme normale négative ; on obtient la formule équivalente :

$$\big(\exists x \exists y \forall z.x < y \wedge (\neg x < z \vee \neg z < y)\big) \vee \big(\exists x \forall y \exists z.\neg x < y \vee (x < z \wedge z < y)\big)\ .$$

Dans la dérivation ci-dessous, on note par souci de lisibilité :

$\varphi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists y \forall z.x < y \wedge (\neg x < z \vee \neg z < y)$, $\quad \varphi_1'(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall z.x < y \wedge (\neg x < z \vee \neg z < y)$,

$\varphi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y \exists z.\neg x < y \vee (x < z \wedge z < y)$, $\quad \varphi_2'(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \neg x < y \vee (x < z \wedge z < y)$,

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \exists x.\varphi_1(x), \exists y.\varphi_1'(x,y), \exists z.\varphi_2'(x,y,z), \exists x.\varphi_2(x)\ .$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Gamma, x<y, \neg x<y, x<z\wedge z<y}\,(\text{ax})}{\vdash \Gamma, x<y\wedge(\neg x<z\vee\neg z<y), \neg x<y, x<z\wedge z<y}\,(\vee)}{\vdash \Gamma, x<y\wedge(\neg x<z\vee\neg z<y), \neg x<y\vee(x<z\wedge z<y)}\,(\vee)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists y.\varphi_1'(x,y), x<y\wedge(\neg x<z\vee\neg z<y), \exists z.\varphi_2'(x,y,z), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists y.\varphi_1'(x,y), \forall z.x<y\wedge(\neg x<z\vee\neg z<y), \exists z.\varphi_2'(x,y,z), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\forall)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists y.\varphi_1'(x,y), \exists z.\varphi_2'(x,y,z), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \varphi_1(x), \forall y\exists z.\varphi_2'(x,y,z), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\forall)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \varphi_1(x), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists)}{\vdash (\exists x.\varphi_1(x))\vee(\exists x.\varphi_2(x))}\,(\vee)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Gamma, \neg x<z, \neg z<y, \neg x<y, x<z}\,(\text{ax}) \qquad \dfrac{}{\vdash \Gamma, \neg x<z, \neg z<y, \neg x<y, z<y}\,(\text{ax})}{\vdash \Gamma, \neg x<z, \neg z<y, \neg x<y, x<z\wedge z<y}\,(\wedge)}{\vdash \Gamma, \neg x<z\vee\neg z<y, \neg x<y, x<z\wedge z<y}\,(\vee)$$

16.1. **Correction.** Un séquent $\vdash \Gamma$ *satisfait* une interprétation I sous une valuation ρ, noté $I, \rho \vDash \Gamma$, s'il existe une formule $\vartheta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ telle que $I, \rho \vDash \vartheta$; la formule ϑ en question est appelée *formule témoin*. Un séquent $\vdash \Gamma$ est *valide*, noté $\vDash \Gamma$, si $I, \rho \vDash \Gamma$ pour tous I et ρ. La *correction* d'un système de preuve consiste à montrer que toute formule prouvable est valide.

Théorème 16.5 (correction). *Si* $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$, *alors* $\vDash \Gamma$.

Démonstration. On procède par induction structurelle sur une dérivation de $\vdash \Gamma$, en montrant pour chaque règle du calcul des séquents que si les prémisses sont valides, alors la conclusion l'est aussi. On ne traitera ici que les règles de quantification, les autres cas ayant été traités dans la démonstration du théorème 8.9 de correction du calcul des séquents propositionnel.

Pour (∀) : supposons la prémisse $\vdash \Gamma, \varphi[y/x]$ valide pour $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$. Prenons (I, ρ) arbitraire et montrons que $I, \rho \vDash \Gamma, \forall x.\varphi$.

Comme la prémisse est valide, pour tout $e \in D_I$, $I, \rho[e/y] \vDash \Gamma, \varphi[y/x]$, donc il existe une formule témoin $\vartheta_e \in \mathrm{dom}(\Gamma) \cup \{\varphi[y/x]\}$ telle que $I, \rho[e/y] \vDash \vartheta_e$

S'il existe $e \in D_I$ tel que $\vartheta_e \in \mathrm{dom}(\Gamma)$, alors comme $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma)$ et donc $y \notin \mathrm{fv}(\vartheta_e)$, par la propriété 11.1, on a aussi $I, \rho \vDash \vartheta_e$. Donc $I, \rho \vDash \Gamma, \forall x.\varphi$.

Sinon, $\vartheta_e = \varphi[y/x]$ pour tout $e \in D_I$, c'est-à-dire $I, \rho[e/y] \vDash \varphi[y/x]$ pour tout $e \in D_I$, et donc $I, \rho \vDash \forall x.\varphi$. Donc $I, \rho \vDash \Gamma, \forall x.\varphi$.

Pour (∃) : supposons la prémisse valide. Prenons (I, ρ) arbitraire et montrons que $I, \rho \vDash \Gamma, \exists x.\varphi$.

Si la formule témoin de $I, \rho \vDash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x.\varphi$ est dans $\{\exists x.\varphi\} \cup \mathrm{dom}(\Gamma)$, alors elle peut aussi servir de témoin pour $I, \rho \vDash \Gamma, \exists x.\varphi$. Si la formule témoin est $\varphi[t/x]$, c'est-à-dire si $I, \rho \vDash \varphi[t/x]$, alors $I, \rho[[\![t]\!]^I_\rho/x] \vDash \varphi$ par le lemme 12.5, et donc $I, \rho \vDash \exists x.\varphi$, qui peut servir de témoin pour $I, \rho \vDash \Gamma, \exists x.\varphi$. □

16.2. * **Règles admissibles.** Le calcul des séquents de la figure 28 peut être enrichi par plusieurs règles *admissibles*, qui n'affectent pas la prouvabilité, et récapitulées dans la figure 29 ci-dessous. Les preuves en sont établies *syntaxiquement*, par manipulation des dérivations, et préfigurent les techniques employées pour l'élimination des coupures que nous verrons en section 16.4.

On définit la *profondeur* $p(\pi)$ d'une dérivation π dans le calcul des séquents comme celle de l'arbre sous-jacent.

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Delta}\ (=_\alpha) \quad \text{où } \Gamma =_\alpha \Delta \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\sigma}\ (\mathsf{S}) \quad \text{où } \sigma \text{ est une substitution} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\mathsf{W}) \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}}\ (\mathsf{ax}')$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathsf{C}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}\ (\mathsf{E}_\vee) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathsf{E}^1_\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}{\vdash \Gamma, \psi}\ (\mathsf{E}^2_\wedge)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi}{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}\ (\mathsf{E}_\forall) \quad \text{où } y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \exists x.\varphi}{\vdash \Gamma, \varphi[t/x], \exists x.\varphi}\ (\mathsf{E}_\exists) \quad \text{où } t \in T(\mathcal{F}, X)$$

FIGURE 29. Quelques règles admissibles du calcul des séquents.

16.2.1. *α-congruence syntaxique.* Commençons par étendre l'α-congruence aux multi-ensembles : si $\varphi_i =_\alpha \psi_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\varphi_1, \dots, \varphi_n =_\alpha \psi_1, \dots, \psi_n$. Le lemme suivant montre l'admissibilité de la règle $(=_\alpha)$.

Lemme 16.6 (α-congruence syntaxique)**.** *Si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ par une dérivation π, alors pour tout multi-ensemble $\Delta =_\alpha \Gamma$, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Delta$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)$ et sans coupure si π était sans coupure.*

Démonstration. On montre que si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi$ par une dérivation π, alors pour toute formule $\psi =_\alpha \varphi$, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \psi$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)$ et sans coupure si π était sans coupure, ce qui démontrera le lemme par induction sur la taille du séquent.

On procède pour cela par récurrence sur la profondeur de la dérivation π de $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi$. On opère à une distinction de cas selon la dernière règle appliquée dans la dérivation π.

