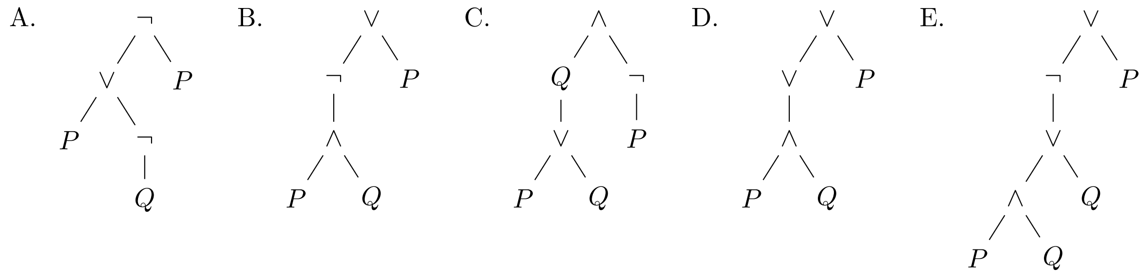
TD 1. Syntaxe et sémantique de la logique propositionnelle

Dans les exercices qui suivent, P, Q et R dénotent des propositions tirées de $\mathcal{P}_0$.

Exercice 1. Syntaxe abstraite

Pour chacun des arbres suivants, dire s'il s'agit d'une formule propositionnelle.



Exercice 2. Syntaxe concrète

Pour chacun des cas ci-dessous, dire si l'expression dénote sans ambiguïté une formule propositionnelle, et le cas échéant, dessiner le ou les arbre(s) de syntaxe abstraite correspondant(s).

A. $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P$ B. $\neg(\neg P \vee Q)$ C. $\neg(R \wedge \neg\neg P)$ D. $R \wedge \neg(P \vee Q \wedge \neg R)$

Exercice 3. Évaluation

Quelle est la valeur de vérité des formules propositionnelles suivantes dans une interprétation I telle que $I(P) = \top$, $I(Q) = \bot$ et $I(R) = \bot$?

A. $\neg Q$ B. $\neg(P \wedge \neg Q)$ C. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ D. $R \vee \neg(P \wedge Q)$ E. $P \wedge \neg Q \wedge R$

Exercice 4. Modélisation

On s'autorise dans cet exercice à utiliser l'opérateur d'implication $\Rightarrow$.

Formaliser les énoncés suivants (écrits en langue naturelle) en logique propositionnelle.

(a) « Elle aime les pizzas à pâte épaisse, et aussi celles avec de la roquette ou des champignons. »

(b) « Le matin, il boit un café serré avec une tartine, ou parfois un thé. »

(c) « Si Paris est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(d) « Si Rome est la capitale de la France, alors la Terre est ronde. »

(e) « Si la Terre n'est pas ronde, je veux bien manger mon chapeau. »

Exercice 5. Satisfiabilité et validité

On s'autorise dans cet exercice à utiliser l'opérateur d'implication $\Rightarrow$.

Pour chacune des formules propositionnelles suivantes, dire (1) si elles sont satisfiables et, si c'est le cas, donner une interprétation qui les satisfait ; (2) si elles sont valides et, si ce n'est pas le cas, donner une interprétation qui ne les satisfait pas.

A. $(P \wedge \neg P) \Rightarrow Q$ B. $(P \vee Q) \Rightarrow P$ C. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow \neg Q)$ D. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

Exercice 6. Syntaxe étendue

Soit la fonction booléenne « nor » $\downarrow$ à deux arguments définie par $\bot\downarrow\bot = \top$ et $\bot\downarrow\top = \top\downarrow\bot = \top\downarrow\top = \bot$. On étend la syntaxe abstraite des formules propositionnelles en permettant d'utiliser ce nouvel opérateur.

(a) Montrer que $\varphi \downarrow \psi$ peut s'exprimer à l'aide de $\neg$ et $\vee$.
(b) Montrer que $\neg\varphi$ peut s'exprimer à l'aide de $\downarrow$.
(c) Montrer que $\varphi \vee \psi$ peut s'exprimer à l'aide de $\downarrow$.

Exercice 7. Lemme de substitution propositionnelle

Une *substitution propositionnelle* est une fonction σ de $\mathcal{P}_0$ dans les formules propositionnelles telle que $\mathrm{dom}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in \mathcal{P}_0 \mid \sigma(P) \neq P\}$ soit fini. Toute substitution peut être vue comme une fonction des formules propositionnelles dans les formules propositionnelles selon la définition suivante :

$$P\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(P) \;, \qquad (\neg\varphi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\varphi\sigma) \;, \qquad (\varphi \vee \psi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\sigma) \vee (\psi\sigma) \;, \qquad (\varphi \wedge \psi)\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi\sigma) \wedge (\psi\sigma) \;.$$

Pour une interprétation I et une substitution propositionnelle σ, on définit l'interprétation $I\sigma$ par $P^{I\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} [\![\sigma(P)]\!]^I$ pour toute proposition P.

Démontrer l'énoncé suivant :

> Pour toute formule propositionnelle φ, toute substitution propositionnelle σ et toute interprétation I, $[\![\varphi\sigma]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I\sigma}$.