Si π se termine par une règle (R) autre que (cut) où φ n'est pas principale, alors par inspection des règles, on est nécessairement dans une situation

$$\frac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\mathrm{R})$$

où $0 \leq k \leq 2$ ($k = 0$ correspondant au cas de la règle (ax)). Pour tout $1 \leq i \leq k$, par hypothèse de récurrence sur π_i, il existe une dérivation π'_i de $\vdash \Gamma_i, \psi$ de profondeur $p(\pi_i)$ et sans (cut) si π_i était sans (cut). On a donc la dérivation

$$\frac{\begin{array}{ccc}\pi'_1 & & \pi'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \psi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \psi}\ (\mathrm{R})$$

Si π se termine par une règle (cut), alors sans perte de généralité, on est dans une situation

$$\frac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi, \theta & \vdash \Delta, \overline{\theta}\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \varphi}\ (\mathrm{cut})$$

(l'autre situation étant celle où φ apparaissait dans la seconde prémisse). Par hypothèse de récurrence sur π_1, il existe une dérivation π'_1 de $\vdash \Gamma, \psi, \theta$ de profondeur $p(\pi_1)$, et on a donc la dérivation

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1' & \pi_2\\ \vdots & \vdots\\ \vdash \Gamma, \psi, \theta & \vdash \Delta, \overline{\theta}\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \psi}\ (\text{cut})$$

Il reste à traiter les cas où φ était principale dans la dernière règle appliquée par π. On procède par induction sur la congruence $\varphi =_\alpha \psi$. Les cas de la réflexivité, de la symétrie, et de la transitivité de $=_\alpha$ sont triviaux.

Cette preuve serait beaucoup plus difficile si (ax) *était remplacé par* (ax′) *: avec* (ax)*, $\ell =_\alpha \ell'$ si et seulement si $\ell = \ell'$ et est donc traité par le cas de la réflexivité ; avec* (ax′)*, chacun des cas ci-dessous peut provenir d'une application de l'axiome étendu.*

Cas de la congruence pour $\vee$: alors $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ et $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$ avec $\varphi_1 =_\alpha \psi_1$ et $\varphi_2 =_\alpha \psi_2$. Comme φ est principale la dernière règle appliquée dans π était ($\vee$), et donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi_1, \varphi_2$ par une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$. Par hypothèse de récurrence, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \psi_1, \varphi_2$ par une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$, et par une seconde application de l'hypothèse de récurrence, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \psi_1, \psi_2$ par une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$. Par une application de ($\vee$), $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \psi_1 \vee \psi_2$.

Autres cas de congruence : similaires au cas précédent.

Cas de l'α-renommage pour $\forall$: alors $\varphi = \forall x.\varphi'$ et $\psi = \forall z.\varphi'[z/x]$ où $z \notin \mathrm{fv}(\forall x.\varphi')$ et $[z/x]$ est applicable à φ'. Comme φ est principale, la dernière règle appliquée dans π était ($\forall$), et donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi'[y/x]$ pour une variable $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi')$ par une dérivation π' de profondeur $p(\pi) - 1$. Par l'équation (29), $\varphi'[y/x] =_\alpha \varphi'[z/x][y/z]$ puisque $z \notin \mathrm{fv}(\varphi')$. Par hypothèse de récurrence sur π', $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi'[z/x][y/z]$ par une dérivation de profondeur $p(\pi')$. Comme $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \varphi'[z/x][y/z])$, on peut appliquer ($\forall$) et dériver $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \forall z.\varphi'[z/x]$.

Cas de l'α-renommage pour $\exists$: alors $\varphi = \exists x.\varphi'$ et $\psi = \exists z.\varphi'[z/x]$ où $z \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi')$ et $[z/x]$ est applicable à φ'. Comme φ est principale,la dernière règle appliquée dans π était ($\exists$), et donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi'[t/x]$ pour un terme $t \in T(\mathcal{F}, X)$ par une dérivation π' de profondeur $p(\pi) - 1$. Par l'équation (29), $\varphi'[t/x] =_\alpha \varphi'[z/x][t/z]$ puisque $z \notin \mathrm{fv}(\varphi')$. Par hypothèse de récurrence sur π', $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi'[z/x][t/z]$ par une dérivation de profondeur $p(\pi')$. Par une application de ($\exists$), $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \exists z.\varphi'[z/x]$. □

16.2.2. *Substitution syntaxique.* Une substitution σ est *applicable* à un multi-ensemble Γ si elle est applicable à chacune des formules de $\mathrm{dom}(\Gamma)$. Si c'est le cas, on définit l'application d'une substitution σ à $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ comme une application simultanée de σ à toutes les occurrences de formules dans Γ : $\Gamma\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1\sigma, \ldots, \varphi_n\sigma$. Comme d'habitude, nous faisons un abus de notation et nous écrivons « $\Gamma\sigma$ » pour un multi-ensemble $\Delta\sigma$ tel que $\Delta =_\alpha \Gamma$ et que σ soit applicable à Δ. Le lemme suivant montre l'applicabilité de la règle (S).

Lemme 16.7 (substitution syntaxique)**.** *Si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ par une dérivation π, alors pour toute substitution σ, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma\sigma$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)$ et sans coupure si π était sans coupure.*

Démonstration. Par le lemme 16.6 d'α-congruence syntaxique, on peut supposer σ applicable à Γ. On procède par récurrence sur la profondeur de la dérivation π de $\vdash \Gamma$. Considérons pour cela la dernière règle employée dans cette dérivation.

Cas de (ax) : alors $\Gamma = \Gamma', \ell, \overline{\ell}$. Par la propriété 13.4, $\overline{\ell\sigma} = (\overline{\ell})\sigma$ et (ax) permet aussi de dériver le séquent $\vdash \Gamma'\sigma, \ell\sigma, (\overline{\ell})\sigma$ en une étape.

Cas de (cut) : alors $\Gamma = \Gamma', \Delta$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma', \varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \overline{\varphi}, \Delta$ pour une formule φ. Par hypothèse de récurrence, on obtient des dérivations de même profondeur de $\vdash \Gamma'\sigma, \varphi\sigma$ et de $\vdash (\overline{\varphi})\sigma, \Delta\sigma$, et la propriété 13.4 montre que l'on peut appliquer (cut) pour obtenir une dérivation de profondeur $p(\pi)$ de $\vdash \Gamma'\sigma, \Delta\sigma$.

Cas de ($\vee$) et ($\wedge$) : similairement par hypothèse de récurrence.

Cas de (∀) **:** alors $\Gamma = \Gamma', \forall x.\varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma', \varphi[y/x]$ où $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall x.\varphi)$ par une dérivation π' de profondeur $p(\pi) - 1$.

Par hypothèse de récurrence sur π', on a une dérivation de même profondeur $p(\pi)-1$ du séquent $\vdash \Gamma'[z/y]\sigma[u/z], \varphi[y/x][z/y]\sigma[u/z]$ où on a choisi $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma'\sigma, \forall x.\varphi) \cup \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{rv}_\varphi(\sigma)$ et $u \notin \mathrm{fv}(\Gamma'\sigma, \forall z.\varphi[z/x]\sigma)$ tels que les substitutions soient applicables. Comme $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma')$, $\Gamma'[z/y] =_\alpha \Gamma'$ par l'équation (28), et comme $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma'\sigma)$, de même $\Gamma'\sigma[u/z] =_\alpha \Gamma'\sigma$. Comme $y \notin \mathrm{fv}(\forall x.\varphi)$, par l'équation (29), $\varphi[y/x][z/y]\sigma[u/z] =_\alpha \varphi[z/x]\sigma[u/z]$. Par le lemme d'$\alpha$-congruence syntaxique, on a donc une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$ de $\vdash \Gamma'\sigma, \varphi[z/x]\sigma[u/z]$. Comme $u \notin \mathrm{fv}(\Gamma'\sigma, \forall z.\varphi[y/x][z/y]\sigma)$, on peut appliquer (∀) pour obtenir une dérivation de profondeur $p(\pi)$ de $\vdash \Gamma'\sigma, \forall z.(\varphi[z/x]\sigma)$.

Finalement, comme $z \notin \mathrm{fv}(\forall x.\varphi)$, par α-renommage $(\forall x.\varphi)\sigma =_\alpha (\forall z.\varphi[z/x])\sigma = \forall z.(\varphi[z/x]\sigma)$ où σ est applicable puisque $z \notin \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{rv}_\varphi(\sigma)$. Par le lemme 16.6 d'$\alpha$-congruence syntaxique, on a donc une dérivation de profondeur $p(\pi)$ de $\vdash \Gamma'\sigma, (\forall x.\varphi)\sigma$.

Cas de (∃) **:** alors $\Gamma = \Gamma', \exists x.\varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma', \varphi[t/x]$ par π' de profondeur $p(\pi) - 1$.

Par hypothèse de récurrence sur π', on a une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$ du séquent $\vdash \Gamma'\sigma, \varphi[t/x]\sigma$. Observons que si on choisit $z \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi) \cup \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{rv}_\varphi(\sigma)$, alors $\varphi[z/x]\sigma[t\sigma/z] =_\alpha \varphi[t/x]\sigma$. Par le lemme d'$\alpha$-congruence syntaxique, on a une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$ de $\vdash \Gamma'\sigma, \varphi[z/x]\sigma[t\sigma/z]$. On peut alors appliquer (∃) pour dériver $\vdash \Gamma'\sigma, \exists z.(\varphi[z/x]\sigma)$. Comme $z \notin \mathrm{fv}(\exists x.\varphi)$, $\exists z.(\varphi[z/x]\sigma) =_\alpha (\exists x.\varphi)\sigma$ et donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma'\sigma, (\exists x.\varphi)\sigma$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)$ par une autre application du lemme d'α-congruence syntaxique. □

16.2.3. *Affaiblissement.* Bien que le système de la figure 28 ne comporte pas de manière explicite la règle d'affaiblissement (notée (W) pour « *weakening* »), celle-ci est admissible.

Lemme 16.8 (affaiblissement). *Si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ par une dérivation π, alors pour tout multi-ensemble Δ, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \Delta$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)$ et sans coupure si π était sans coupure.*

(David, Nour et Raffalli, 2003, lem. 7.3.1), (Goubault-Larrecq et Mackie, 1997, lem. 2.31).

Démonstration. Par récurrence sur la profondeur de la dérivation de $\vdash \Gamma$, on ajoute systématiquement Δ à tous les séquents. On fait pour cela une distinction de cas selon la dernière règle employée dans la dérivation π.

Cas de (**ax**) **:** alors $\Gamma = \Gamma', \ell, \overline{\ell}$ et on a aussi une dérivation de $\vdash \Gamma', \ell, \overline{\ell}, \Delta$ par (ax).

Cas de (∀) **:** alors $\Gamma = \Gamma', \forall x.\varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma', \varphi[y/x]$ par une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$ où $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall x.\varphi)$.

Soit $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall x.\varphi, \Delta)$. Par le lemme 16.7, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma'[z/y], \varphi[y/x][z/y]$ par une dérivation de profondeur $p(\pi) - 1$. Comme $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma')$, par l'équation (28), $\Gamma'[z/y] =_\alpha \Gamma'$, et comme $y \notin \mathrm{fv}(\forall x.\varphi)$, par l'équation (29), $\varphi[y/x][z/y] =_\alpha \varphi[z/x]$. Par le lemme 16.6 d'$\alpha$-congruence syntaxique on peut donc dériver $\vdash \Gamma', \varphi[z/x]$. Par hypothèse de récurrence, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma', \varphi[z/x], \Delta$ par une dérivation de profondeur $p(\pi)-1$, et comme $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi, \Delta)$, une application de (∀) permet de dériver $\vdash \Gamma', \forall x.\varphi, \Delta$.

Les autres cas découlent aisément de l'hypothèse de récurrence. □

16.2.4. *Axiome étendu.* Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'admissibilité de la règle d'axiome étendu (ax′). Cet axiome étendu est usuellement employé à la place de (ax) – qu'il subsume – dans les calculs des séquents de la littérature (David, Nour et Raffalli, 2003 ; Goubault-Larrecq et Mackie, 1997).

Lemme 16.9 (axiome étendu). *Pour tout multi-ensemble Γ et toute formule φ, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $p(\varphi)$.

Cas de base ℓ : C'est immédiat par une application de l'axiome (ax).

Cas de $\varphi \wedge \psi$: Alors $\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}$. Par hypothèse de récurrence, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}$ par une dérivation π_1 et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \psi, \overline{\psi}$ par une dérivation π_2. On a donc la dérivation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \varphi, \overline{\varphi}, \overline{\psi}}\,(\mathsf{W}) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \psi, \overline{\psi}\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \psi, \overline{\psi}, \overline{\varphi}}\,(\mathsf{W})}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi, \overline{\varphi}, \overline{\psi}}\,(\wedge)}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi, \overline{\varphi} \vee \overline{\psi}}\,(\vee)$$

Cas de $\varphi \vee \psi$: Similaire au cas précédent.

Cas de $\forall x.\varphi$: Alors $\overline{\forall x.\varphi} = \exists x.\overline{\varphi}$. Par hypothèse de récurrence et la propriété 13.4, on a $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi[y/x], \overline{\varphi}[y/x]$ pour $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$ par une dérivation π. On a donc la dérivation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi[y/x], \overline{\varphi}[y/x]\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \varphi[y/x], \overline{\varphi}[y/x], \exists x.\overline{\varphi}}\,(\mathsf{W})}{\vdash \Gamma, \varphi[y/x], \exists x.\overline{\varphi}}\,(\exists)}{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi, \exists x.\overline{\varphi}}\,(\forall)$$

Cas de $\exists x.\varphi$: Similaire au cas précédent. □

Exemple 16.10. Reprenons la dérivation de l'exemple 16.4. Celle-ci devient très simple quand on utilise la règle (ax′) puisque $\varphi_1(x) = \overline{\varphi_2(x)}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\mathsf{ax}')}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \varphi_1(x), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists)}{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists x.\varphi_2(x)}\,(\exists) \qquad \dfrac{\vdash \exists x.\varphi_1(x), \exists x.\varphi_2(x)}{\vdash (\exists x.\varphi_1(x)) \vee (\exists x.\varphi_2(x))}\,(\vee)$$

16.2.5. *Inversibilité.* Une règle de déduction est *inversible* si, quand il existe une dérivation (que l'on supposera sans coupure grâce au théorème 16.19 d'élimination des coupures) de son séquent conclusion, alors il existe une dérivation sans coupure de chacun de ses séquents prémisses. La règle (ax) est bien sûr inversible, mais ce qui est plus intéressant, c'est que toutes les autres règles sauf (cut) le sont aussi. Cela signifie que dans une recherche de preuve sans coupure, on peut appliquer ces règles de manière « gloutonne » sans faire de *backtrack* – donc sans avoir à mémoriser de points de choix – et que si l'on arrive à un séquent pour lequel aucune règle ne s'applique, alors c'est qu'il n'y a *pas* de preuve. Cela démontre aussi l'admissibilité des règles d'élimination ($\mathsf{E}_\vee$), ($\mathsf{E}^1_\wedge$), ($\mathsf{E}^2_\wedge$), ($\mathsf{E}_\forall$) et ($\mathsf{E}_\exists$) de la figure 29.

Lemme 16.11 (inversibilité)**.** *Les règles du calcul des séquents sauf* (cut) *sont inversibles.*

Démonstration. On ne traite ici que les règles ($\exists$) et ($\forall$), les autres étant traitées dans la démonstration du lemme 8.7 d'inversibilité syntaxique du calcul des séquents propositionnel.

Pour la règle ($\exists$) **:** s'il y a une preuve sans coupure de $\vdash \Gamma, \exists x.\varphi$, alors par affaiblissement il en existe aussi une de $\vdash \Gamma, \exists x.\varphi, \varphi[t/x]$.

Pour la règle ($\forall$) **:** soit π une dérivation sans coupure du séquent $\vdash \Gamma, \forall x.\varphi$. On montre par récurrence sur la profondeur de π que pour toute variable $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi[y/x]$.

— Si π se termine par ($\forall$) où $\forall x.\varphi$ est principale, alors évidemment il existe une sous-dérivation de π de la prémisse $\vdash \Gamma, \varphi[z/x]$ pour une certaine variable $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$. Par le lemme 16.7 de substitution syntaxique, il existe aussi une dérivation du séquent

$\vdash \Gamma[y/z], \varphi[z/x][y/z]$ pour tout $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$, et comme $z \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$, par les équations (28) et (29) ce dernier séquent est α-congruent à $\vdash \Gamma, \varphi[y/x]$ et est dérivable par le lemme d'α-congruence syntaxique.

— Si π se termine par (∀) où $\forall x.\varphi$ n'est pas principale, alors $\Gamma = \Gamma', \forall z.\psi$ et on a la dérivation

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma', \psi[v/z], \forall x.\varphi\end{array}}{\vdash \Gamma', \forall z.\psi, \forall x.\varphi}\ (\forall)$$

où $v \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall z.\psi, \forall x.\varphi)$.
On prend une variable fraîche $w \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \psi[v/z], \forall x.\varphi)$; par hypothèse de récurrence appliquée à π', il existe une dérivation de $\vdash \Gamma', \psi[v/z], \varphi[w/x]$.
Comme $v \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall z.\psi, \varphi[w/x])$, on peut appliquer (∀) avec $\forall z.\psi$ comme formule principale pour obtenir $\vdash \Gamma', \forall z.\psi, \varphi[w/x]$.
Par le lemme de substitution syntaxique, pour toute variable $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall z.\psi, \forall x.\varphi)$ on a donc aussi une dérivation du séquent $\vdash \Gamma'[y/w], (\forall z.\psi)[y/w], \varphi[w/x][y/w]$. Comme $w \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \psi[v/z], \forall x.\varphi)$, $w \notin \mathrm{fv}(\Gamma', \forall z.\psi, \forall x.\varphi)$ et donc par les équations (28) et (29) ce dernier séquent est α-congruent à $\vdash \Gamma', \forall z.\psi, \varphi[y/x]$ et est dérivable par le lemme d'α-congruence syntaxique.

— Sinon π se termine par une règle (R) autre que (∀) où $\forall x.\varphi$ n'est pas principale. Par inspection des règles, on est nécessairement dans une situation

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \forall x.\varphi\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\pi_k \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_k, \forall x.\varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi}\ (\mathrm{R})$$

où $0 \leq k \leq 2$ ($k = 0$ correspondant au cas de la règle (ax)). Pour tout $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$ et tout $1 \leq i \leq k$, par hypothèse de récurrence sur π_i, il existe une dérivation sans coupure π_i' de $\vdash \Gamma_i, \varphi[y/x]$. On a donc la dérivation

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi[y/x]\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\pi_k' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_k, \varphi[y/x]\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}\ (\mathrm{R})$$

□

16.2.6. *Contraction.* L'admissibilité de la règle (C) est un peu plus délicate à démontrer, et nous allons utiliser une stratégie de démonstration similaire à celle de l'élimination des coupures. Le lemme suivant, combiné au théorème 16.19, montre son admissibilité.

💬 *L'intérêt de définir le calcul des séquents sans la règle de contraction est bien sûr de diminuer le nombre de règles. Mais cela simplifie aussi la preuve de l'élimination des coupures, qui nécessite sinon l'ajout d'une règle (mix).*

Lemme 16.12 (contraction). *Si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi, \varphi$ par une dérivation sans coupure, alors $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi$ par une dérivation sans coupure.*

Démonstration. Le *rang de contraction* d'une dérivation π d'un séquent $\vdash \Gamma, \varphi, \varphi$ est le couple $(p(\varphi), p(\pi))$ dans $\mathbb{N}^2$. On ordonne les rangs de contraction par l'ordre lexicographique $<_{\mathrm{lex}}$ sur $\mathbb{N}^2$; il s'agit d'un ordre bien fondé.

On procède par induction bien fondée sur le rang de la dérivation sans coupure π de $\vdash \Gamma, \varphi, \varphi$. Si φ n'est pas principale dans la dernière règle (R) appliquée dans π, alors par inspection des règles, cette dérivation π est nécessairement de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi, \varphi\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}\pi_k \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_k, \varphi, \varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi, \varphi}\ (\mathrm{R})$$

où $0 \leq k \leq 2$ ($k = 0$ correspondant à une règle (ax)). Comme $(p(\varphi), p(\pi_i)) <_{\text{lex}} (p(\varphi), p(\pi))$ pour tout $1 \leq i \leq k$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à chaque π_i pour obtenir des dérivations π'_i de $\vdash \Gamma_i, \varphi$. Encore par inspection des règles, on obtient une nouvelle dérivation

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi'_1 & & \pi'_k \\ \vdots & & \vdots \\ \vdash \Gamma_1, \varphi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi}\ (\text{R})$$

Sinon, si φ est principale dans la dernière règle appliquée dans π, on fait une distinction de cas selon cette règle.

Cas de (ax) : alors $\varphi = \ell$ et $\Gamma = \Gamma', \overline{\ell}$, et on a aussi une dérivation de $\vdash \Gamma', \overline{\ell}, \ell$ par (ax).

Cas de ($\vee$) : alors $\varphi = \varphi' \vee \psi$ et π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi', \psi, \varphi' \vee \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi' \vee \psi, \varphi' \vee \psi}\ (\vee)$$

Par le lemme 16.11 appliqué à π_1, on a aussi une dérivation π'_1 de $\vdash \Gamma, \varphi', \psi, \varphi', \psi$. Comme $(p(\varphi'), p(\pi'_1)) <_{\text{lex}} (p(\varphi' \vee \psi), p(\pi))$, par hypothèse d'induction, on a une dérivation π''_1 de $\vdash \Gamma, \varphi', \psi, \psi$. Comme $(p(\psi), p(\pi''_1)) <_{\text{lex}} (p(\varphi' \vee \psi), p(\pi))$, par hypothèse d'induction, on a une dérivation de $\vdash \Gamma, \varphi', \psi$. Par une application de ($\vee$), on obtient alors une dérivation de $\vdash \Gamma, \varphi' \vee \psi$.

Cas de ($\wedge$) : alors $\varphi = \varphi' \wedge \psi$ et π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi', \varphi' \wedge \psi & \vdash \Gamma, \psi, \varphi' \wedge \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi' \wedge \psi, \varphi' \wedge \psi}\ (\wedge)$$

Par le lemme 16.11 appliqué à π_1 et π_2, on a aussi une dérivation π'_1 de $\vdash \Gamma, \varphi', \varphi'$ et une dérivation π'_2 de $\vdash \Gamma, \psi, \psi$. Comme $(p(\varphi'), p(\pi'_1)) <_{\text{lex}} (p(\varphi' \wedge \psi), p(\pi))$ et $(p(\psi), p(\pi'_2)) <_{\text{lex}} (p(\varphi' \wedge \psi), p(\pi))$, par hypothèse d'induction, on a des dérivations de $\vdash \Gamma, \varphi'$ et de $\vdash \Gamma, \psi$. Par une application de ($\wedge$), on obtient alors une dérivation de $\vdash \Gamma, \varphi' \wedge \psi$.

Cas de ($\forall$) : alors $\varphi = \forall x.\psi$ et π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \psi[y/x], \forall x.\psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \forall x.\psi, \forall x.\psi}\ (\forall)$$

où $y \notin \text{fv}(\Gamma, \forall x.\psi)$. Par le lemme 16.11 appliqué à π_1, on a aussi une dérivation π'_1 de $\vdash \Gamma, \psi[y/x], \psi[z/x]$ où $z \notin \{y\} \cup \text{fv}(\Gamma, \forall x.\psi)$. Par le lemme 16.7, on a aussi une dérivation π''_1 de $\vdash \Gamma[y/z], \psi[y/x][y/z], \psi[z/x][y/z]$. Comme $z \notin \{y\} \cup \text{fv}(\Gamma, \forall x.\psi)$, par les équations (28) et (29), ce dernier séquent est α-congruent à $\vdash \Gamma, \psi[y/x], \psi[y/x]$ et donc dérivable par le lemme d'α-congruence syntaxique. Comme $(p(\psi[y/x]), p(\pi''_1)) <_{\text{lex}} (p(\forall x.\psi), p(\pi))$, par hypothèse d'induction on obtient une dérivation de $\vdash \Gamma, \psi[y/x]$. Comme $y \notin \text{fv}(\Gamma, \forall x.\psi)$, on peut appliquer ($\forall$) et on obtient une dérivation de $\vdash \Gamma, \forall x.\psi$.

Cas de ($\exists$) : alors $\varphi = \exists x.\psi$ et π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \psi[t/x], \exists x.\psi, \exists x.\psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \exists x.\psi, \exists x.\psi}\ (\forall)$$

où $t \in T(\mathcal{F}, X)$. Comme $(p(\exists x.\psi), p(\pi_1)) <_{\text{lex}} (p(\exists x.\psi), p(\pi))$, par hypothèse d'induction sur π_1 on obtient une dérivation de $\vdash \Gamma, \psi[t/x], \exists x.\psi$ à laquelle on applique $(\exists)$ pour obtenir $\vdash \Gamma, \exists x.\psi$. □

16.3. * **Complétude.** La complétude des systèmes de preuves en logique du premier ordre, c'est-à-dire que toute formule valide est dérivable dans le système de preuve en question, se montre par contraposée : un séquent $\vdash \Gamma$ non prouvable n'est pas valide, ce qui par définition signifie qu'il a un *contre-modèle*, c'est-à-dire une interprétation I et une valuation ρ telles que $I, \rho \not\models \varphi$ pour toute formule $\varphi \in \text{dom}(\Gamma)$.

Ce contre-modèle est habituellement obtenu par la « construction de Henkin ». La construction présentée ici en est une variante, qui repose plutôt sur les travaux de Hintikka sur les tableaux en logique du premier ordre. Nous la voyons ici dans le cas du calcul des séquents monolatère de la figure 28, mais l'approche se généralise aisément à d'autres systèmes de preuve.

(Ebbinghaus, Flum et Thomas, 1994, ch. V) pour la construction de Henkin pour le calcul des séquents, et (David, Nour et Raffalli, 2003, ch. 2) et (Lassaigne et Rougemont, 2004, sec. 4.3) dans le cadre de la déduction naturelle.

(Fitting, 1996, sec. 3.5 et 5.6)

16.3.1. *Lemme de Hintikka.* Le principe de la construction est de considérer des ensembles de formules suffisamment « saturés ». Comme l'objectif est de construire un contre-modèle plutôt qu'un modèle, la définition qui suit est duale de la définition usuelle pour les tableaux.

Définition 16.13 (ensemble de Hintikka)**.** Un ensemble E de formules en forme normale négative est *dualement saturé* si

(1) si E contient $\varphi \vee \psi$, alors E contient φ et ψ,

(2) si E contient $\varphi \wedge \psi$, alors E contient φ ou ψ,

(3) si E contient $\exists x.\varphi$, alors E contient $\varphi[t/x]$ pour tout terme $t \in T(\mathcal{F}, X)$, et

(4) si E contient $\forall x.\varphi$, alors E contient $\varphi[y/x]$ pour une variable y.

Un ensemble est *cohérent* s'il ne contient pas une formule atomique α et sa négation $\neg\alpha$. Un *ensemble de Hintikka* est un ensemble dualement saturé cohérent.

Lemme 16.14 (Hintikka)**.** *Si H est un ensemble de Hintikka, alors il existe une interprétation I et une valuation ρ telles que, pour toute formule $\varphi \in H$, $I, \rho \not\models \varphi$.*

Démonstration. L'interprétation I a pour domaine $T(\mathcal{F} \cup X)$ l'ensemble des termes clos sur l'alphabet $\mathcal{F} \cup X$, où les variables de X sont considérées comme des constantes d'arité zéro. L'interprétation d'un symbole de fonction $f \in \mathcal{F}_m$ est $f^I(t_1, \ldots, t_m) \stackrel{\text{def}}{=} f(t_1, \ldots, t_m)$. L'interprétation d'un symbole de relation $R \in \mathcal{P}_m$ est $R^I \stackrel{\text{def}}{=} \{(t_1, \ldots, t_m) \mid \neg R(t_1, \ldots, t_m) \in H\}$. La valuation ρ est l'identité sur X.

On peut remarquer que ce modèle est presque une structure de Herbrand (voir section 13.4), si ce n'est que son domaine est $T(\mathcal{F}, X)$ et non $T(\mathcal{F})$.

On vérifie aisément que pour tout terme $t \in T(\mathcal{F}, X)$, $[\![t]\!]^I_\rho = t$. Cela implique que pour une substitution $[t/x]$ où t est vu comme un terme de $T(\mathcal{F}, X)$, la valuation $[t/x]\rho$ n'est autre que $\rho[t/x]$ où t est vu comme un élément du domaine D_I.

Montrons par induction structurelle sur $\varphi \in H$ que $I, \rho \not\models \varphi$.

— Pour un littéral positif $R(t_1, \ldots, t_m) \in H$, comme H est cohérent, $\neg R(t_1, \ldots, t_m) \notin H$ et donc $([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_m]\!]^I_\rho) = (t_1, \ldots, t_m) \notin R^I$: on a bien $I, \rho \not\models R(t_1, \ldots, t_m)$.

— Pour un littéral négatif $\neg R(t_1, \ldots, t_m) \in H$, $([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_m]\!]^I_\rho) = (t_1, \ldots, t_m) \in R^I$: on a bien $I, \rho \not\models \neg R(t_1, \ldots, t_m)$.

(1) Pour une formule $\varphi \vee \psi \in H$, comme H est dualement saturé il contient φ et ψ, donc par hypothèse d'induction $I, \rho \not\models \varphi$ et $I, \rho \not\models \psi$: on a bien $I, \rho \not\models \varphi \vee \psi$.

(2) Pour une formule $\varphi \wedge \psi \in H$, comme H est dualement saturé il contient φ ou ψ, donc par hypothèse d'induction $I, \rho \not\models \varphi$ ou $I, \rho \not\models \psi$: on a bien $I, \rho \not\models \varphi \wedge \psi$.

(3) Pour une formule $\exists x.\varphi \in H$, comme H est dualement saturé il contient $\varphi[t/x]$ pour tout terme t, donc par hypothèse d'induction $I, \rho \not\models \varphi[t/x]$ pour tout terme t et par le lemme 12.5, $I, \rho[t/x] \not\models \varphi$ pour tout $t \in D_I$: on a bien $I, \rho \not\models \exists x.\varphi$.

(4) Pour une formule $\forall x.\varphi \in H$, comme H est dualement saturé il contient $\varphi[y/x]$ pour une variable y, donc par hypothèse d'induction $I, \rho \not\models \varphi[y/x]$ et par le lemme 12.5, $I, \rho[y/x] \not\models \varphi$ où $y \in D_I$: on a bien $I, \rho \not\models \forall x.\varphi$. □

16.3.2. *Théorème de complétude.* Un ensemble E de formules en forme normale négative est *prouvable* s'il existe un multi-ensemble fini Γ avec $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq E$ tel que $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ par une dérivation sans coupure, et *non prouvable* sinon.

Lemme 16.15 (propagation)**.** *Soit E un ensemble non prouvable :*

(1) si E contient $\varphi \vee \psi$, alors $E \cup \{\varphi, \psi\}$ est non prouvable,

(2) si E contient $\varphi \wedge \psi$, alors $E \cup \{\varphi\}$ est non prouvable ou $E \cup \{\psi\}$ est non prouvable,

(3) si E contient $\exists x.\varphi$, alors $E \cup \{\varphi[t/x]\}$ est non prouvable pour tout terme $t \in T(\mathcal{F}, X)$, et

(4) si E contient $\forall x.\varphi$, alors $E \cup \{\varphi[y/x]\}$ est non prouvable pour toute variable $y \notin \mathrm{fv}(E)$.

Démonstration. On procède dans chaque cas par l'absurde.

(1) Si $E \cup \{\varphi, \psi\}$ est prouvable mais E n'est pas prouvable, alors nécessairement $\{\varphi, \psi\} \not\subseteq E$ et cette dérivation doit faire intervenir φ ou ψ. Sans perte de généralité, supposons $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi^m, \psi^n$ pour un multi-ensemble fini Γ avec $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq E$ et $m + n > 0$. Par affaiblissement, on a aussi $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi^{\max(m,n)}, \psi^{\max(m,n)}$. Par $\max(m, n)$ applications de $(\vee)$, on a donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, (\varphi \vee \psi)^{\max(m,n)}$ et E prouvable, contradiction.

(2) Si $E \cup \{\varphi\}$ et $E \cup \{\psi\}$ sont tous les deux prouvables mais E n'est pas prouvable, alors nécessairement $\varphi \notin E$ et $\psi \notin E$ et ces dérivations doivent faire intervenir φ et ψ : $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi^m$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Delta, \psi^n$ pour des multi-ensemble finis Γ et Δ avec $\mathrm{dom}(\Gamma) \cup \mathrm{dom}(\Delta) \subseteq E$ et $m, n > 0$. Par affaiblissement et contraction, on a aussi $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \Delta, \varphi$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \Delta, \psi$. Par une application de $(\wedge)$, on a donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \Delta, \varphi \wedge \psi$ et E prouvable, contradiction.

(3) Si $E \cup \{\varphi[t/x]\}$ est prouvable pour un terme t mais E n'est pas prouvable, alors $\varphi[t/x] \notin E$ et on a $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, (\varphi[t/x])^m$ pour un multi-ensemble fini Γ avec $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq E$ et $m > 0$. Par affaiblissement, $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, (\varphi[t/x])^m, (\exists x.\varphi)^m$. Par m applications de $(\exists)$, on a donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, (\exists x.\varphi)^m$ et E prouvable, contradiction.

(4) Si $E \cup \{\varphi[y/x]\}$ est prouvable pour une variable $y \notin \mathrm{fv}(E)$, alors $\varphi[y/x] \notin E$ et $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, (\varphi[y/x])^m$ pour un multi-ensemble fini Γ avec $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq E$ et $m > 0$. Par contraction, on a aussi $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \varphi[y/x]$, et comme $\mathrm{dom}(\Gamma) \subseteq E$ et $\forall x.\varphi \in E$, $y \notin \mathrm{fv}(\Gamma, \forall x.\varphi)$, donc on peut appliquer $(\forall)$ pour dériver $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma, \forall x.\varphi : E$ est prouvable, contradiction. □

Le cas (4) est le seul où l'admissibilité de la contraction soit vraiment utile.

Le cœur de la preuve du théorème de complétude est le lemme suivant :

Lemme 16.16 (saturation)**.** *Tout ensemble fini non prouvable est inclus dans un ensemble de* Hintikka.

La preuve du lemme de saturation correspond intuitivement à la construction d'une branche infinie d'une recherche de preuve pour un séquent non prouvable.

Démonstration. Appelons une *tâche* une formule qui n'est pas de la forme $\exists x.\varphi$ ou une paire $(\exists x.\varphi, t)$ où $t \in T(\mathcal{F}, X)$. Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de formules φ et de termes $t \in T(\mathcal{F}, X)$, il y a un nombre dénombrable de tâches. Fixons une énumération $\theta_0, \theta_1, \ldots$ de toutes les tâches, telle que chaque tâche apparaisse infiniment souvent.

Soit E_0 un ensemble fini non prouvable. On construit une séquence croissante d'ensembles finis non prouvables $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots$. Étant donné E_n, on construit E_{n+1} en utilisant θ_n la $n$ième tâche.

(1) Si $\theta_n = \varphi \vee \psi$: si $\varphi \vee \psi \in E_n$, alors par le lemme 16.15.(1), $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\varphi, \psi\}$ est non prouvable ; sinon on pose $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n$.

(2) Si $\theta_n = \varphi \wedge \psi$: si $\varphi \wedge \psi \in E_n$, alors par le lemme 16.15.(2), $E_n \cup \{\varphi\}$ ou $E_n \cup \{\psi\}$ est non prouvable et on pose $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\varphi\}$ dans le premier cas et $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\psi\}$ dans le second ; sinon on pose $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n$.

(3) Si $\theta_n = (\exists x.\varphi, t)$: si $\exists x.\varphi \in E_n$, alors par le lemme 16.15.(3), $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\varphi[t/x]\}$ est non prouvable ; sinon on pose $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n$.

(4) Si $\theta_n = \forall x.\varphi$: si $\forall x.\varphi \in E_n$, alors il existe $y \notin \text{fv}(E_n)$ puisque ce dernier est fini, et par le lemme 16.15.(4) $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n \cup \{\varphi[y/x]\}$ est non prouvable ; sinon on pose $E_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} E_n$.

⚠ *La restriction à un ensemble initial fini est importante pour ce cas (4).*

Définissons $H \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Il reste à montrer que H est dualement saturé et cohérent. Commençons par vérifier qu'il est dualement saturé :

(1) Si H contient $\varphi \vee \psi$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \vee \psi \in E_m$ et $n > m$ tel que $\theta_n = \varphi \vee \psi$, donc E_{n+1} et donc H contiennent φ et ψ.

(2) Si H contient $\varphi \wedge \psi$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \wedge \psi \in E_m$ et $n > m$ tel que $\theta_n = \varphi \wedge \psi$, donc E_{n+1} et donc H contiennent φ ou ψ.

(3) Si H contient $\exists x.\varphi$ et $t \in T(\mathcal{F}, X)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\exists x.\varphi \in E_m$ et $n > m$ tel que $\theta_n = (\exists x.\varphi, t)$, donc E_{n+1} et donc H contiennent $\varphi[t/x]$.

(4) Si H contient $\forall x.\varphi$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x.\varphi \in E_m$ et $n > m$ tel que $\theta_n = \forall x.\varphi$, donc il existe $y \in X$ telle que E_{n+1} et donc H contiennent $\varphi[y/x]$.

L'ensemble H est de plus cohérent : si α et $\neg\alpha$ appartenaient à H, alors il existerait $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{\alpha, \neg\alpha\} \subseteq E_n$, mais alors E_n serait prouvable par une application de la règle d'axiome. □

Théorème 16.17 (complétude)**.** *Si* $\vDash \Gamma$*, alors* $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ *par une dérivation sans coupure.*

Démonstration. Par contraposée, supposons que le séquent $\vdash \Gamma$ ne soit pas dérivable sans coupure. Alors l'ensemble $\text{dom}(\Gamma)$ n'est pas prouvable : si Δ est un multi-ensemble fini tel que $\text{dom}(\Delta) \subseteq \text{dom}(\Gamma)$, alors $\vdash \Delta$ n'est pas dérivable sans coupure, sans quoi on pourrait aussi dériver $\vdash \Gamma$ par affaiblissement et contraction.

Par le lemme 16.16 de saturation, $\text{dom}(\Gamma)$ est inclus dans H un ensemble de Hintikka. Par le lemme 16.14 de Hintikka, il existe une interprétation I et une valuation ρ telles que, pour toute formule φ de H (et donc en particulier pour toute formule φ de $\text{dom}(\Gamma)$), $I, \rho \nvDash \varphi$: on a bien $\nvDash \Gamma$. □

16.4. * **Élimination des coupures.** Les théorèmes 16.5 et 16.17 montrent que la règle de coupure est inutile dans le calcul des séquents : si $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ en utilisant (cut), alors $\vDash \Gamma$ par le théorème de correction, et donc $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma$ par une dérivation sans coupure par le théorème de complétude.

🔖 *(David, Nour et Raffalli, 2003, sec. 5.4)*

On peut cependant faire une preuve directe de ce résultat, sans faireappel à des notions sémantiques. La stratégie générale est de réécrire les dérivations du calcul des séquents avec coupure en des dérivations sans coupure, en faisant « remonter » les instances de (cut) vers les axiomes. L'intérêt de cette preuve syntaxique est qu'étant donné une preuve avec coupure, elle *construit* une preuve sans coupure. La difficulté principale est de montrer que ce processus termine.

Une *coupure maximale* est une dérivation π finissant par une règle (cut) de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdash \Gamma, \varphi & \vdash \overline{\varphi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\text{cut})$$

où π_1 et π_2 sont sans coupure. Son *rang de coupure* est $r(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} (p(\varphi), p(\pi_1)+p(\pi_2))$. On ordonne les rangs de coupure dans $\mathbb{N}^2$ lexicographiquement ; il s'agit d'un ordre bien fondé.

Lemme 16.18. *Soit* π *une coupure maximale. Alors il existe une dérivation* π' *sans coupure du même séquent.*

Démonstration. On procède par induction bien fondée sur $r(\pi)$. Rappelons qu'une telle dérivation π est de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi_1 & \pi_2\\ \vdots & \vdots\\ \vdash \Gamma, \varphi & \vdash \overline{\varphi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{(cut)}$$

où π_1 et π_2 sont sans coupure.

On procède à une première analyse par cas, selon que φ soit principale dans la dernière règle de π_1 ou $\overline{\varphi}$ dans la dernière règle de π_2.

cas « np1 » : si φ n'est pas principale dans la dernière règle (R) de π_1. Alors π_1 était de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi'_1 & & \pi'_k\\ \vdots & & \vdots\\ \vdash \Gamma_1, \varphi & \cdots & \vdash \Gamma_k, \varphi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi}\ \text{(R)}$$

pour un certain $0 \leq k \leq 2$, où $k = 0$ correspond au cas de la règle (ax). Par inspection des règles (R) du calcul des séquents, comme φ n'est pas principale, elle apparaît en effet dans toutes les prémisses de (R). Encore par inspection des règles, on observe que l'on peut transformer π en

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\pi'_1 & \pi_2\\ \vdots & \vdots\\ \vdash \Gamma_1, \varphi & \vdash \overline{\varphi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma_1, \Delta}\ \text{(cut)} \quad \cdots \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\pi'_k & \pi_2\\ \vdots & \vdots\\ \vdash \Gamma_k, \varphi & \vdash \overline{\varphi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma_k, \Delta}\ \text{(cut)}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{(R)}$$

Les k nouvelles instances de (cut) entre π'_i et π_2 sont maximales et de rangs respectifs $(p(\varphi), p(\pi'_i) + p(\pi_2))$ pour $1 \leq i \leq k$, où $p(\pi'_i) < p(\pi_1)$. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction pour obtenir des dérivations sans coupure de chaque $\vdash \Gamma_i, \Delta$. La dérivation résultante de $\vdash \Gamma, \Delta$ est sans coupure.

cas « np2 » : si $\overline{\varphi}$ n'est pas principale dans la dernière règle de π_2. Similaire au cas précédent.

On peut donc supposer maintenant que φ est principale dans la dernière règle de π_1 et $\overline{\varphi}$ dans la dernière de π_2. Nous faisons une nouvelle distinction de cas selon que ces dernières règles soient (ax) ou non.

cas « ax1 » : si φ est principale dans π_1 finissant par (ax). Alors $\varphi = \ell, \Gamma = \Gamma', \overline{\ell}$ et π était de la forme

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Gamma', \ell, \overline{\ell}}\ \text{(ax)} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash \overline{\ell}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma', \overline{\ell}, \Delta}\ \text{(cut)}$$

Par le lemme 16.8, on aurait pu obtenir le même résultat par affaiblissement de π_2. On obtient alors directement une preuve sans coupure de $\vdash \Gamma, \Delta$.

cas « ax2 » : si $\overline{\varphi}$ est principale dans π_2 finissant par (ax). Similaire au cas précédent.

Il reste maintenant le cas où π_1 et π_2 ont pour dernières règles $(\vee)$ et $(\wedge)$, ou $(\exists)$ et $(\forall)$: ce sont les seules paires possibles puisque φ et $\overline{\varphi}$ sont principales et que (ax) a déjà été traité.

cas « $\vee\wedge$ » : $\varphi = \varphi' \vee \psi$ est principale dans la dernière règle $(\vee)$ de π_1 et $\overline{\varphi} = \overline{\varphi'} \wedge \overline{\psi}$ dans la dernière règle $(\wedge)$ de π_2. La dérivation π est donc de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \varphi', \psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \varphi' \vee \psi}\,(\vee) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ \vdots\\ \vdash \overline{\varphi'}, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi'_3\\ \vdots\\ \vdash \overline{\psi}, \Delta\end{array}}{\vdash \overline{\varphi'} \wedge \overline{\psi}, \Delta}\,(\wedge)}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\text{cut})$$

On transforme cette dérivation en

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \varphi', \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi'_2\\ \vdots\\ \vdash \overline{\varphi'}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \psi, \Delta}\,(\text{cut}) \qquad \begin{array}{c}\pi'_3\\ \vdots\\ \vdash \overline{\psi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Delta}\,(\text{cut})$$

La coupure entre π'_1 et π'_2 est maximale et de rang $(p(\varphi'), p(\pi'_1)+p(\pi'_2))$ où $p(\varphi') < p(\varphi)$; on peut donc appliquer l'hypothèse d'induction pour obtenir une dérivation π' sans coupure de $\vdash \Gamma, \psi, \Delta$. La dérivation résultante est maintenant

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \psi, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi'_3\\ \vdots\\ \vdash \overline{\psi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Delta}\,(\text{cut})$$

La coupure y est maximale et de rang $(p(\psi), p(\pi')+p(\pi'_3))$ où $p(\psi) < p(\varphi)$; on peut encore appliquer l'hypothèse d'induction pour obtenir une dérivation sans coupure de $\vdash \Gamma, \Delta, \Delta$. Enfin, par le lemme 16.12 de contraction, puisque $\vdash \Gamma, \Delta, \Delta$ est dérivable sans coupure, $\vdash \Gamma, \Delta$ l'est aussi.

cas « $\wedge\vee$ » : $\varphi = \psi \wedge \psi'$ est principale dans la dernière règle ($\wedge$) de π_1 et $\overline{\varphi} = \overline{\psi} \vee \overline{\psi'}$ dans la dernière règle ($\vee$) de π_2. Similaire au cas précédent.

cas « $\exists\forall$ » : $\varphi = \exists x.\psi$ est principale dans la dernière règle ($\exists$) de π_1 et $\overline{\varphi} = \forall x.\overline{\psi}$ dans la dernière règle ($\forall$) de π_2. La dérivation π est donc de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \psi[t/x], \exists x.\psi\end{array}}{\vdash \Gamma, \exists x.\psi}\,(\exists) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi'_2\\ \vdots\\ \vdash (\overline{\psi})[y/x], \Delta\end{array}}{\vdash \forall x.\overline{\psi}, \Delta}\,(\forall)}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\text{cut})$$

où $y \notin \text{fv}(\forall x.\overline{\psi}, \Delta)$. Par le lemme 16.7, il existe une dérivation sans coupure π''_2 du séquent $\vdash (\overline{\psi})[y/x][t/y], \Delta[t/y]$. Comme $y \notin \text{fv}(\forall x.\overline{\psi})$, par l'équation (29), $(\overline{\psi})[y/x][t/y] =_\alpha (\overline{\psi})[t/x]$ et comme $y \notin \text{fv}(\Delta)$, par l'équation (28), $\Delta[t/y] =_\alpha \Delta$. De plus, par la propriété 13.4, $(\overline{\psi})[t/x] = \overline{(\psi[t/x])}$. On obtient donc une nouvelle dérivation par le lemme 16.6 d'α-congruence syntaxique

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi'_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \psi[t/x], \exists x.\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash \forall x.\overline{\psi}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \psi[t/x], \Delta}\,(\text{cut}) \qquad \begin{array}{c}\pi''_2\\ \vdots\\ \vdash \overline{(\psi[t/x])}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Delta}\,(\text{cut})$$

La coupure entre π'_1 et π_2 est maximale et de rang $(p(\varphi), p(\pi'_1)+p(\pi_2))$ où $p(\pi'_1) < p(\pi_1)$; on peut donc appliquer l'hypothèse d'induction pour obtenir une dérivation π' sans coupure de $\vdash \Gamma, \psi[t/x], \Delta$. La dérivation résultante est

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\pi' & \pi_2'' \\ \vdots & \vdots \\ \vdash \Gamma, \psi[t/x], \Delta & \vdash \overline{(\psi[t/x])}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, \Delta}\ (\text{cut})$$

La coupure y est maximale et de rang $(p(\psi[t/x]), p(\pi') + p(\pi_2''))$ où $p(\psi[t/x]) = p(\psi) < p(\varphi)$; on peut encore appliquer l'hypothèse d'induction pour obtenir une dérivation sans coupure de $\vdash \Gamma, \Delta, \Delta$. Enfin, par le lemme 16.12 de contraction, $\vdash \Gamma, \Delta$ est dérivable sans coupure.

cas « $\forall\exists$ » : $\varphi = \forall x.\psi$ est principale dans la dernière règle ($\forall$) de π_1 et $\overline{\varphi} = \exists x.\overline{\psi}$ dans la dernière règle ($\exists$) de π_2. Similaire au cas précédent. □

Théorème 16.19 (élimination des coupures)**.** *Soit π une dérivation du calcul des séquent. Alors il existe une dérivation sans coupure du même séquent.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre n d'instances de la règle (cut) dans π. Pour le cas de base $n = 0$, π est déjà une dérivation sans coupure. Supposons donc $n > 0$. Il existe donc une coupure maximale π' qui est une sous-dérivation de π. Par le lemme 16.18, il existe une dérivation sans coupure équivalente à π' ; on remplace π' par celle-ci dans π pour obtenir une dérivation équivalente à π avec $n-1$ instances de (cut). Par hypothèse de récurrence, cette nouvelle dérivation a une dérivation sans coupure équivalente. □

L'élimination des coupures est souvent combinée avec la propriété de sous-formule : pour une formule φ en forme normale négative, son ensemble de *sous-formules* $\mathrm{sub}(\varphi)$ est défini inductivement par

$$\mathrm{sub}(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell\}\,,$$

$$\mathrm{sub}(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \vee \psi\} \cup \mathrm{sub}(\varphi) \cup \mathrm{sub}(\psi)\,, \qquad \mathrm{sub}(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \wedge \psi\} \cup \mathrm{sub}(\varphi) \cup \mathrm{sub}(\psi)\,,$$

$$\mathrm{sub}(\exists x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\exists x.\varphi\} \cup \{\varphi[t/x] \mid t \in T(\mathcal{F}, X)\},\ \mathrm{sub}(\forall x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\forall x.\varphi\} \cup \{\varphi[y/x] \mid y \in X\}\,.$$

Propriété 16.20 (sous-formule)**.** *Dans toutes les règles du calcul des séquents sauf* (cut)*, toutes les formules apparaissant dans les prémisses sont des sous-formules de formules apparaissant dans la conclusion.*

Références

Arora, Sanjeev et Boaz Barak (2009). *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press. doi : 10.1017/CBO9780511804090.

Barrett, Clark, Pascal Fontaine et Cesare Tinelli (2017). *The SMT-LIB Standard: Version 2.6*. Rapp. tech. Department of Computer Science, The University of Iowa. url : http://smtlib.cs.uiowa.edu/papers/smt-lib-reference-v2.6-r2017-07-18.pdf.

Börger, Egon, Erich Grädel et Yuri Gurevich (1997). *The Classical Decision Problem*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag.

Carton, Olivier (2008). *Langages formels, calculabilité et complexité*. Vuibert.

Chang, Chen C. et Howard J. Keisler (1990). *Model Theory*. 3e édition. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73. North Holland. doi : 10.1016/S0049-237X(08)70077-6.

Chang, Chin-Liang et Richard Char-Tung Lee (1973). *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press. doi : 10.1016/B978-0-08-091728-3.50001-1.

Conchon, Sylvain et Laurent Simon (2018). « Satisfaisabilité propositionnelle (SAT) et modulo théories (SMT) ». Dans : *Informatique Mathématique. Une photographie en 2018*. Sous la dir. d'Emmanuel Jeandel et Laurent Vigneron. CNRS Éditions. Chap. 2, pp. 43-86. url : https://ejcim2018.sciencesconf.org/data/pages/ejcim2018.pdf.

David, René, Karim Nour et Christophe Raffalli (2003). *Introduction à la logique*. 2e édition. Dunod.

Duparc, Jacques (2015). *La logique pas à pas*. Presses polytechniques et universitaires romandes.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum et Wolfgang Thomas (1994). *Mathematical Logic*. 2e édition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer. doi : 10.1007/978-1-4757-2355-7.

Fitting, Melvin (1996). *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. 2e édition. Graduate Texts in Computer Science. Springer. doi : 10.1007/978-1-4612-2360-3.

Gold, E. Mark (1967). « Language identification in the limit ». Dans : *Information and Control* 10(5), pp. 447-474. doi : 10.1016/S0019-9958(67)91165-5.

Goldberg, Evgueni et Yakov Novikov (2003). « Verification of proofs of unsatisfiability for CNF formulas ». Dans : *Actes de DATE '03*, pp. 886-891.

Goubault-Larrecq, Jean et Ian Mackie (1997). *Proof Theory and Automated Deduction*. Applied Logic Series 6. Kluwer Academic Publishers.

Harrisson, John (2009). *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*. Cambridge University Press.

Knuth, Donald E. (2008). *The Art of Computer Programming*. Volume 4, fascicule 0 : *Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*. Addison-Wesley. url : https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc0b.ps.gz.

———— (2015). *The Art of Computer Programming*. Volume 4, fascicule 6 : *Satisfiability*. Addison-Wesley. url : https://cs.stanford.edu/~knuth/fasc6a.ps.gz.

Kroening, Daniel et Ofer Strichman (2016). *Decision Procedures. An Algorithmic Point of View*. 2e édition. Texts in Theoretical Computer Science. Springer. doi : 10.1007/978-3-662-50497-0.

Lassaigne, Richard et Michel de Rougemont (2004). *Logic and Complexity*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer. doi : 10.1007/978-0-85729-392-3.

Papadimitriou, Christos (1993). *Computational Complexity*. Addison-Wesley.

Perifel, Sylvain (2014). *Complexité algorithmique*. Ellipses. url : https://www.irif.fr/~sperifel/complexite.pdf.

Wetzler, Nathan, Marijn J. H. Heule et Warren A. Hunt (2014). « DRAT-trim: Efficient checking and trimming using expressive clausal proofs ». Dans : *Actes de SAT '14*. Lecture Notes in Computer Science 8561. Springer, pp. 422-429. doi : 10.1007/978-3-319-09284-3_31.